

Partie 1: Fluide en loi puissance (6 points)

La loi de comportement  $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$ , avec  $\underline{\tau} = 2 \eta(\text{II}_{2D}) \underline{D}$  et  $\eta(\text{II}_{2D}) = m |\text{II}_{2D}|^{(n-1)/2}$  définit la loi puissance.

- 1) Calculer la viscosité de cisaillement  $\eta_c$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , dans le cas de l'essai de cisaillement  $v_1 = \dot{\gamma} x_2, v_2 = 0, v_3 = 0$ .
- 2) Calculer la viscosité élongationnelle  $\eta_E$ . L'écoulement est donné par  $v_1 = \dot{\epsilon} x_1, v_2 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} x_2, v_3 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} x_3$ .
- 3) Tracer sur un même diagramme  $\eta_c$  et  $\eta_E$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\epsilon}$ , en prenant  $n = 0.5$ . Ce modèle est-il réaliste en comparaison avec des essais expérimentaux effectués sur des polymères ?

Partie 2: Courbe de viscosité en régime permanent (4 points)

- 1) A partir des courbes obtenues en régime transitoire (figure 1), correspondant à un démarrage en cisaillement ( $\dot{\gamma}$  passe de 0 à  $\dot{\gamma}_0$  quasiment instantanément), expliquer comment construire la courbe de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$ .
- 2) Tracer cette courbe point par point en échelle logarithmique. Comment qualifie-t-on le comportement de ce fluide ? Quel modèle proposeriez-vous pour prédire son comportement ?

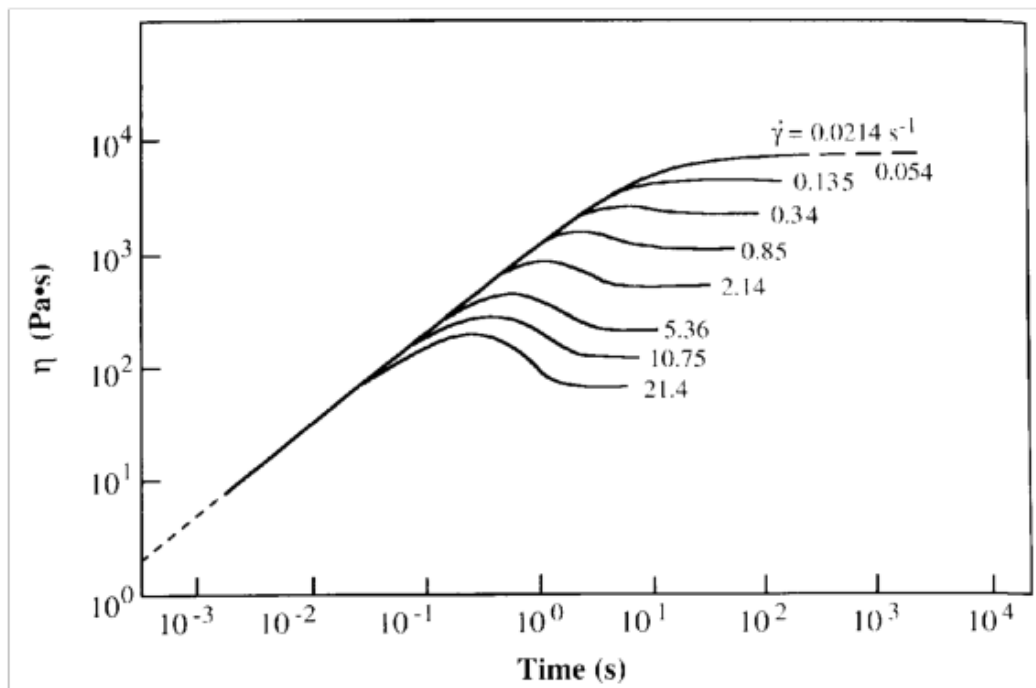


Figure 1. Essai de cisaillement transitoire à différents taux de cisaillement .

**Partie 3: Rhéomètre plan-plan (10 points)**

Un fluide placé dans un rhéomètre plan-plan (figure 2) est cisailé entre deux plans circulaires de rayons  $R$ , un étant fixe ( $z=0$ ) et l'autre mobile ( $z=h$ ) tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ . On a accès au couple  $M$  suivant  $z$  ainsi qu'à la vitesse de rotation  $\Omega$  du plan supérieur. Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  seront utilisées.

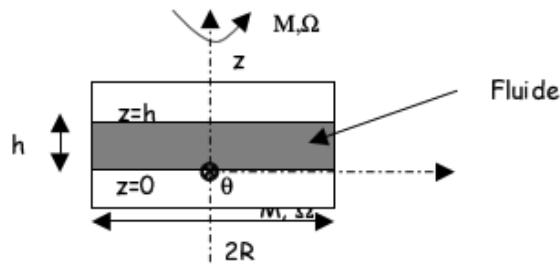


Figure 2. Schéma du rhéomètre plan-plan

- 1) On suppose que l'écoulement est permanent axisymétrique et que la seule composante non nulle du champ de vitesse est  $v_\theta$ . Montrer que le principe de conservation de la masse est vérifié.
- 2) On peut montrer que  $v_\theta = v_\theta(r, z) = \Omega rz/h$ . Montrer que ce champ de vitesse satisfait aux conditions aux limites à la paroi des deux plans.
- 3) Calculer les tenseurs  $\text{grad } \underline{v}$ ,  $\underline{D}$  et  $\underline{\Omega}$  (gradient des vitesses et ses parties symétrique  $\underline{D}$  et antisymétrique  $\underline{\Omega}$ ). En déduire le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Est-il constant ?
- 4) Quelle est la contrainte de cisaillement qui est non nulle ? La représenter sur un schéma en utilisant la notion de facettes. En déduire (sous forme intégrale) le moment  $M$  appliqué au plateau supérieur en fonction de cette contrainte.
- 5) A partir de la relation de la question 4), on peut montrer que  $\tau_{12}(R) = \frac{M}{2\pi R^3} \left( 3 + \frac{\dot{\gamma}_R}{M} \frac{dM}{d\dot{\gamma}_R} \right)$ , où

$\dot{\gamma}_R = \Omega R/h$  et  $\tau_{12}(R)$  est la contrainte de cisaillement non nulle calculée en  $r=R$ . Proposer une méthode de mesure de la viscosité en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_R$ . Préciser les avantages et inconvénients de ce rhéomètre par rapport au rhéomètre cône-plan.

Question subsidiaire : Démontrer la relation de la question 5)

**Maitrise de Mécanique. Cours optionnel “Matériaux et structures”.**  
**Module “viscoélasticité”**  
**2 heures – Tous documents autorisés**  
**20 décembre 2002**

Partie 1. Essais transitoires (8 points)

On considère les courbes de viscosité transitoires pour un Polyéthylène (PE) à 150°C.

- en cisaillement  $\eta^+(\dot{\gamma}, t)$  à différents taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = 0.001, 0.5, 5, 20 \text{ s}^{-1}$
- en élongation uniaxiale  $\eta_u^+(\dot{\epsilon}, t)$  à différents taux d'élongation  $\dot{\epsilon} = 0.001, 0.01, 0.1, 1 \text{ s}^{-1}$

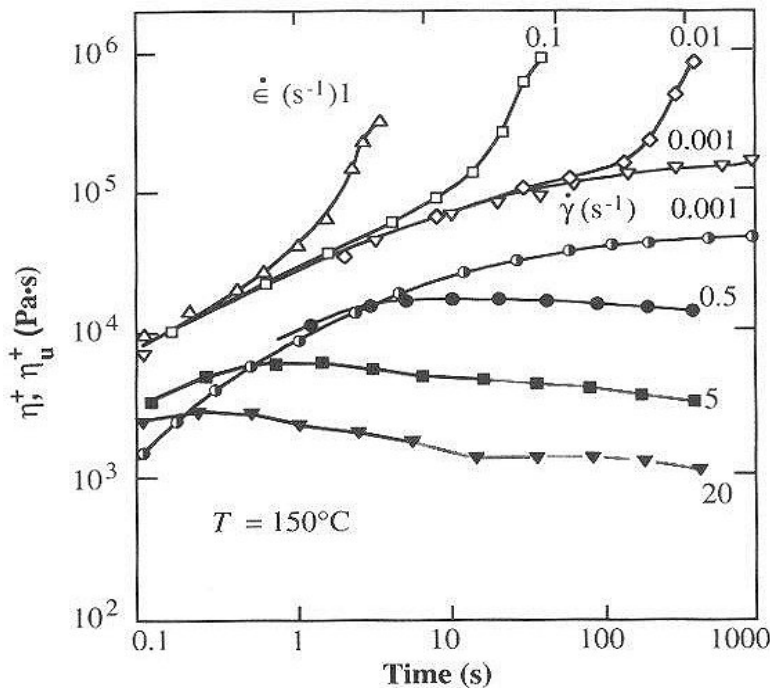


Figure 1. Essais transitoires (PE à 150°C)

- a) Pourquoi la pente de ces courbes est-elle la même aux temps courts ( $t < 1 \text{ s}$ ) ? Que vaut cette pente en cisaillement et élongation ?
- b) Expliquer qualitativement les courbes de cisaillement et la présence éventuelle d'un maximum aux premiers instants. Lorsque  $\dot{\gamma}$  est petit, donner une expression de  $\eta^+(\dot{\gamma}, t)$  et en déduire le temps de relaxation.
- c) Expliquer qualitativement la forme des courbes de viscosités élongationnelles. Peut-on définir un régime permanent ? Le modèle de Lodge permet-il de caractériser ce comportement ? Pour quelle valeur de  $\dot{\epsilon}$  les courbes  $\eta_u^+(\dot{\epsilon}, t)$  tendent-elles vers l'infini ? En déduire une valeur approchée du temps de relaxation du polymère.
- d) Dans le cas où les viscosités de cisaillement et d'élongation existent (leurs limites sont respectivement  $\eta(\dot{\gamma})$  et  $\eta_u(\dot{\epsilon})$ ), on appelle rapport de Trouton le rapport  $\eta_u(\dot{\epsilon}) / \eta(\dot{\gamma})$ . Que vaut ce rapport théoriquement si  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  ? Que vaut ce rapport dans le cas où  $\dot{\epsilon} = \dot{\gamma} = 0.001 \text{ s}^{-1}$  ? Que devient-il lorsque  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\gamma}$  augmentent ?

Partie 2. Rhéomètre de Couette (8 points)

Le rhéomètre est constitué de deux cylindres concentriques de rayons  $R_i$  (intérieur) et  $R_e$  (extérieur), le cylindre extérieur étant mobile (Figure 2) tournant à vitesse  $\Omega$ , tandis que le cylindre intérieur est fixe. On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

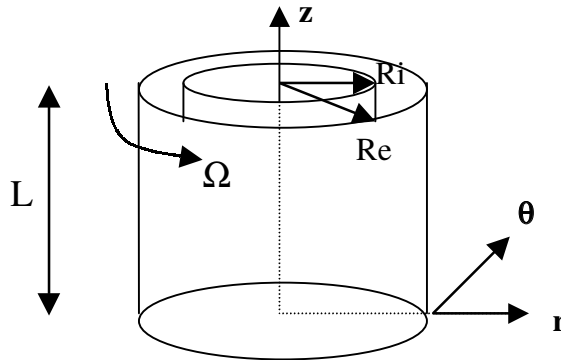


Figure 2. Schéma du rhéomètre de Couette

- En supposant que l'écoulement est axisymétrique et indépendant de  $z$  ( $L$  grand devant les autres dimensions), et en supposant que la seule composante non nulle est  $v_\theta(r)$ , calculer le gradient de cisaillement  $\dot{\gamma}$  sous forme analytique en fonction de  $v_\theta$  et ses dérivées. Ecrire  $\dot{\gamma}$  sous forme contractée\*. On supposera dans la suite que  $\dot{\gamma} > 0$ .
- Vérifier la conservation de la masse.
- On pose  $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ . Ecrire les équations d'équilibre (coordonnées cylindriques) en régime permanent. Montrer que deux d'entre elles donnent la pression  $p(r, z)$  si l'on connaît  $v_\theta(r)$  et la loi de comportement  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v})$ , et que la dernière donne une équation pour  $\tau_{r\theta}$ . Intégrer cette équation et montrer que  $\tau_{r\theta} = K/r^2$ , quelle que soit la loi de comportement choisie.
- Dans le cas du fluide Newtonien, montrer que le champ de vitesse s'écrit  $v_\theta(r) = A/r + Br$ . Ecrire les conditions aux limites pour trouver  $A$  et  $B$ .
- On considère maintenant que le fluide obéit à une loi puissance  $\boldsymbol{\tau} = 2m |\mathbb{I}_{2D}|^{(n-1)/2} \mathbf{D}$ . Quelles sont les composantes du tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  non nulles ? Exprimer  $\tau_{r\theta}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ . En déduire  $\dot{\gamma}$  en fonction de  $r$ . Utiliser a) pour intégrer et calculer  $v_\theta(r)$ . Tracer  $v_\theta(r)$ . Vérifier que l'on retrouve bien le cas du fluide Newtonien.

(\*) On utilisera le fait que  $(a/b)' = a'/b - a b'/b^2$ , où ' désigne le signe de dérivation.

Partie 3. Modèles élastiques (4 points)

Un caoutchouc peut être décrit par une loi de comportement donné par  $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + g_1 \mathbf{B} + g_2 \mathbf{B}^{-1}$ , où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions des invariants de  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ , et  $p$  une variable déterminée par les conditions aux limites. On pose  $g_1 = \partial W / \partial I_B$  et  $g_2 = \partial W / \partial II_B$ , où  $W$  est une fonctionnelle énergétique.

