Université Claude Bernard-Lyon I
UFR de Physique

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département des Sciences de la Matière

Licence de Physique, Parcours Sciences de la Matière, Année 2006-2007
Contrôle continu, 8 Novembre 2006 (2h)

1 Oscillateur harmonique

Soit un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de fréquence ω. On rappelle que la fonction d'onde de l'état fondamental, dénoté par $|0\rangle$ est

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

1. Rappeler la définition des opérateurs a et $a\dagger$, en fonction des opérateurs sans dimension $\hat{X} = \sqrt{(m\omega/\hbar)}x$ et $\hat{P} = p/\sqrt{(m\omega\hbar)}$. Démontrer la relation de commutation entre a et $a\dagger$. Vérifier que l'Hamiltonien $H = p^2/2m + (m\omega^2/2)x^2$ du système s'écrit simplement en utilisant ces deux opérateurs.

2. En utilisant les résultats connus pour l'action de a et $a\dagger$ sur un état propre, calculer la fonction d'onde de l'oscillateur dans le premier et le deuxième état excité. Faire une représentation schématique des fonctions d'onde pour le fondamental et les deux premiers niveaux excités.

3. Calculer l'écart quadratique moyen de la position dans l'état fondamental. Faire une application numérique pour le cas d'un cristal d'Hélium (on prendra dans ce cas $\omega = 10^{13} rad/s$, $m = 510^{-27}$kg). Comparer à une distance interatomique.

2 Deuton

On considère une particule de masse m dans un potentiel de la forme
$V(x) = +\infty$ pour $x < 0$
$V(x) = -V_0$ pour $0 < x < a$
$V(x) = 0$ pour $a < x$
V_0 est un nombre positif.

1. Etablir l'équation qui permet de déterminer les fonctions d'ondes des états liés (si ils existent). Quelle est la condition sur V_0 et a pour que un tel état existe ?

2. Montrer l'analogie avec la détermination des états liés impairs dans un puits carré symétrique de largeur $2a$ et de profondeur V_0.

3. le puits précédent schématise le potentiel d'interaction entre un proton et un neutron. Dans ce cas la masse de la particule à considérer est la masse réduite du système, $m = 0.837\ 10^{-27}$kg. Sachant que $a = 2.\ 10^{-15}$m et que il existe un seul état lié d'énergie $E = -2,22$MeV, quelle valeur prendre pour V_0 ? (on donne que $1,82\text{cotan}(1,82) \simeq -0,463$)

3 Théorème de Bloch

Le théorème de Bloch est un théorème important en physique des solides cristallins. Il permet de rechercher les fonctions d'onde d'une particule dans un potentiel périodique parmi une classe très restreinte de fonctions. On considère ici uniquement des particules (électrons) dans un espace unidimensionnel.
Opérateur translation: On appelle opérateur translation de vecteur a l'opérateur T_a défini par son action sur une fonction d'onde:

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a)$$

1. Montrer que si λ est une valeur propre de T_a, alors $\lambda = \exp(i\phi)$ où ϕ est un nombre réel (on pourra pour cela comparer les normes de $T_a\psi$ et de ψ).

2. En déduire que toute fonction propre de T_a peut s'écrire sous la forme $\psi(x) = \exp(ikx)u(x)$, où k est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de ϕ, et $u(x)$ une fonction périodique de période a

3. Supposons que une particule (électron) est soumise à un potentiel périodique de période a, $V(x)$. Expliquer qualitativement l'origine du potentiel périodique

4. Quelle est la propriété essentielle de l'Hamiltonien H de la particule par rapport à l'opérateur T_a ?

5. Que peut on en déduire pour les fonctions propres de H ?

6. Si on considère un état propre de H d'énergie décrit par une fonction propre $\psi(x) = \exp(ikx)u(x)$, où $u(x)$ est de période a, écrire l'équation vérifiée par $u(x)$. En quoi cette équation est elle plus simple que l'équation de Schrödinger de départ ?