- En prenant  $W = C_1 I_B + C_2 II_B$ , quel modèle retrouve-t-on ?
- On pose maintenant  $W = k I_B^2$ . Trouver les prédictions de ce modèle en cisaillement et en élongation. Est-ce un bon modèle ? Quelle est la signification de la constante  $k$  ?

« Rhéologie des matériaux complexes et des matériaux du vivant » (MEC428i)  
 -Viscoélasticité -

Mardi 13 avril 2004, 10h-12h  
 (Tous documents autorisés)

1. Rhéométrie (8 points)

On considère un essai viscosimétrique, à taux de cisaillement constant imposé. Les résultats sont donnés en Figure 1.

- Pourquoi utilise t-on une échelle logarithmique ?
- Quelle est la signification de  $\eta$  et  $\psi_1$  ? Les définir à partir des contraintes habituelles.
- Quelle est la signification du coefficient  $a_T$  ?
- Expliquer comment ces courbes maîtresses sont obtenues ? Pourquoi a t-on porté  $\psi_1/a_T^2$  ?
- Quelle est la valeur de la viscosité Newtonienne à  $T=210^\circ\text{C}$  ?
- Que peut-on dire du comportement du fluide aux basses fréquences ? Proposer un modèle.
- Comment appelle t-on le comportement du fluide aux grandes fréquences ? Donner la valeur de l'indice  $n$  de la loi puissance que l'on peut utiliser.
- Connaissez-vous un modèle prédisant le comportement global du fluide à toutes les fréquences ?
- Estimer le temps de relaxation  $\lambda$  du polymère à  $T=210^\circ\text{C}$ .
- On définit  $t_0=\psi_1/\eta$  lorsque le taux de cisaillement est petit. Comparer  $\lambda$  et  $t_0$ .

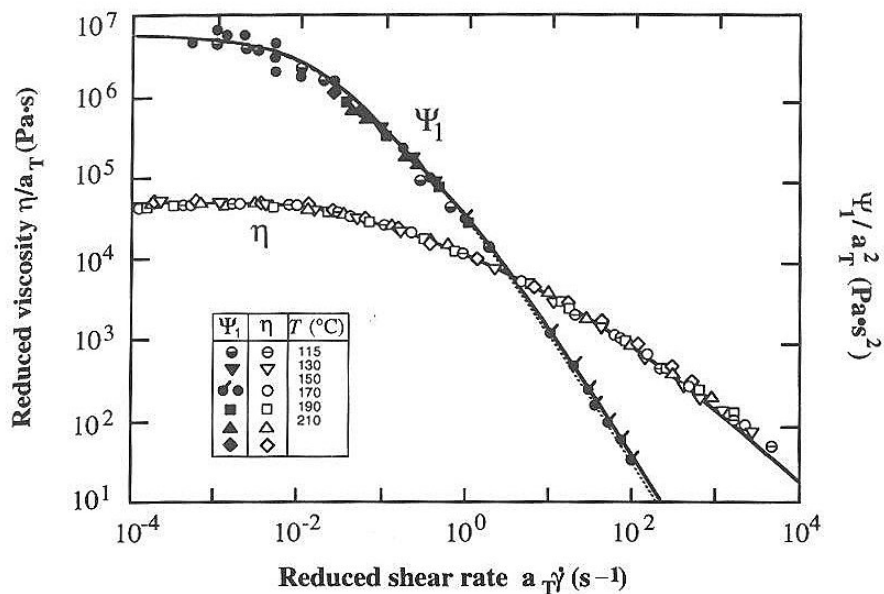


Figure 1. Comportement en cisaillement simple d'un polymère fondu ( $T=210^\circ\text{C}$ )

## 2. Loi de comportement (8 points)

On utilise la dérivée corotationnelle  $\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ , où  $\underline{\underline{\sigma}}$  désigne le tenseur des contraintes,  $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}} - (\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}})^T)$  est la partie antisymétrique du tenseur  $\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}}$ , le gradient des vitesses. On a aussi  $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}} + (\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}})^T)$  et en conséquence  $\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}$ . On se propose d'étudier la loi de comportement suivante, dite loi corotationnelle de Maxwell :

$$\lambda \overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} = \eta \underline{\underline{D}}$$

Cette loi est objective.

- Calculer la viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  et la première différence des contraintes normales  $\psi_1(\dot{\gamma})$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , dans un essai de cisaillement homogène en régime permanent.
- Comparer ces résultats à ceux de la figure 1. Le modèle vous paraît-il réaliste ?
- Que peut-on dire de la deuxième différence des contraintes  $\psi_2(\dot{\gamma})$  ?
- Calculer la viscosité élongationnelle lors d'un écoulement élongationnel uniaxial, en fonction du taux d'allongement  $\dot{\epsilon}$ . Ce résultat vous paraît-il applicable à un polymère fondu ?

## 3. Modèle élastique (4 points)

On considère un matériau incompressible obéissant à la loi de comportement suivante,  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + c\underline{\underline{B}} + d\underline{\underline{B}}^2$ , où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes et  $\underline{\underline{B}}$  est le tenseur des déformations défini par  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\underline{\underline{F}}^T$  avec  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{grad}}\underline{\underline{x}} = \frac{\partial x}{\partial X}$ , le gradient de la déformation.  $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}(\underline{\underline{X}}, t)$  est la position lagrangienne d'une particule au cours de son mouvement.

- De quel type de modèle s'agit-il ?
- Préciser le sens physique de  $p$ , et les unités de  $p$ ,  $c$  et  $d$ .
- Montrer que cette loi de comportement est équivalente au modèle de Mooney-Rivlin
- Quelle est la valeur du module de cisaillement  $G$  en fonction de  $p$ ,  $c$  et  $d$ .

## I. RHÉOMÉTRIE DE CISAILLEMENT

Le comportement d'un fluide non-Newtonien en cisaillement simple (régime transitoire) est donné en Figure 1.

- Proposer une explication au fait que les deux courbes correspondant à  $\dot{\gamma} = 0.0214s^{-1}$  et  $\dot{\gamma} = 0.054s^{-1}$  sont confondues.
- Expliquer comment, à l'aide de ces courbes, on peut avoir accès à la viscosité de cisaillement.
- Donner les valeurs de la viscosité de cisaillement correspondant aux taux de cisaillement de la Figure 1. Tracer en échelle log-log (logarithme décimal) la courbe de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$  du régime permanent pour les 9 taux de cisaillement utilisés.
- Comment appelle-t-on ce type de comportement ? Proposer un modèle qui permet de décrire ce matériau. Déterminer les paramètres ajustables de ce modèle à l'aide de la courbe de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$ , que vous venez de tracer.
- Quel est la différence entre les essais à bas gradients de cisaillement et à forts gradients ? Proposer une explication.
- Quelle que soit la valeur de  $\dot{\gamma}$ , les courbes sont confondues aux temps courts. Pourquoi ?
- Proposer une méthode pour déterminer le module de cisaillement de l'échantillon. Quelle est sa valeur ?

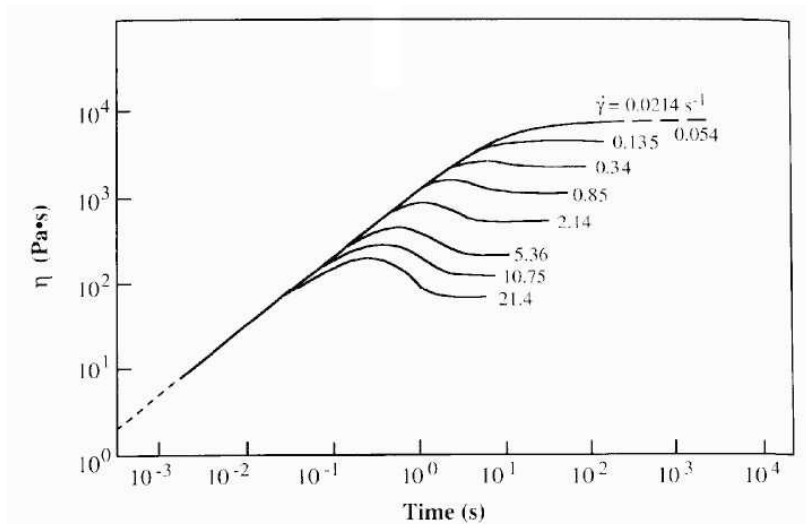


FIG. 1: Viscosité transitoire à différents taux de cisaillement.

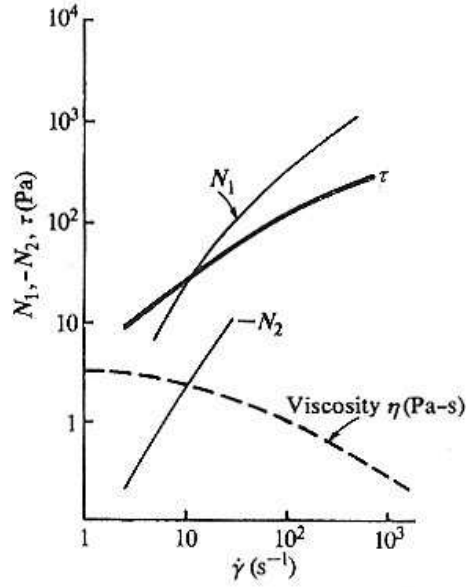


FIG. 2: Comportement typique de  $\eta$ ,  $\tau$  ( $= \sigma_{12}$ ),  $N_1$ , et  $-N_2$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ .

## II. LOIS DE COMPORTEMENT

On considère le modèle de Criminale-Ericksen. Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est donné par  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ , où  $p$  est la pression. Le modèle donne une forme explicite pour  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta_0 \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \psi_1^0 \overset{\nabla}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} + 4\psi_2^0 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (1)$$

où  $\eta_0$ ,  $\psi_1^0$  et  $\psi_2^0$  sont des constantes et où l'on a utilisé la dérivée convectée supérieure :

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{D}}}} - \underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}})^T \quad (2)$$

- Cas du cisaillement simple. Calculer la viscosité de cisaillement  $\eta$ , ainsi que les différences des contraintes normales  $N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22}$  et  $N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Comparer ces résultats à ceux de la Figure 2. Quel doit être le signe de  $\psi_2^0$  ?
- Elongation uniaxiale. Calculer la viscosité élongationnelle  $\eta_E$  en fonction du taux d'allongement  $\dot{\epsilon}$ . Quelle est la limite de  $\eta_E$  lorsque  $\dot{\epsilon}$  tend vers 0 ? Ce comportement en fonction de  $\dot{\epsilon}$  est-il compatible avec les résultats obtenus sur des polymères ?
- On peut encore améliorer ce modèle en remplaçant  $\eta_0$  par  $\eta_0(II_D)$ ,  $\psi_1^0$  par  $\psi_1^0(II_D)$  et  $\psi_2^0$  par  $\psi_2^0(II_D)$ , où  $II_D$  est le deuxième invariant de  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ . Comment sont modifiés les calculs précédents ? Proposer des fonctions pour  $\eta_0(II_D)$ ,  $\psi_1^0(II_D)$ , et  $\psi_2^0(II_D)$ , correspondant aux courbes de la Figure 2.
- Que pensez-vous de la capacité du modèle à prédire des régimes transitoires ? Permet-il d'obtenir des propriétés élastiques ?



## I. LOIS DE COMPORTEMENT

Le comportement d'un fluide non-Newtonien est donné par l'équation de Maxwell suivante :

$$\lambda \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (1)$$

où

$$\underline{\underline{\dot{\tau}}} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} - \underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}} \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}})^T \quad (2)$$

Montrer que dans le cas d'un essai en élongation uniaxiale, la viscosité élongationnelle transitoire est donnée par :

$$\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}) = \frac{G}{\dot{\epsilon}} \left( (e^{2\dot{\epsilon}t} - e^{-\dot{\epsilon}t}) e^{-t/\lambda} + \frac{1 - e^{-(\frac{1}{\lambda} - 2\dot{\epsilon})t}}{1 - 2\lambda\dot{\epsilon}} - \frac{1 - e^{-(\frac{1}{\lambda} + \dot{\epsilon})t}}{1 + \lambda\dot{\epsilon}} \right) \quad (3)$$

On considère maintenant le modèle de Johnson-Segalman :

$$\lambda \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (4)$$

où

$$\underline{\underline{\dot{\tau}}} = (1 - a) \underline{\underline{\dot{\tau}}} + a \underline{\underline{\dot{\tau}}} \quad (5)$$

et

$$\underline{\underline{\dot{\tau}}} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}} + (\underline{\underline{\text{grad}\vec{v}}})^T \underline{\underline{\tau}} \quad (6)$$

Calculer les fonctions viscosimétriques  $\eta(\dot{\gamma})$ ,  $\psi_1(\dot{\gamma})$  et  $\psi_2(\dot{\gamma})$  en cisaillement simple (régime permanent). Que pensez-vous de ces résultats ? Quelle valeur de  $a$  vous semble la plus adaptée pour décrire le comportement des polymères fondus ? Pourquoi ?

## II. RHÉOMÈTRE PLAN-PLAN

On considère un rhéomètre plan-plan comme en Fig.1.

Le fluide est cisailé entre les deux plans de rayon  $R$ , séparés d'une hauteur  $h$ . On utilise des coordonnées cylindriques habituelles  $(r, \theta, z)$ . On sait mesurer le couple  $M$  appliqué sur le plan supérieur mobile (rotation  $\Omega$ ) ainsi que la vitesse angulaire  $\Omega$ . L'origine  $z = 0$  correspond au plan inférieur (fixe) et  $z = h$  correspond au plan supérieur.

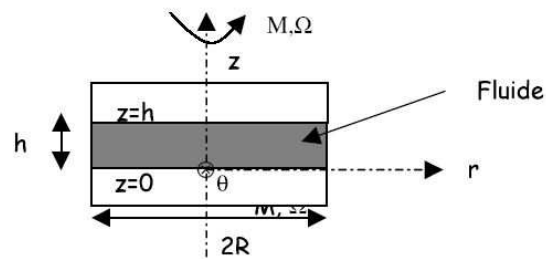


FIG. 1: Schéma du rhéomètre plan-plan.

- On suppose l'écoulement permanent axisymétrique et la seule composante du champ de vitesse est  $v_\theta$ . On peut montrer que  $v_\theta = \Omega \frac{rz}{h}$ . Montrer que le principe de conservation de la masse est vérifié ainsi que les conditions aux limites.
- Calculer  $\text{grad } \vec{v}$ ,  $\underline{D}$  et déterminer le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Conclusions.
- Quelle est la contrainte de cisaillement non nulle ? Exprimer le couple appliqué  $M$  en fonction de cette contrainte de cisaillement. On peut montrer que  $\tau_{12}(R) = \frac{M}{2\pi R^3} (3 + \frac{\dot{\gamma}_R}{M} \frac{dM}{d\dot{\gamma}_R})$ , avec  $\dot{\gamma}_R = \frac{\Omega R}{h}$  et où  $\tau_{12}(R)$  est la contrainte de cisaillement non nulle, calculée en  $r = R$ . Proposer une méthode de mesure de la viscosité de cisaillement en fonction de  $\dot{\gamma}_R$ .
- Quels sont les avantages et les inconvénients de ce type de géométrie ?

# Master M1 STS/MEI - Mécanique - Année 2006-2007

UE –MEC408I "Rhéologie des Matériaux complexes et du vivant" - Viscoélasticité

2 mai 2007 (10h–11h30) – TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS

## I. RÉGIME OSCILLATOIRE – MODÈLE DE MAXWELL À DEUX MODES

On considère la fonction relaxation  $G(t)$  du modèle de Maxwell à deux modes :  $G(t) = G_1 e^{-t/\lambda_1} + G_2 e^{-t/\lambda_2}$ .

1. En déduire le module complexe  $G^*(\omega)$ .
2. Tracer qualitativement en échelle log–log les modules  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$  en prenant  $G_1 = 10^6 Pa$ ,  $G_2 = 10^9 Pa$ ,  $\lambda_1 = 10^2 s$ ,  $\lambda_2 = 10^{-3} s$ .
3. Identifier les différentes zones de comportement (Newtonien, etc.). Quelle est la valeur du module de plateau caoutchoutique ? Que vaut le temps de relaxation ou temps caractéristique ?
4. Pour quelle valeur de  $\omega$  est-on dans le régime du solide élastique ?
5. Ce modèle vous paraît-il réaliste ? Peut-on l'améliorer ?

## II. CISAILLEMENT TRANSITOIRE POUR LE MODÈLE DE PHAN–THIEN ET TANNER (1977)

Le comportement d'un fluide non-Newtonien est donné par l'équation de Phan–Thien et Tanner suivante pour la contrainte supplémentaire  $\underline{\underline{\tau}}$  telle que  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ .

$$\lambda \frac{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} + \exp\left(\frac{\epsilon \text{tr}(\underline{\underline{\tau}})}{G}\right) \underline{\underline{\tau}} = 2 \eta \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

avec les notations habituelles :  $\frac{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{1}{2} \frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}}$  (cas  $a = \frac{1}{2}$ ), et les dérivées objectives suivantes :

$$\frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \dot{\underline{\underline{\tau}}} - \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\tau}})^T, \quad \frac{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = \dot{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\tau}} + (\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\tau}})^T \underline{\underline{\tau}}$$

et  $\dot{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\tau}}$ ,  $\eta = G\lambda$  est la viscosité,  $\lambda$  le temps de relaxation et  $G$  le module de cisaillement.

1. Quelle est l'unité du paramètre  $\epsilon$  ? Comment appelle-t-on ce type de loi de comportement ?
2. Dans quel cas limite retrouve-t-on le modèle de Maxwell ?
3. On considère le cas de l'écoulement de cisaillement homogène transitoire ( $\dot{\gamma} = cst$ ) avec les conditions initiales suivantes  $\tau_{11}(0) = \tau_{22}(0) = \tau_{33}(0) = \tau_{12}(0) = 0$ . Ecrire le système d'équations à résoudre pour les contraintes. On suppose que l'on peut faire l'approximation  $\exp(x) \approx 1 + x$  ( $x$  est petit).
4. Montrer que l'on peut calculer analytiquement  $X = \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$  exactement et prouver que  $X(t) = 0$ .
5. En déduire que  $\tau_{33}(t) = 0$ .
6. Montrer que le système se réduit alors à deux équations pour  $\tau_{11}$  et  $\tau_{12}$ . Après avoir exprimé  $\tau_{11}$  en fonction de  $\tau_{12}$ , montrer que  $\tau_{12}$  est solution de l'équation :  $\lambda^2 \ddot{\tau}_{12} + 2\lambda \dot{\tau}_{12} + (1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2) \tau_{12} = \eta \dot{\gamma}$ .
7. La solution est la somme de la solution en régime permanent et des deux solutions de l'équation sans second membre (SSM). Chercher les solutions de l'équation (SSM) sous forme d'exponentielles du temps  $t$  et montrer alors que :  $\tau_{12}(t) = \frac{\eta \dot{\gamma}}{1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2} + A e^{-t/\lambda} (\cos(\dot{\gamma}t) + B \sin(\dot{\gamma}t))$ .
8. On peut montrer que les conditions initiales imposent  $A = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2}$  et  $B = -\lambda \dot{\gamma}$ . Tracer les courbes de  $\tau_{12}(t)$  en fonction du temps pour différents taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Que pensez-vous du résultat ? Est-ce que la réponse est meilleure que pour le modèle de Maxwell ?
9. Que vaut la viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$  ? Est-ce acceptable pour des polymères fondus ?

## III. LE SANG – PROPRIÉTÉS ET MODÈLES

1. Quels sont les constituants du sang ? Quelle est la taille du globule rouge ? Qu'est ce que l'hématocrite  $H$  ?
2. Tracer qualitativement les courbes  $\eta(\dot{\gamma})$  (échelle log–log) du sang en fonction de  $H$  pour  $0 < H < 0.9$ .
3. Comment obtient-on la contrainte seuil à partir de ces courbes ? Comment varie-t-elle en fonction de  $H$  ?
4. Quels modèles connaissez-vous pour décrire un tel comportement ?

### I. BIOLOGIE CELLULAIRE (6 POINTS)

1. Décrivez les différentes étapes qui conduisent à l'expression d'une protéine à la surface d'une cellule à partir de l'information génétique ?
2. Comment cette expression peut-elle être régulée ?
3. Citer quelques protéines impliquées dans l'interaction des leucocytes avec les cellules endothéliales.

### II. RHÉOMÉTRIE ÉLONGATIONNELLE (4 POINTS)

Un échantillon est étiré entre deux rouleaux (rayon  $R$ ) tournant à la vitesse angulaire  $\Omega(t)$ . L'échantillon s'enroule autour des rouleaux au fur et à mesure de l'expérience. On mesure le couple  $M(t)$  appliqué sur chaque rouleau.

1. Sachant que les longueur et section initiales de l'échantillon sont respectivement  $L_0$  et  $s_0$ , calculer la longueur  $L(t)$  et la section  $s(t)$  au cours du temps. Montrer que  $s(t)$  décroît exponentiellement  $s(t) = s_0 \exp(-at)$ . Trouver  $a$ .
2. Peut-on utiliser ce système pour réaliser une expérience d'élongation uniaxiale à taux  $\dot{\epsilon}$  constant ?
3. Expliquer comment on peut mesurer la viscosité élongationnelle.

### III. VISCOSITÉ ET CONTRAINTES NORMALES (10 POINTS)

Le comportement en écoulement du PolyÉthylène Haute Densité (HDPE) est présenté en Figure 1. La viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  et  $\psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\dot{\gamma}^2}$  ont été réduits en utilisant le principe de superposition temps-température.

1. Expliquer comment la réduction des courbes a été obtenue.
2. On se propose d'utiliser le modèle de Carreau-Yasuda pour expliquer les variations de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$ . C'est la forme suivante :  $\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + \lambda^a |4II_D|^{\frac{a}{2}})^{\frac{1-n}{a}}}$ . Donner une signification physique à chacun des paramètres du modèle et déterminer graphiquement une valeur approchée de chaque paramètre en précisant les unités.
3. En utilisant une loi de fluide visqueux, peut-on prédire le comportement de  $\psi_1$  ?
4. Pour expliquer le comportement du polyéthylène, on préfère utiliser le modèle de Maxwell :  $\lambda \overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{D}}$ .  $\eta = G\lambda$  est la viscosité,  $\lambda$  le temps de relaxation et  $G$  le module de cisaillement.  $\underline{\underline{\tau}}$  est la contrainte supplémentaire telle que  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}}$  étant le tenseur des contraintes.  $\overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{1}{2} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \frac{1}{2} \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}}$ , et les dérivées objectives suivantes définies en cours sont :  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} - \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})^T$ ,  $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} + (\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})^T \underline{\underline{\tau}}$ , où  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}}$ . Calculer les fonctions viscosimétriques  $\eta(\dot{\gamma})$  et  $\psi_1(\dot{\gamma})$  pour ce modèle
5. Ces prédictions sont-elles réalistes ? Comparer les à celles de la Figure 1.

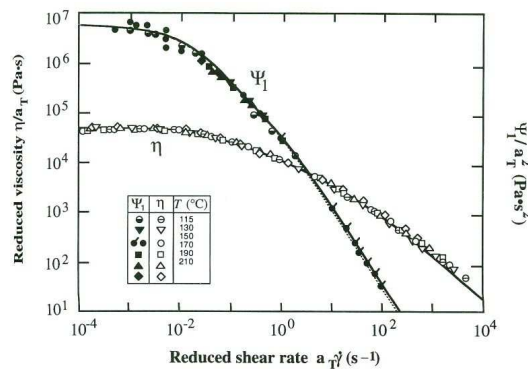


FIG. 1: Courbes maîtresses de la viscosité réduite  $\eta$  et du coefficient réduit de différence des contraintes normales  $\psi_1$

I. BIOLOGIE CELLULAIRE (6 POINTS)

- Précisez les différents composants de la cellule eucaryote et leurs fonctions.
- Quel lien y a-t-il entre les constituants de la cellule et ses propriétés microrhéologiques ?

II. MODÈLES VISCOÉLASTIQUES (5 POINTS)

On considère le modèle explicite suivant  $\underline{\underline{\tau}} = 2\eta\underline{\underline{D}} - \psi_1 \overset{\nabla}{\underline{\underline{D}}} + 4\psi_2 \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}$ , où l'on a introduit la dérivée convectée supérieure portant sur  $\underline{\underline{D}}$ , donnée par  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{D}}} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}})^T$ .

- Calculer la viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  et la viscosité élongationnelle  $\eta_E(\dot{\epsilon})$  pour ce modèle (essai homogène).
- Que pensez-vous de ces résultats ? Sont-ils en accord avec les propriétés classiques obtenues pour des polymères fondus ?

III. VISCOSITÉ TRANSITOIRE (9 POINTS)

La viscosité transitoire d'un fluide complexe est représentée en Fig.1, à différents taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  constants.

1. Pourquoi les courbes obtenues à  $\dot{\gamma} = 0.0214s^{-1}$  et  $0.054s^{-1}$  sont-elles confondues ?
2. Tracer la courbe de viscosité en régime permanent. Comment appelle-t-on le comportement de ce fluide ?
3. Qu'observe-t-on aux temps courts ? En déduire la valeur du module de cisaillement  $G$ .
4. Proposer une méthode pour calculer le temps de relaxation  $\lambda$  de ce fluide. Quelle valeur trouvez-vous ?
5. On se propose d'utiliser le modèle de Maxwell  $\lambda\dot{\tau} + \tau = \eta\dot{\gamma}$  pour prédire ce comportement. Calculer la viscosité transitoire. Tracer les résultats du modèle sur la même courbe en utilisant les valeurs trouvées ci-dessus pour  $G$  et  $\lambda$ . Conclusions. Comment peut-on améliorer ce modèle pour prédire les effets élastiques ?
6. Est-il possible de réaliser une telle expérience dans un rhéomètre de cisaillement cône-plan ? Quelle condition doit-on vérifier pour réaliser des essais à taux de cisaillement constant ?

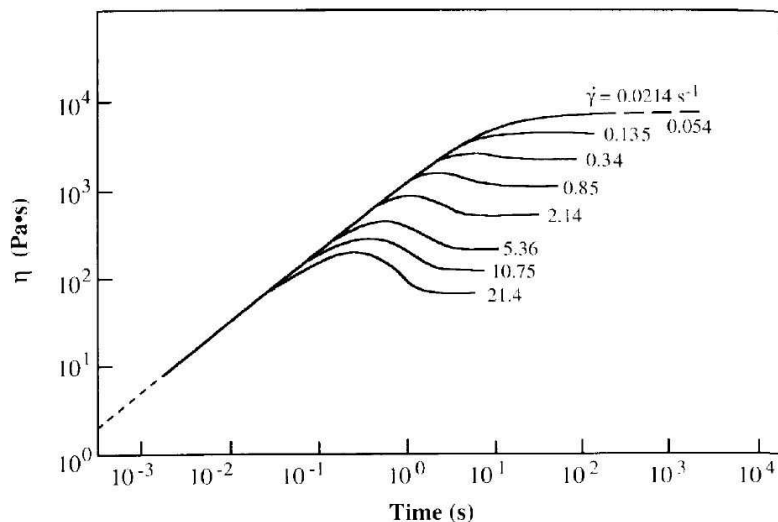


FIG. 1: Viscosités transitoires obtenues au cours d'essais à taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  constant.

I. BIOLOGIE CELLULAIRE (5 POINTS)

1. Quels sont les principaux composants qui permettent à une cellule de se déformer et se déplacer?
2. Citer au moins deux processus physiologiques où intervient la migration des cellules.

II. LOIS DE COMPORTEMENT (8 POINTS)

Le modèle suivant est utilisé en viscoélasticité. C'est une généralisation du fluide du 2<sup>nd</sup> ordre (Reiner-Rivlin). Il est explicite pour le tenseur supplémentaire des contraintes  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{D}} - \psi_1^0 \overset{\nabla}{\underline{\underline{D}}} + 4\psi_2^0 \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}} \quad (1)$$

où  $\eta$ ,  $\psi_1^0$  et  $\psi_2^0$  sont des constantes. On rappelle la définition de la dérivée convective supérieure d'un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  :

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{\dot{A}}} - \underline{\underline{grad\vec{v}}} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{grad\vec{v}}})^T$$

1. Calculer les fonctions viscosimétriques  $\eta(\dot{\gamma})$ ,  $\psi_1(\dot{\gamma})$  et  $\psi_2(\dot{\gamma})$  en cisaillement simple homogène.
2. Calculer la viscosité élongationnelle  $\eta_E(\dot{\epsilon})$  en élongation uniaxiale homogène.
3. Ce modèle prédit-il le comportement d'un polymère fondu ? Peut-on l'améliorer ?

III. ESSAIS DE CISAILLEMENT OSCILLATOIRE (7 POINTS)

On considère un essai en oscillation à la fréquence  $\omega$  qui permet de caractériser les modules viscoélastiques  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ . La FIG. 1 donne l'allure des courbes obtenues si le modèle possède deux temps de relaxation ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) associés respectivement aux modules ( $G_1, G_2$ ).

1. Trouver l'expression de  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ .
2. Déterminer les paramètres du modèle en utilisant la FIG. 1.
3. Quelles sont les pentes limites de  $G'$  et  $G''$  aux faibles fréquences ? Trouver le temps caractéristique du matériau.
4. Comment appelle-t-on la zone de fréquences  $[10^{-1}-10^1 \text{ rad/s}]$  ? Donner la valeur du module de plateau.
5. Comment appelle-t-on la zone aux grandes fréquences ?

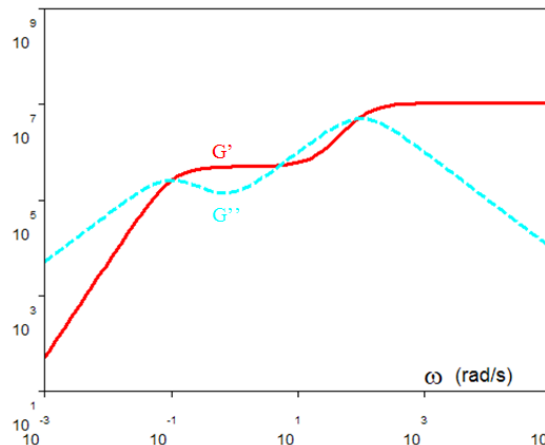


FIG. 1: Modules élastique  $G'$  (—) et visqueux  $G''$  (- -).

### I. RHÉOMÉTRIE (5 POINTS)

1. Rappeler les formules du rhéomètre de Couette et du cône-plan. Peut-on mesurer  $\eta$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  dans les deux cas ?
2. On dispose de géométries cône-plan et plan-plan pour caractériser un matériau viscoélastique. Quelles sont les caractéristiques importantes pour utiliser l’une plutôt que l’autre ?

### II. CISAILLEMENT OSCILLATOIRE (8 POINTS)

On considère un essai en oscillation à la fréquence angulaire  $\omega = 2\pi f$  ( $f$  est la fréquence) qui permet de caractériser les modules viscoélastiques  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$  d’une cellule vivante (microrhéologie). On se propose de prédire ce comportement à l’aide du modèle suivant où le module complexe est  $G^*(\omega) = G_0(1 + i\eta)(\frac{\omega}{\omega_0})^\alpha + i\omega\mu$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

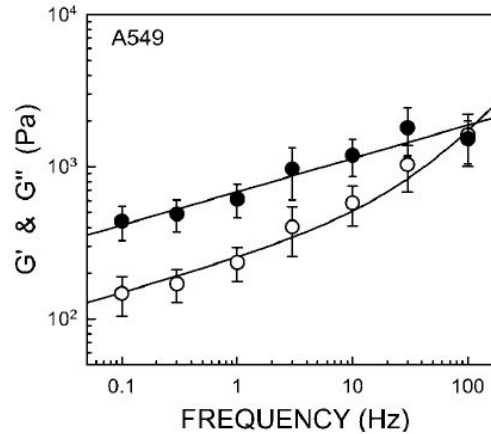


FIG. 1: Modules élastique  $G'$  (●) et visqueux  $G''$  (○) obtenus en microrhéologie pour une cellule épithéliale alvéolaire A549.

1. Préciser le sens et l’unité des différents paramètres de cette formule donnant  $G^*$ .
2. Calculer  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ .
3. Ce modèle prédit-il un comportement Newtonien aux basses fréquences ? Si oui, préciser la valeur de la viscosité. Si non, de quel comportement peut-il s’agir ?
4. Dépendance de  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$  en fonction de  $\omega$  aux grandes fréquences ? Est-ce en accord avec les résultats ?
5. Déterminer les valeurs du modèle  $G_0$ ,  $\eta$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  et  $\mu$ , en utilisant le graphique.

### III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)

Le modèle de Maxwell corotationnel est utilisé en viscoélasticité. Il donne les contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ , où  $\underline{\underline{\tau}}$  le tenseur supplémentaire des contraintes est solution de l’équation :

$$\lambda(\dot{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\tau}}) + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (1)$$

$\underline{\underline{\Omega}}$ , la partie antisymétrique du gradient des vitesses, est donnée par  $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}} - \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}^T)$ .

1. En cisaillement permanent homogène, calculer les fonctions viscosimétriques  $\eta(\dot{\gamma})$ ,  $\psi_1(\dot{\gamma})$  et  $\psi_2(\dot{\gamma})$ .
2. Calculer la viscosité élongationnelle  $\eta_E(\dot{\epsilon})$  en élongation uniaxiale homogène.
3. Les comportements obtenus sont-ils compatibles avec ceux des polymères fondus ?

I. BIOLOGIE (6 POINTS)

1. La migration cellulaire: définition, et mécanismes.
2. Citer des exemples de phénomènes biologiques mettant en jeu ces mécanismes de migration cellulaire.
3. Quelles sont les principales molécules impliquées?
4. Comment une cellule peut-elle exercer une force sur son substrat?
5. Comment peut-on mesurer ces forces?

II. RHÉOLOGIE (7 POINTS)

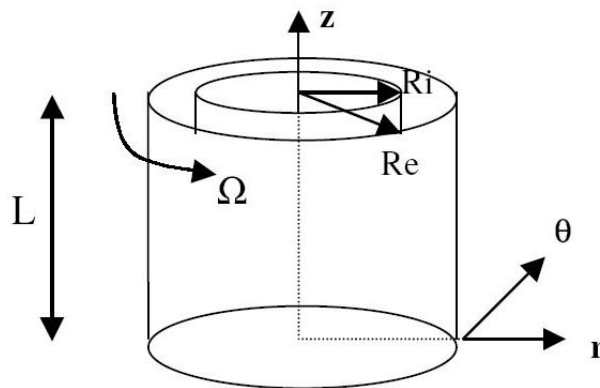


FIG. 1: Rhéomètre de Couette

On considère le rhéomètre de Couette où le fluide à tester est placé dans l’entrefer entre les rayons  $R_i$  et  $R_e$ . La hauteur des cylindres ( $L$ ) est très grande par rapport à l’entrefer. La vitesse angulaire du cylindre extérieur est  $\Omega$  (rad/s), le cylindre intérieur étant fixe. Le couple mesuré sur le cylindre extérieur est  $M$ . On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

1. Calculer le taux de cisaillement théorique  $\dot{\gamma}$  en fonction des composantes du champ de vitesse.
2. Montrer, en utilisant le principe de conservation de la quantité de mouvement, que la contrainte de cisaillement  $\tau_{r\theta}$  prend une forme particulière. Trouver  $\tau_{r\theta}$  en fonction du couple appliqué  $M$ , de  $r$  et de  $L$ .
3. Dans le cas d’un fluide Newtonien (viscosité  $\eta_0$ ), utiliser la loi de comportement pour relier  $\tau_{r\theta}$  et  $v_\theta(r)$ . Montrer, par intégration, que  $v_\theta(r) = A/r + Br$ .
4. Déterminer les constantes  $A$  et  $B$  en utilisant les conditions de non-glissement à la paroi. En déduire une relation entre  $\Omega$  et  $M$  ainsi qu’une méthode graphique de mesure de la viscosité du fluide  $\eta_0$ .
5. Que devient l’expression de  $v_\theta(r)$  lorsque l’entrefer est petit devant  $R_i$ ? Que peut-on alors dire de  $\dot{\gamma}$ ?
6. Comment doit-on modifier les réponses aux questions précédentes si le fluide est non-newtonien?

III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)

On souhaite réaliser un essai de traction biaxiale sur une paroi artérielle orientée dans une direction totalement aléatoire. L’artère est considérée incompressible. Comme le montre la figure suivante, la paroi artérielle peut être considérée comme un matériau possédant deux types de fibres orientées dans deux directions différentes. On notera  $\alpha$  l’angle entre les fibres d’orientation  $\vec{a}_1^0$  et l’horizontale, et  $\theta$  l’angle entre les fibres d’orientation  $\vec{a}_2^0$  et l’horizontale.



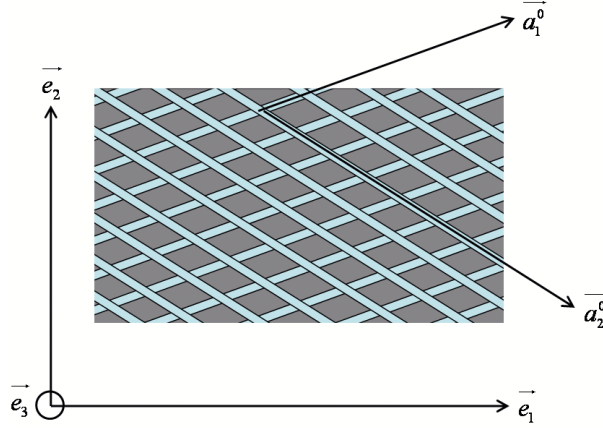


FIG. 2: paroi arterielle

Pour la modélisation du comportement, on choisit de ne pas utiliser les invariants  $I_2$  et  $I_5$ . En revanche, on décide d'utiliser un nouvel invariant :

$$I_7 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{C} \cdot \vec{a}_2^0 \quad (1)$$

1. Montrer que :

$$\frac{\partial I_7}{\partial \vec{C}} = \vec{a}_1^0 \otimes \vec{a}_2^0 \quad (2)$$

2. En déduire l'expression des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 pour un matériau caractérisé par une énergie de déformation du type :  $W(I_1, I_4^{(1)}, I_4^{(2)}, I_7)$ . On rappelle que

$$\vec{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \vec{C}} \quad (3)$$

et

$$\frac{\partial I_4}{\partial \vec{C}} = \vec{a}^0 \otimes \vec{a}^0 \quad (4)$$

En déduire les contraintes de Cauchy.

3. L'essai réalisé consiste donc à imposer des élongations différentes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans les deux directions du plan.

- Ecrire le gradient de la transformation de cet essai.
- A la vue des hypothèses expérimentales, quelle est la forme du tenseur des contraintes (on justifiera la réponse) ?
- Ecrire les expressions littérales de chacune des composantes du tenseur des contraintes pour un potentiel hyperélastique de la forme  $W(I_1, I_4^{(1)}, I_4^{(2)}, I_7)$ .
- Pour être admissible, le potentiel choisi doit assurer que le tenseur des contraintes soit nul pour une déformation nulle. Quelles conditions en déduisez-vous sur les dérivées de l'énergie de déformation ?
- On propose d'utiliser un potentiel de la forme :

$$W = C_1(I_1 - 3) + K_1(I_4^{(1)} - 1)^2 + K_2(I_4^{(2)} - 1)^2 + K_{12}I_7 \quad (5)$$

Que pensez-vous de ce choix ?

4. On se place maintenant dans les axes de symétries de l'artère, i.e.  $\alpha = -\theta$ . Réécrire les expressions simplifiées des contraintes

5. A la vue de ces équations, que représente physiquement l'invariant  $I_7$  ?

**I. BIOLOGIE (6 POINTS)**

- 1) Citer les principaux constituants d’une cellule eucaryote.
- 2) Que connaissez-vous de la GFP ? Citer des exemples d’utilisation de la GFP.
- 3) Comment une cellule eucaryote régule-t-elle l’expression de ses gènes ?
- 4) Quels sont les évènements conduisant une cellule à devenir cancéreuse ?

**II. RHÉOLOGIE (7 POINTS)**

La caractérisation en rhéométrie de cisaillement simple donne les résultats suivants (FIG. 1)

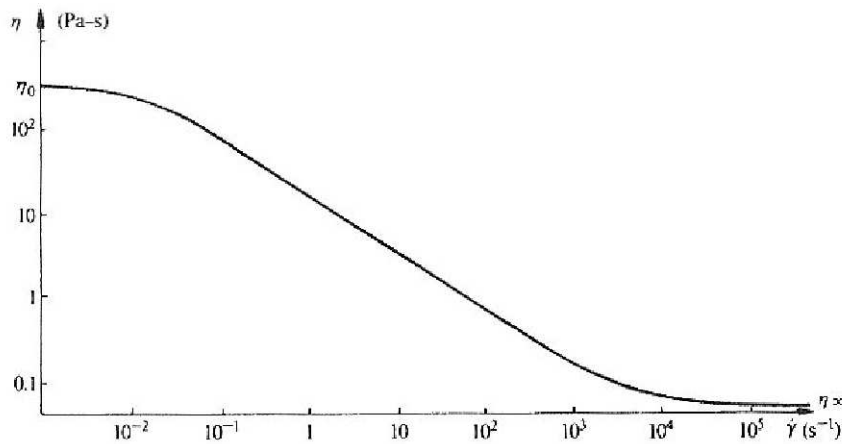


FIG. 1: Viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  d’un fluide non-Newtonien

- 1) Définir les grandeurs  $\eta$  et  $\dot{\gamma}$  qui figurent sur les axes. Que peut-on dire de ce comportement ?
- 2) Comment peut-on obtenir de tels résultats en rhéométrie ?
- 3) Quelle loi de comportement proposez-vous pour décrire le comportement de ce fluide ?
- 4) On décide d’utiliser le modèle de Carreau-Yasuda

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + \lambda^a |4 II_D|^{\frac{a}{2}})^{\frac{1-n}{a}}} \quad (1)$$

où  $II_D$  est le second invariant de  $D$  (partie symétrique du tenseur gradient de vitesse),  $\lambda$  un temps,  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$  deux viscosités,  $a$  et  $n$  des paramètres. Que vaut  $\eta(\dot{\gamma})$  en cisaillement simple permanent ?

- 5) Quels sont les valeurs des paramètres que l’on peut déterminer à partir de la FIG. 1 ? Donner des valeurs approchées de  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $n$ .
- 6) Quel type de fluide pourrait posséder de telles propriétés ?

**III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)**

Exercice 1 : On vous propose d’étudier le tissu suivant (FIG. 2). Il est composé d’une matrice et de trois familles de fibres. Un premier type de fibre est orienté dans la direction verticale  $a_1$ . Un deuxième type de fibre est orienté selon deux directions  $a_2$  et  $a_3$  (ces directions font un angle  $\phi$  et  $-\phi$  par rapport à l’horizontale).

- 1) Définir les invariants et les tenseurs d’anisotropie dont vous avez besoin pour traiter le problème.

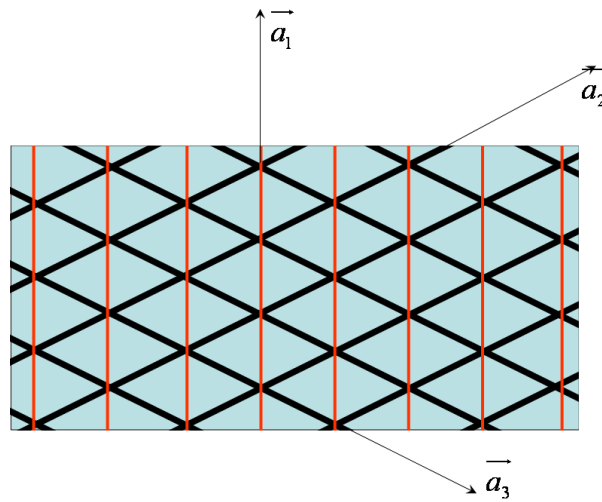


FIG. 2: Schéma d'un tissu vivant

2) On supposera que la matrice dans laquelle sont maintenues les fibres a un comportement néo-hookéen et que toutes les fibres suivent une loi de Holzapfel. Quelle est la forme de l'énergie de déformation complète du matériau ?

Exercice 2 : On pratique un essai equibiaxial (FIG. 3) sur un tissu où les fibres sont orientées dans les deux directions principales. Le matériau est supposé incompressible.

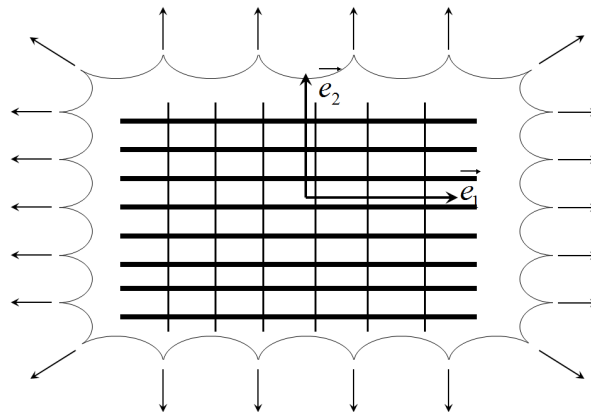


FIG. 3: Essai equibiaxial sur un tissu fibreux

3) Ecrire la forme du tenseur des contraintes de Cauchy et du gradient de la transformation.

4) Développer au maximum les calculs pour obtenir les relations contraintes-élongations dans les deux directions de traction, sachant que le matériau peut être représenté par le potentiel suivant :

$$W = C_1(I_1 - 3) + K_1(I_4^{(1)} - 1)^2 + 4K_1(I_4^{(2)} - 1)^2 \quad (2)$$

où  $I_4^{(1)}$  et  $I_4^{(2)}$  sont les invariants anisotropes dans les directions 1 et 2. Lorsque vous ne pourrez plus développer les calculs, vous expliquerez comment vous feriez pour résoudre le problème.

I. BIOLOGIE (6 POINTS)

Les cellules réagissent à leur environnement:

- Citer deux cas où les cellules sont soumises à des contraintes mécaniques.
- Quelles sont les principales protéines de la matrice extracellulaire qui sont importantes pour les interactions avec les cellules?
- Par quel moyen la cellule interagit-elle avec ces protéines de la matrice?
- Comment étudier en microscopie de fluorescence la localisation d'une protéine dans une cellule vivante?
- Quels sont les composants de la cellule impliqués dans l'architecture cellulaire et la transmission des forces?
- Comment peut-on mesurer les forces exercées par les cellules sur leur environnement?

II. RHÉOLOGIE (7 POINTS)

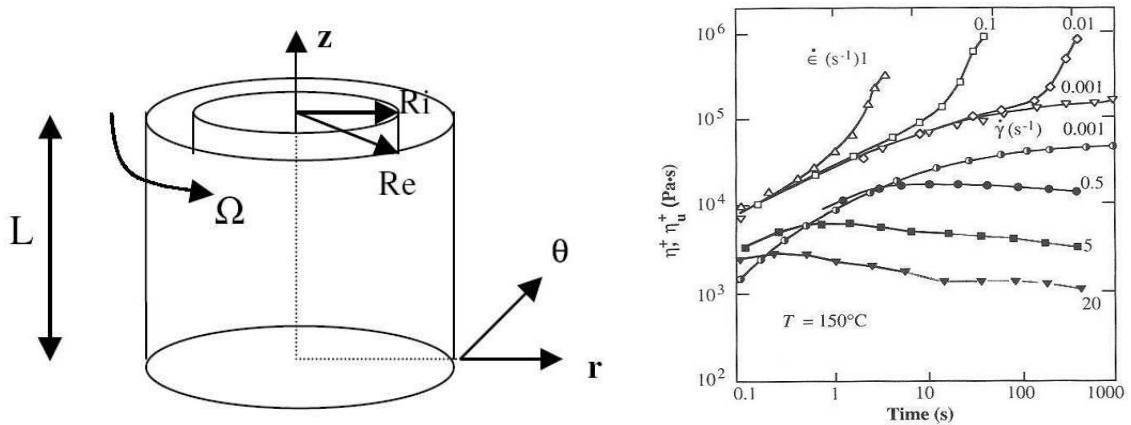


FIG. 1: a. Rhéomètre de Couette et coordonnées cylindriques. b. Viscosités de cisaillement et élongationnelle en régime transitoire ( $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\epsilon}$  sont fixés). Polyéthylène (PE) à 150°C.

**A. Rhéométrie** – Le Rhéomètre de Couette est représenté en FIG 1a. Il est constitué de deux cylindres concentriques de rayons  $R_i$  (intérieur) et  $R_e$  (extérieur); le cylindre extérieur est mobile tournant à la vitesse  $\Omega$ , soumis à un couple  $C$  connu, tandis que le cylindre intérieur est fixe. On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

1. En supposant que l'écoulement du fluide incompressible est axisymétrique et indépendant de  $z$  ( $L$  grand devant les autres dimensions), et en supposant que la seule composante non nulle est  $v_\theta(r)$ , calculer le gradient de cisaillement  $\dot{\gamma}$  sous forme analytique en fonction de  $v_\theta$  et ses dérivées. Ecrire  $\dot{\gamma}$  sous forme réduite. On supposera dans la suite que  $\dot{\gamma} > 0$ .

2. Vérifier la loi de conservation de la masse.

3. Le tenseur des contraintes s'écrit :  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$ . Ecrire les équations d'équilibre (coordonnées cylindriques) en régime permanent. Montrer que deux d'entre elles donnent la pression  $p(r, z)$  si l'on connaît  $v_\theta(r)$  et la loi de comportement, et que la dernière donne une équation pour  $\tau_{r\theta}$ . Intégrer cette équation et montrer que  $\tau_{r\theta} = K/r^2$ , quelle que soit la loi de comportement choisie. Calculer  $K$ .

4. *Cas du fluide Newtonien* : Montrer que  $v_\theta(r) = A/r + B$ . Ecrire les conditions aux limites pour trouver  $A$  et  $B$ .

5. *Fluide en loi puissance* :  $\underline{\underline{\tau}} = 2m |4II_D|^{\frac{n-1}{2}} \underline{\underline{D}}$ . Exprimer  $\tau_{r\theta}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ . En déduire  $\dot{\gamma}$  en fonction de  $r$ . Puis intégrer et calculer  $v_\theta(r)$ , que vous tracerez en fonction de  $r$ . Vérifier que l'on retrouve le cas du fluide newtonien.

**B. Viscosité de cisaillement et élongationnelle** – La FIG 1b montre les résultats de la viscosité de cisaillement et  $\eta^+(t, \dot{\gamma})$  (pour  $\dot{\gamma} = 0.001 s^{-1}, 0.5 s^{-1}, 5 s^{-1}, 20 s^{-1}$ ) et la viscosité élongationnelle uniaxiale  $\eta_u^+(t, \dot{\epsilon})$  ( $\dot{\epsilon} = 0.001 s^{-1}, 0.01 s^{-1}, 0.1 s^{-1}, 1 s^{-1}$ ) en échelle log–log.

6. *Régimes transitoires* – Pourquoi la viscosité de cisaillement présente-t-elle un maximum dans certains cas ? La viscosité élongationnelle aux temps longs est-elle toujours définie ?

7. *Régimes permanents* – Comparer  $\eta^+(\dot{\gamma} = 0.001 s^{-1})$  et  $\eta_u^+(\dot{\epsilon} = 0.001 s^{-1})$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Conclusion ?

### III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)

On souhaite utiliser un nouveau dispositif expérimental composé de différents bras articulés permettant de réaliser des essais biaxiaux où le déplacement est double dans une direction par rapport à l'autre. Pour cela, nous devons écrire les équations théoriques qui permettront d'analyser ces essais. Le schéma de principe de l'essai est présenté sur la figure ci-dessous. Le tissu est fixé à l'aide de crochets qui provoquent des effets de bords importants, on se limitera

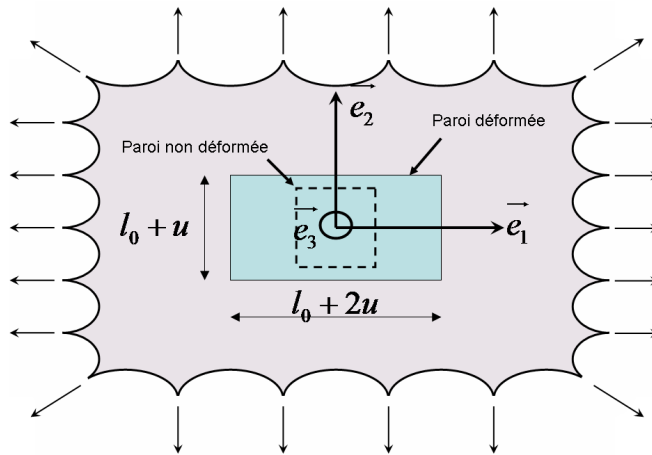


FIG. 2: Traction biaxiale

donc à l'étude de la partie centrale de l'éprouvette dont la déformation est supposée parfaitement homogène. La paroi non déformée est un carré de côté  $l_0$  et d'épaisseur  $e_0$ . La surface déformée est un rectangle de côtés  $l_0 + 2u$  et  $l_0 + u$  (où  $u$  est le déplacement imposé dans la direction 2 et  $2u$  dans la direction 1). On pose  $\alpha = u/l_0$ . La direction 3 est donc laissée libre.

Un tissu du vivant très fibreux est étudié par cette méthode. On supposera que ce matériau est parfaitement incompressible.

Remarque : on gardera toujours les expressions mathématiques les plus factorisées possibles, on ne développera les expressions que lorsque cela s'avèrera vraiment nécessaire.

#### Première partie

Dans une première partie, on fera l'hypothèse que le matériau possède un comportement parfaitement isotrope, de plus on supposera que l'on peut utiliser une loi de comportement hyperélastique ne dépendant que du premier invariant.

- 1) Ecrire le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche en fonction de  $\alpha$  pour la partie centrale de l'éprouvette. En déduire la valeur des deux premiers invariants (on ne développera pas les expressions écrites en fonction de  $\alpha$ ).
- 2) Ecrire les contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchoff I dans les directions 1 et 2 en fonction de  $\alpha$  et  $\partial W/\partial I_1$ . On appliquera ensuite au modèle néo-hookéen.
- 3) Pour les très grandes déformations, i.e. les grandes valeurs de  $\alpha$ , quelle relation (équivalente) simple y a-t-il entre les contraintes dans les deux directions ?

## Deuxième partie

Le rapport des contraintes obtenu dans la question précédente est constant alors que les essais ont montré que ce rapport évoluait fortement avec la déformation. On décide donc d'utiliser une approche hyperélastique anisotrope.

Le matériau peut être considéré comme renforcé par trois directions de fibres, comme illustré sur la figure suivante. En fait les fibres des directions 2 et 3 ont les mêmes propriétés mécaniques alors que les fibres dans la direction 1

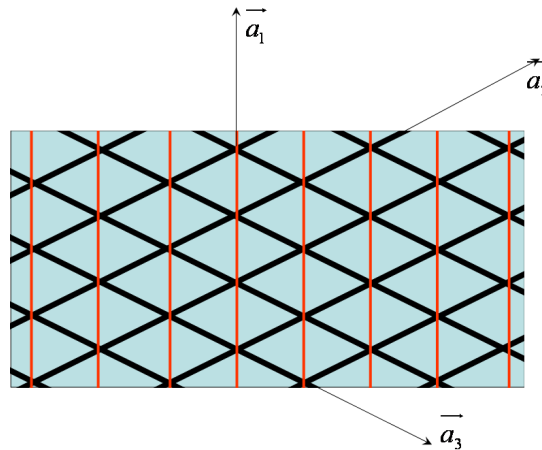


FIG. 3: Structure fibreuse du tissu du vivant

sont beaucoup plus raides. Les fibres des directions 2 et 3 peuvent être considérées comme ayant une énergie de déformation de la forme  $K(I_4 - 1)^2$  alors que celles de la direction 1 ont une forme  $K'(I_4 - 1)^4$ .

- 4) Définissez les invariants et les tenseurs d'anisotropie dont vous avez besoin pour traiter le problème.
- 5) On supposera que la matrice dans laquelle sont maintenues les fibres a un comportement néo-hookéen, quelle est la forme de l'énergie de déformation complète du matériau ?
- 6) Calculer les contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchoof I dans les deux directions de sollicitations.
- 7) Pour les très grandes déformations, i.e. les grandes valeurs de  $\alpha$ , quelle relation (équivalente) simple y a-t-il entre les contraintes dans les deux directions ?

### I. BIOLOGIE (6 POINTS)

- 1) Quelles sont les différences entre une cellule de type bactérie et une cellule de mammifère?
- 2) Quels sont les constituants principaux d'une cellule eucaryote?
- 3) Comment une cellule réagit-elle à son environnement?

### II. RHÉOLOGIE (7 POINTS)

On considère un essai de cisaillement oscillatoire à la fréquence  $\omega$ , qui permet de caractériser les modules viscoélastiques  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ . La figure 1 donne l'allure des courbes obtenues si le modèle possède deux temps de relaxation ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) associés respectivement aux modules ( $G_1, G_2$ ).

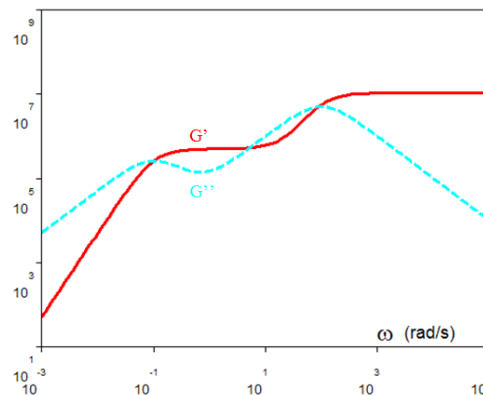


FIG. 1: Modules élastique  $G'$  (—) et visqueux  $G''$  (- -).

- 1) Montrer que :  $G'(\omega) = G_1 \frac{\lambda_1^2 \omega^2}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} + G_2 \frac{\lambda_2^2 \omega^2}{1 + \lambda_2^2 \omega^2}$ . Calculer  $G''(\omega)$ . 2) Tracer les 2 modèles séparément sur le schéma. En déduire les valeurs approchées de ( $G_1, G_2, \lambda_1, \lambda_2$ ). 3) Quelles sont les pentes limites de  $G'$  et  $G''$  aux faibles fréquences ? Trouver le temps caractéristique du matériau. 4) Comment appelle-t-on la zone de fréquences [ $10^{-1}$ – $10^1$  rad/s] ainsi que la zone aux grandes fréquences ? 5) Comment obtenir ces données en rhéométrie ?

### III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)

On souhaite étudier un tissu incompressible renforcé par trois familles de fibres, notées 1, 2 et 3. Des échantillons parallélépipédiques sont découpés, de longueur  $l_x, l_y$  et  $l_z$  dans les trois directions principales de l'espace. Les échantillons seront soumis à des tractions biaxiales dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

Une observation microscopique a mesuré les orientations des fibres, qui sont les suivantes pour les 3 familles de fibres :  $\vec{u}_1 = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (\cos \beta, -\sin \beta, 0)$  et  $\vec{u}_3 = (0, 1, 0)$  (où  $\beta$  est une constante). Les familles de fibres 1 et 2 ont des propriétés mécaniques similaires, elle seront représentées par un potentiel quadratique (i.e. partie anisotrope du modèle de Zidi), tandis que les fibres 3 seront représentées par la partie anisotrope du modèle d'Holzappel. La matrice peut être représentée par le modèle de Treloar (néo-hookéen).

- 1) Ecrire l'énergie de déformation du tissu. On veillera à bien préciser les notations utilisées.
- 2) On fait subir au matériau une traction biaxiale avec  $\lambda_y = \lambda_x^2$ . Ecrire le gradient de la transformation correspondant à l'essai.
- 3) Ecrire les valeurs de tous les invariants dont vous avez besoin en fonction de  $\lambda_x$ .
- 4) Ecrire le tenseur des contraintes de Cauchy de l'essai pour la densité d'énergie proposée dans la question 1).
- 5) Expliciter  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

### I. BIOLOGIE (6 POINTS)

1. De quoi est composé un tissu de type épithélial?
2. Comment une cellule peut-elle exercer des forces sur son substrat et quels sont les composants cellulaires importants dans ce mécanisme ?
3. Citer deux fonctions des microtubules dans la cellule.
4. À quoi sert l'ADN ?

### II. RHÉOLOGIE (7 POINTS)

Le rhéomètre de Couette (FIG. 1) est constitué de deux cylindres concentriques de rayons  $R_1$  (intérieur) et  $R_2$  (extérieur). Le cylindre extérieur tourne à vitesse angulaire  $\Omega$  et c'est celui sur lequel on mesure le couple  $M$ . Le cylindre intérieur est fixe. On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le fluide, supposé incompressible, est placé entre  $R_1$  et  $R_2$ . On négligera le poids du fluide.

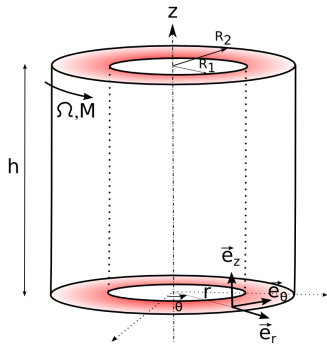


FIG. 1: Rhéomètre de Couette.

1. En supposant que l'écoulement est axisymétrique, indépendant de  $z$ , et que le champ de vitesse est donné par  $\vec{v} = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$ , calculer le gradient de cisaillement  $\dot{\gamma}$  en fonction de  $v_\theta$  et ses dérivées. Montrer que  $\dot{\gamma} = r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right)$ . On supposera dans la suite que  $\dot{\gamma} \geq 0$ .
2. Vérifier la loi de conservation de la masse.
3. Le tenseur des contraintes est  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ , où  $p$  est la pression, et  $\underline{\underline{\tau}} = 2m |4II_D|^{\frac{n-1}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  (loi puissance). Ecrire la conservation de la quantité de mouvement et montrer que deux des équations déterminent la pression  $p(r)$ , si  $v_\theta(r)$  est connu. Intégrer la troisième relation et montrer que  $\tau_{r\theta} = K/r^2$ . Calculer  $K$  en fonction de  $M$ .
4. Pour le fluide Newtonien ( $n = 1$ ,  $m = \eta_0$ ), exprimer  $\tau_{r\theta}$  en fonction de  $v_\theta(r)$  et déduire que  $v_\theta(r) = Ar + B/r$ . Ecrire les conditions aux limites pour trouver A et B.
5. Dans le cas général de la loi puissance, exprimer  $\tau_{r\theta}$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ ,  $m$  et  $n$ . En déduire  $\dot{\gamma}$  en fonction de  $r$ , puis trouver la forme générale de  $v_\theta(r)$ .

6. Du sang (Hématocrite  $H = 45\%$ ) est placé dans l'entrefer du rhéomètre. Quel type de viscosité obtient-on ? Le modèle proposé permet-il de décrire le comportement obtenu ?

### III. LOIS DE COMPORTEMENT (7 POINTS)

Une étude expérimentale est menée sur un tissu biologique. Du fait de sa faible résistance mécanique, on est amené à réaliser des essais de traction plane (ou cisaillement pur). On découpe des échantillons parallélépipédiques de longueur  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$ . L'épaisseur  $l_z$  est faible par rapport aux deux autres dimensions. Les essais de traction plane sont réalisés dans la direction  $\vec{x}$ , on rappelle que lors d'un essai de traction plane, on peut considérer que la largeur de l'éprouvette, i.e.  $l_y$  est constante lors de l'essai.

Des analyses biologiques des tissus ont montré que l'on pouvait considérer que le tissu pouvait être représenté par une matrice renforcée par 3 familles de fibres dont les orientations initiales sont données par les vecteurs suivants :  $\vec{a}_1^{(0)} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ ,  $\vec{a}_2^{(0)} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$  et  $\vec{a}_3^{(0)} = (0, 1, 0)$  (où  $\alpha$  est une constante). Les familles de fibres 1 et 2 ont des propriétés mécaniques similaires, mais différentes de la famille de fibres 3. Les mesures réalisées ont montré que le matériau pouvait être considéré comme incompressible.

- 1) Expliciter le tenseur gradient de la déformation correspondant à l'essai réalisé.
- 2) Quelles sont les directions des fibres à l'état déformé ?
- 3) On considère que la matrice peut être représentée par un modèle de Treloar (ou néo-Hookéen), les fibres 1 et 2 par un modèle de Zidi de paramètre  $K_a$  et les fibres 3 par un modèle de Zidi de paramètre  $K_b$ . Ecrire l'énergie de déformation représentative du matériau, on justifiera la proposition.
- 4) Ecrire les valeurs de tous les invariants dont vous avez besoin pour traiter le problème.
- 5) Ecrire le tenseur des contraintes de Cauchy de l'essai pour la densité d'énergie proposée.
- 6) Expliciter  $\sigma_x$  en fonction de  $\lambda_x$ .
- 7) Question supplémentaire, indépendante de l'exercice.  $\kappa$  est une constante. Calculer :

$$\frac{\partial [I_1 \exp\{\kappa(I_1 - 3) + (1 - \kappa)(I_4 - 1)\}]}{\partial \bar{C}} \quad (1)$$



## I. FLUIDES COMPLEXES (10 POINTS)

### A. Ecoulement sanguin (6 points)

L'écoulement sanguin dans un vaisseau a été caractérisé par son champ de vitesse à différents taux d'hématocrite  $H$  (Figure 1). On se propose de déterminer la viscosité du sang à partir de l'analyse de ce champ.

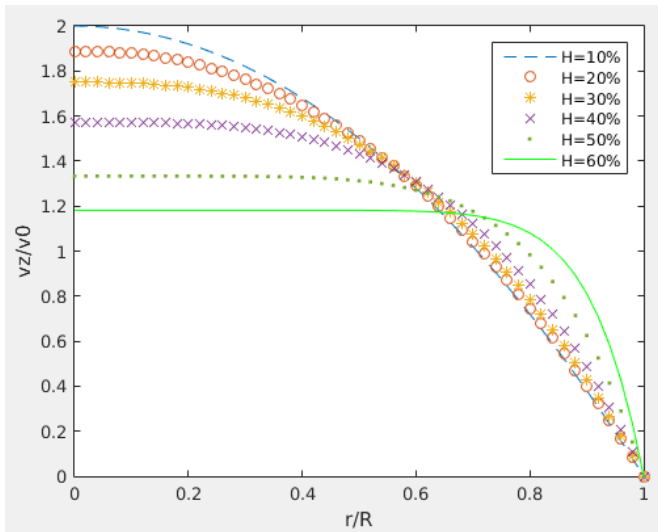


FIG. 1: Champ de vitesse  $v_z(r)/v_0$  en fonction de la distance radiale adimensionnée  $r/R$ .  $R$  est un rayon du vaisseau et  $v_0 = Q/\pi R^2$ . L'hématocrite  $H$  varie de 10% à 60%.

1. La loi de comportement  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\underline{\underline{\eta}}\underline{\underline{\mathbf{D}}} + 4\underline{\underline{\eta}}_2\underline{\underline{\mathbf{D}}}^2$  est utilisée pour décrire l'écoulement. On cherche un modèle simple pour lequel  $\eta_2 = 0$  et  $\underline{\underline{\eta}} = m |4\underline{\underline{I}}_D|^{n-1}$ . Comment s'appelle cette loi ? Que représente  $\underline{\underline{I}}_D$  ? Précisez les unités de  $m$  et  $n$ . Que vaut la viscosité  $\eta$  en cisaillement simple, en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , de  $m$  et de  $n$  ?

2. Lorsque le débit  $Q$  est imposé, quelle forme obtient-on pour le profil de vitesse  $v_z(r)$  en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $n$  et du débit  $Q$  dans le vaisseau ? NB. il n'est pas nécessaire de refaire le calcul. Rappelez les hypothèses qui ont été faites pour faire ce calcul.

3. D'après la courbe de la Figure 1, quelle valeur approchée de  $n$  obtient-on pour  $H = 50\%$  ? Proposez une méthode pour déterminer la valeur de  $m$ .

4. Sur la base de ce que l'on connaît sur le sang, quelle explication physique permet de justifier la forme du profil de vitesse ? On précisera le rôle des globules rouges et de l'hématocrite  $H$  sur la forme du profil de vitesse.

5. Tracez en échelle log-log la courbe de viscosité obtenue avec ce modèle ( $H = 50\%$ ) et comparez là avec celle du cours, obtenue sur un rhéomètre. Le modèle vous paraît-il réaliste ? Pourquoi ? S'il existe des différences, à quels phénomènes peut-on les attribuer ?

### B. Réponse viscoélastique (4 points)

La réponse d'un matériau viscoélastique est donnée en utilisant une loi de Maxwell à deux temps de relaxation ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , en secondes) associés aux modules  $G_1$  et  $G_2$  (Pa).

1. Exprimez le module complexe  $G^* = G' + iG''$  ainsi que les modules  $G'$  et  $G''$  en fonction de ces paramètres et de la fréquence angulaire  $\omega$  de la sollicitation. Tracer la réponse en échelle log-log.

2. Cette réponse est donnée en Figure 2. En utilisant le modèle ci-dessus à deux modes, trouver le meilleur ajustement de cette courbe et donner une valeur approchée des quatre paramètres.

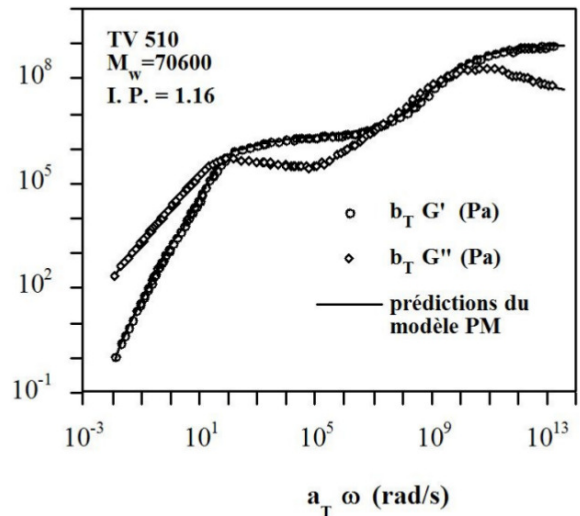


FIG. 2: Réponse du matériau viscoélastique: modules  $G'$  et  $G''$  en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$ .

## II. LOIS DE COMPORTEMENT (10 POINTS)

### A. Mécanique d'un tissu mou (8 points)

On souhaite réaliser un essai de traction biaxiale sur une paroi artérielle orientée dans une direction totale-

ment aléatoire. L'artère est considérée incompressible. Comme le montre la figure suivante, la paroi artérielle peut être considérée comme un matériau possédant deux types de fibres orientées dans deux directions différentes. On notera  $\alpha$  l'angle entre les fibres d'orientation  $\vec{a}_1^0$  et l'horizontale (direction  $\vec{e}_1$ ), et  $\theta$  l'angle entre les fibres d'orientation  $\vec{a}_2^0$  et l'horizontale.

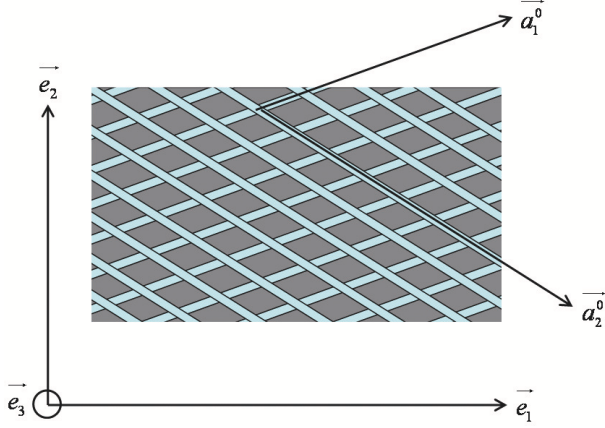


FIG. 3: paroi artérielle

Pour la modélisation du comportement, on choisit de ne pas utiliser les invariants  $I_2$  et  $I_5$ . En revanche, on décide d'utiliser deux nouveaux invariants :

$$I_8 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0) \left( \vec{a}_1^0 \bar{\bar{C}} \vec{a}_2^0 + \vec{a}_2^0 \bar{\bar{C}} \vec{a}_1^0 \right) \quad (1)$$

et

$$I_9 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 \quad (2)$$

1. Montrer que :

$$\frac{\partial I_8}{\partial \bar{\bar{C}}} = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0) (\vec{a}_1^0 \otimes \vec{a}_2^0 + \vec{a}_2^0 \otimes \vec{a}_1^0) \quad (3)$$

et calculer

$$\frac{\partial I_9}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (4)$$

2. En déduire l'expression des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 pour un matériau caractérisé par une énergie de déformation du type :  $W(I_1, I_4^{(1)}, I_4^{(2)}, I_8, I_9)$ . En déduire l'expression des contraintes de Cauchy.

3. On dispose d'une machine permettant d'appliquer une elongation  $\lambda$  dans la direction 1, et  $2\lambda$  dans la direction 2. Ecrire le gradient de la transformation.

4. A la vue des hypothèses expérimentales, quelle est la forme du tenseur des contraintes (on justifiera la réponse)?

5. Ecrire les expressions littérales de chacune des composantes du tenseur des contraintes pour le potentiel hyperélastique suivant :

$$W = C_1(I_1 - 3) + K_1(I_4^{(1)} - 1)^2 + K_2(I_4^{(2)} - 1)^2 + K_3(I_8 - I_9)^2 \quad (5)$$

### B. Calcul tensoriel (2 points)

Calculer

$$\frac{\partial I_2 I_5}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (6)$$

et

$$\frac{\partial I_1 I_8^2}{\partial \bar{\bar{C}}} \quad (7)$$

I. FLUIDES COMPLEXES (10 POINTS)

On se propose de tester un modèle qui pourra décrire les propriétés du mucus, un fluide visqueux constitué de nombreuses protéines, qui recouvre la surface des muqueuses. Pour cela, on réalise les essais expérimentaux suivants (Fig. 1):

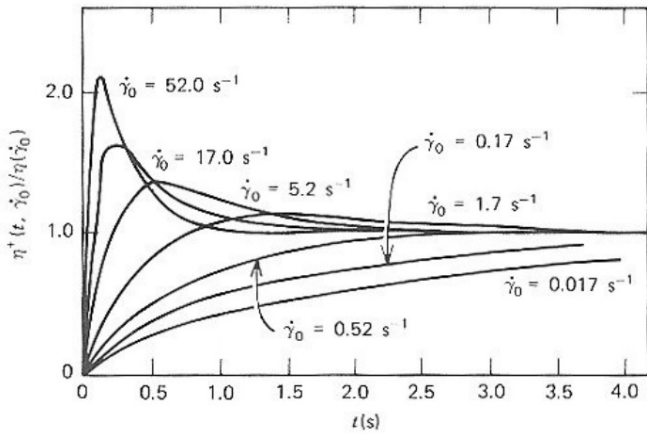


FIG. 1: Viscosité transitoire normalisée  $\eta^*(t, \dot{\gamma}_0)/\eta(\dot{\gamma}_0)$  à différents taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_0$ .

1. Expliquer comment obtenir les courbes de la FIG. 1. Quel rhéomètre faut-il utiliser, sachant que l'on dispose de 1 cm<sup>3</sup> seulement de cet échantillon ?
2. Dans un premier temps, on rappelle la loi de comportement de Maxwell  $\lambda \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \eta_0 \dot{\gamma}$ . Donner la réponse  $\sigma(t)$  lorsque le fluide est soumis à un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_0$  constant. Cette relation décrit-elle les courbes expérimentales de la FIG. 1 ? Dans quels cas la comparaison est-elle bonne ?
3. On décide d'utiliser un modèle non linéaire (dit de Giesekus) pour mieux décrire ce comportement; la contrainte  $\sigma$  obéit maintenant à l'équation suivante, lorsque  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$ . On suppose que  $\sigma > 0$  et  $\dot{\gamma}_0 > 0$ .

$$\lambda \frac{d\sigma}{dt} + \sigma + K\sigma^2 = \eta_0 \dot{\gamma}_0 \quad (1)$$

L'équation (1) prend la forme :  $\lambda \frac{d\sigma}{\eta_0 \dot{\gamma}_0 - \sigma - K\sigma^2} = dt$ . Le trinôme du 2<sup>nd</sup> degré  $-K\sigma^2 - \sigma + \eta_0 \dot{\gamma}_0 = 0$  admet 2 racines  $\sigma_1 < 0$  et  $\sigma_2 > 0$ . Calculer le discriminant  $\Delta$  et les racines  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

4. On écrit :  $\frac{d\sigma}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)} = -\frac{K}{\lambda} dt$ . Intégrer cette équation et montrer que :

$$\sigma(t) = \sigma_1 \frac{1 - e^{t/t_0}}{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} e^{t/t_0}} \quad (2)$$

où  $t_0 = \frac{\lambda}{K(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{\lambda}{\sqrt{\Delta}} > 0$  et  $\sigma(t) > 0$ .

5. Montrer que  $\sigma(t) \rightarrow \sigma_2$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Exprimer cette limite  $\sigma_2(\dot{\gamma}_0)$  en fonction de  $\dot{\gamma}_0$ . En déduire la viscosité  $\eta(\dot{\gamma}_0)$ .
6. Trouver la limite de  $\eta(\dot{\gamma}_0)$  lorsque  $\dot{\gamma}_0 \rightarrow 0$ . En déduire quel est ce type de comportement.
7. Pour les grandes valeurs de  $\dot{\gamma}_0$ , quel comportement obtient-on pour  $\eta(\dot{\gamma}_0)$ ? Peut-on dire que le fluide suit une loi-puissance ? Quel en serait l'exposant ?
8. Deducire des deux questions précédentes l'allure de la courbe de viscosité  $\eta(\dot{\gamma}_0)$  et la tracer en fonction de  $\dot{\gamma}_0$  (en échelle log-log, et préciser les pentes).
9. Les résultats de la contrainte  $\sigma(t)$  ont été calculés en FIG. 2 et sont normalisés par  $\sigma_2$ . Que pensez-vous de la variation rapide de  $\sigma(t)$  aux temps courts ? Le modèle est-il meilleur que le précédent ?

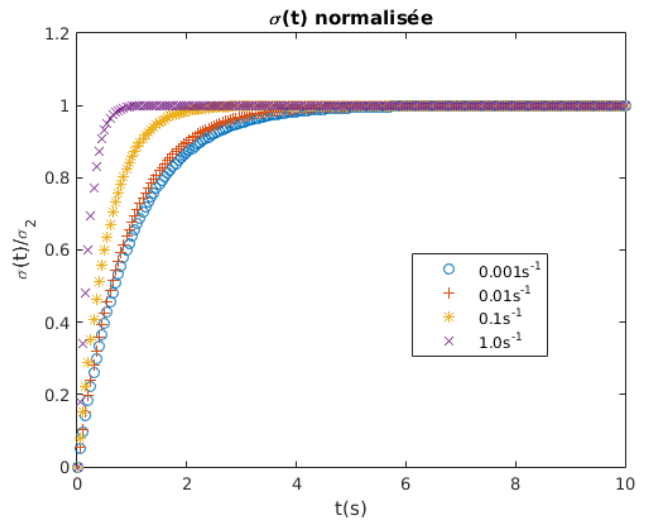


FIG. 2: Contrainte  $\sigma(t)/\sigma_2$  à différents taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_0 = 0,001 \text{ s}^{-1}; 0,01 \text{ s}^{-1}; 0,1 \text{ s}^{-1}; 1,0 \text{ s}^{-1}$ .

10. Ce fluide possède-t-il des propriétés élastiques ? A partir de vos connaissances en biologie, quels composants du fluide pourraient donner des propriétés élastiques ? Justifier votre réponse.

## II. LOIS DE COMPORTEMENT (10 POINTS)

On souhaite faire la modélisation d'un essai réalisé sur un morceau d'œsophage. La machine d'essai permet de réaliser des chargements particuliers où l'on contrôle parfaitement le déplacement dans les deux directions du plan. Lorsque l'on impose un déplacement  $u$  dans un direction  $\vec{x}$  on peut imposer  $mu$  dans la direction  $\vec{y}$  où  $m$  est une constante. Les essais sont réalisés sur des éprouvettes de forme carrées de côté initial  $L$ , l'épaisseur initiale de l'éprouvette est notée  $e$ .

Des analyses biologiques des tissus ont montré que l'on pouvait considérer que le tissu sera représenté par une matrice renforcée par 2 familles de fibres dont les orientations initiales sont données par les vecteurs suivants :  $\vec{a}_1^{(0)} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$  et  $\vec{a}_2^{(0)} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$ . (où  $\alpha$  est une constante). Les familles de fibres 1 et 2 ont des propriétés mécaniques similaires. Le matériau est sup-

posé incompressible.

1. Ecrire le gradient de la transformation de l'essai en fonction de  $\beta = u/L$ .

2. On supposera que seuls  $I_1$  et  $I_4$  sont nécessaires pour la modélisation de ces tissus. Donner la valeur de  $I_4$  pour les deux familles de fibres.

3. On modélise le matériau par la superposition d'un modèle néo-hookéen et d'un modèle quadratique en  $I_4$  pour chacune des fibres  $K(I_4 - 1)^2$ . Donner l'expression complète de l'énergie.

4. Ecrire le tenseur des contraintes de Cauchy pour l'essai proposé en fonction de la loi de comportement choisie.

5. Donner la relation entre les composantes des contraintes de Cauchy et les paramètres du problème ( $m$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  et les paramètres de la loi de comportement).

Question indépendante

6. Calculer  $\frac{\partial I_1^2 \ln(I_4)}{\partial \bar{C}}$ .

# Master M1 MI SIM

## UE optionnelle PAX8MIAG : "Rhéologie du vivant" Tous documents autorisés

### I. FLUIDES COMPLEXES (10 POINTS)

#### A. Fluide visqueux (4 points)

La caractérisation rhéométrique en cisaillement simple d'un fluide complexe donne les résultats suivants (FIG. 1).

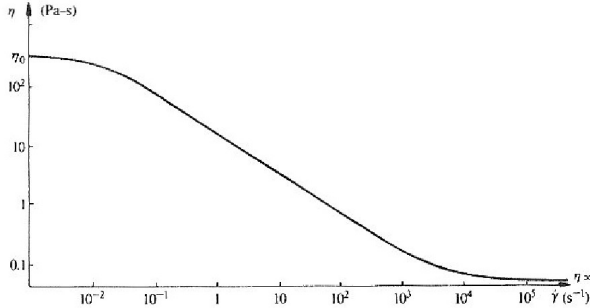


FIG. 1: Viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  d'un fluide visqueux non-Newtonien

- 1) Définir les grandeurs  $\eta$  et  $\dot{\gamma}$  qui figurent sur les axes. Que peut-on dire de ce comportement ?
- 2) Comment peut-on obtenir de tels résultats en rhéométrie ?
- 3) Quelle loi de comportement proposez-vous pour décrire le comportement de ce fluide ?
- 4) On décide d'utiliser le modèle de Carreau-Yasuda

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + \lambda^a |4II_D|^{\frac{a}{2}})^{\frac{1-n}{a}}} \quad (1)$$

où  $II_D$  est le second invariant de  $\underline{\mathbf{D}}$  (partie symétrique du tenseur gradient de vitesse),  $\lambda$  un temps,  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$  deux viscosités,  $a$  et  $n$  des paramètres sans dimension. Calculer  $\eta(\dot{\gamma})$  en écoulement de cisaillement simple permanent.

- 5) Quels sont les valeurs des paramètres que l'on peut déterminer à partir de la FIG. 1 ? Donner des valeurs approchées de  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ,  $n$ .
- 6) Quel type de fluide biologique pourrait posséder de telles propriétés ?

#### B. Rhéomètre Plan-Plan (6 points)

On considère un rhéomètre plan-plan schématisé en FIG. 2. Le fluide (de masse volumique constante) est cisailé entre les deux plans de rayon  $R$ , séparés d'une hauteur  $h$ , appelée entrefer. On utilise les coordonnées

cylindriques habituelles  $(r, \theta, z)$ . On sait mesurer le couple  $M$  appliqué sur le plan supérieur mobile ainsi que la vitesse de rotation angulaire  $\Omega$  ( $rad/s$ ). L'origine  $z = 0$  correspond au plan inférieur (fixe) et  $z = h$  correspond au plan supérieur. On suppose l'écoulement permanent axisymétrique et la seule composante du champ de vitesse non nulle est  $v_\theta$ . On peut montrer que dans un tel rhéomètre, la vitesse est donnée par  $v_\theta(r, z) = \Omega \frac{rz}{h}$ .

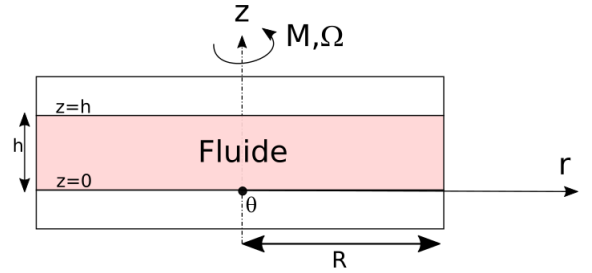


FIG. 2: Schéma du rhéomètre plan-plan. Le fluide est placé entre les deux plateaux, le plateau du bas est fixe, tandis que le plateau supérieur tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ . On mesure le couple  $M$  sur le plateau supérieur.

1. Montrer que le principe de conservation de la masse est vérifié, et que les conditions aux limites en vitesse le sont aussi.
2. Calculer les matrices (associées à la base des coordonnées cylindriques)  $\underline{\mathbf{grad}}\underline{\mathbf{v}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$  et en déduire le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ .  $\dot{\gamma}$  est-il constant ?
3. Quelle est la contrainte de cisaillement  $\tau_{12}$  qui est non nulle ? On suppose que cette contrainte ne dépend que de  $r$ . Exprimer le couple appliqué  $M$  en fonction de cette contrainte  $\tau_{12}(r)$ , sous forme intégrale.
4. Dans le cas du fluide Newtonien de viscosité  $\eta$ , montrer que  $\tau_{12}(R) = \eta \frac{\Omega R}{h}$ . En utilisant la relation précédente, prouver que  $M = \frac{\pi \eta \Omega R^4}{2h}$ . En déduire que  $\tau_{12}(R) = \frac{2M}{\pi R^3}$ .

De manière générale, on peut montrer (calcul non demandé) que la contrainte de cisaillement vérifie  $\tau_{12}(R) = \frac{M}{2\pi R^3} (3 + \frac{\dot{\gamma}_R}{M} \frac{dM}{d\dot{\gamma}_R})$ , où  $\dot{\gamma}_R = \frac{\Omega R}{h}$ , et  $\tau_{12}(R)$  est la contrainte de cisaillement, calculée en  $r = R$ .

4. Proposer une méthode de mesure de la viscosité de cisaillement en fonction de  $\dot{\gamma}_R$ .
5. Quels sont les avantages et les inconvénients de ce type de géométrie ? En particulier, les comparer avec le rhéomètre cône-plan et le rhéomètre de Couette.

I. LE SANG (2 POINTS)

1. Quels sont les principaux constituants du sang et leur rôle sur la viscosité ?
2. Quelle loi de comportement est la mieux adaptée pour décrire le comportement du sang ?

II. VISCOSITÉ ET CONTRAINTES NORMALES (8 POINTS)

Le comportement en écoulement du PolyÉthylène Haute Densité (PEHD) est présenté en FIG. 1. La viscosité de cisaillement  $\eta(\dot{\gamma})$  et  $\psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\gamma}^2}$  ont été réduits en utilisant le principe de superposition temps-température.

1. Expliquer comment la réduction des courbes a été obtenue.

2. On se propose d'utiliser le modèle de Carreau-Yasuda pour expliquer les variations de viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$ . C'est la forme suivante :  $\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + \lambda^a |4 II_D|^{\frac{a}{2}})^{\frac{1-n}{a}}}$ . Donner une signification physique à chacun des paramètres du modèle et déterminer graphiquement une valeur approchée de chaque paramètre en précisant les unités.

3. En utilisant une loi de fluide visqueux, peut-on prédire le comportement de  $\psi_1$  ?

4. Pour expliquer le comportement du PolyÉthylène, on préfère utiliser le modèle de Maxwell :  $\lambda \overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{D}}$ , où  $\lambda$  est le temps de relaxation,  $G$  le module de cisaillement, et  $\eta = G\lambda$  la viscosité.  $\underline{\underline{\tau}}$  est la contrainte supplémentaire telle que  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}}$  étant le tenseur des contraintes.  $\overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{1}{2} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \frac{1}{2} \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}}$ , et les dérivées objectives suivantes définies en cours sont :  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \overset{\dot{\tau}}{\underline{\underline{\tau}}} - \underline{\underline{grad}} \vec{v} \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{grad}} \vec{v})^T$ ,  $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = \overset{\dot{\tau}}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{grad}} \vec{v} + (\underline{\underline{grad}} \vec{v})^T \underline{\underline{\tau}}$ , avec  $\overset{\dot{\tau}}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\tau}} + \vec{v} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}}$ . Calculer les fonctions viscosimétriques  $\eta(\dot{\gamma})$  et  $\psi_1(\dot{\gamma})$  pour ce modèle

5. Ces prédictions sont-elles réalistes ? Comparer les aux données de la FIG. 1.

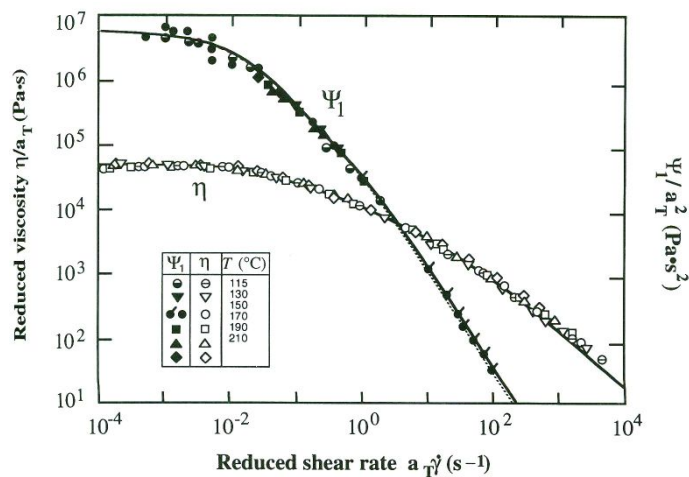


FIG. 1: Courbes maîtresses de la viscosité réduite  $\eta(\dot{\gamma})$  et du coefficient  $\psi_1(\dot{\gamma})$  de différence des contraintes normales.

# Master M1 MEI (SIM-GM) - Option : Rhéologie du vivant

Mardi 2 mai 2023 (9h-11h)

Documents autorisés sauf calculatrice et ordinateur

## I. FLUIDES COMPLEXES BIOLOGIQUES (10 POINTS)

### Rhéologie cellulaire (2 points)

1. Définir rapidement les constituants élémentaires d'une cellule vivante eucaryote et expliquer les raisons du comportement viscoélastique cellulaire.
2. Quelle différence y a-t-il entre mesures de rhéologie locale et globale ? Citer deux méthodes pour chaque cas.

### Modèle de Maxwell 3D (8 points)

3. Pour expliquer le comportement d'un polymère (FIG. 1), on utilise le modèle de Maxwell :  $\lambda \overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  ( $\lambda$  temps de relaxation,  $G$  module de cisaillement,  $\eta = G\lambda$  viscosité).  $\underline{\underline{\tau}}$  est la contrainte supplémentaire telle que  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ ,  $\underline{\underline{\Sigma}}$  étant le tenseur des contraintes.  $\overset{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{1}{2} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \frac{1}{2} \overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}}$ , et les dérivées objectives suivantes sont :  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \dot{\underline{\underline{\tau}}} - \underline{\underline{\text{grad}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}} \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{\text{grad}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}})^T$ ,  $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\tau}}} = \dot{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\text{grad}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}} + (\underline{\underline{\text{grad}}\underline{\underline{\mathbf{v}}}})^T \underline{\underline{\tau}}$ , avec  $\dot{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\mathbf{v}}}\cdot\nabla \underline{\underline{\tau}}$ .

Montrer que les fonctions viscosimétriques sont :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta}{1 + 4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2} \quad \psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{2\lambda\eta}{1 + 4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2} \quad \psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{-2a\lambda\eta}{1 + 4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2} \quad (1)$$

NB. On considèrera un écoulement de cisaillement simple  $v_1 = \dot{\gamma}x_2$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$ , et on supposera le régime permanent établi, en conditions homogènes.

4. Pour  $a=1$ , calculer  $\eta(\dot{\gamma})$ ,  $\psi_1(\dot{\gamma})$  et  $\psi_2(\dot{\gamma})$ . Que pensez-vous de ces résultats ? Même question pour  $a=0$  et  $a=\frac{1}{2}$ .
5. Ces prédictions sont-elles réalistes ? Comparer les aux données de la FIG. 1. Proposer une valeur adéquate du paramètre 'a' qui permette un bon ajustement.

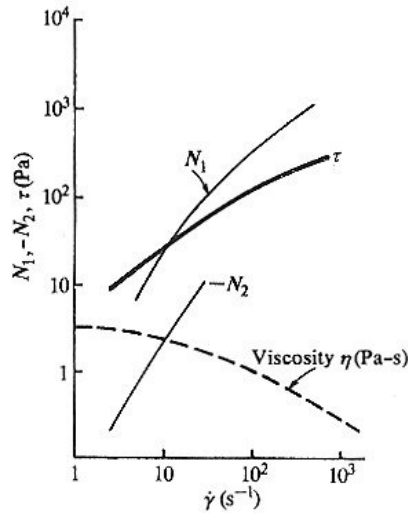


FIG. 1: Courbes de la viscosité  $\eta(\dot{\gamma})$  et du coefficient  $\psi_1(\dot{\gamma})$  de différence des contraintes normales.