Université Claude Bernard-Lyon I
UFR de Physique

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département des Sciences de la Matière

Licence de Physique, Parcours Sciences de la Matière, Année 2004-2005
Examen de première session, Janvier 2005 (3h)

Les parties I,II et III sont entièrement indépendantes.

1 Question de cours

On considère un système de spin 1/2 de moment magnétique μ placé dans un champ magnétique fixe $\vec{B}_0$ parallèle à Oz. On superpose à ce champ fixe un champ tournant dans le plan xOy, avec une amplitude B_1 et une pulsation ω.

1. Ecrire la représentation de l'hamiltonien dans une base de l'espace des états que l'on précisera.

2. Ecrire et résoudre les équations décrivant l'évolution du système.

3. On prépare un système dans l'état $|+>_z$. Quelle est la probabilité de le trouver dans l'état $|->_z$ après un temps t? Expliquer qualitativement ce qui se produit à la fréquence de résonance magnétique.

4. Expliquer le principe d'une expérience de résonance magnétique nucléaire. On précisera en particulier les points suivants: ordre de grandeur des fréquences électromagnétiques mises en jeu, origine du déséquilibre entre populations qui fait que le système absorbe de l'énergie.

2 Effet de volume du noyau sur l'état fondamental d'un ion hydrogénoide

On veut décrire l'influence du fait que le noyau atomique a un volume fini sur l'état fondamental d'un ion hydrogénoide. Pour cela on représente le noyau par une sphère uniformément chargée de rayon R_n, de charge Ze. Le potentiel créé par cette sphère est

$$V(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{pour} \quad r > R_n \tag{1}$$

$$V(r) = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R_n}\left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^2 - 3\right] \quad \text{pour} \quad r < R_n \tag{2}$$

On note a_0 le rayon de Bohr et $E_H = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = -13,6eV$ l'énergie du niveau fondamental de H (avec un noyau ponctuel). On suppose que l'on connaît les énergies et états propres correspondant au cas du noyau ponctuel.

1. Représenter sur une figure les énergies potentielles correspondant à un noyau ponctuel et à un noyau de rayon R_n fini. Formuler le problème de la détermination des niveaux d'énergie en termes d'un hamiltonien de référence et d'un hamiltonien de perturbation.

2. La correction due au volume fini du noyau va t'elle être plus importante (en valeur absolue) pour les états de haute ou de basse énergie ? Expliquer votre réponse brièvement et sans calcul.

3. Pour un noyau ponctuel, l'état fondamental est non dégénéré et sa fonction d'onde est $\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp(-r/a)$, avec $a = a_0/Z$. Son énergie est $E_0 = -Z^2 E_H$ Calculer au premier ordre de la méthode des perturbations le déplacement en énergie ΔE de l'état fondamental. Pour évaluer simplement l'intégrale obtenue, on pourra faire l'approximation que $a \gg R_n$ ce qui permet de remplacer la fonction d'onde par sa valeur à l'origine.

4. Montrer que $\Delta E/E$ s'exprime simplement en fonction de R_n et a.

5. En supposant que R_n est proportionnel à $Z^{1/3}$ montrer que le changement relatif de l'énergie du niveau fondamental est proportionnel à Z^α, où α est un exposant que l'on calculera.

6. Si on considère deux noyaux "isotopiques" de même charge Z mais de rayons R_n différents, l'effet étudié ici aura pour conséquence un petit déplacement du niveau fondamental. Un autre effet classique cause également un déplacement "isotopique": lequel ? Discuter, en fonction de la masse du noyau, lequel de ces effets est prépondérant.

3 Electron élastiquement lié dans un champ électrique oscillant

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel de pulsation ω. Cet oscillateur porte une charge q et est soumis à un champ électrique oscillant $\mathcal{E}\cos(\Omega t)$. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 - q\mathcal{E}\hat{X}\cos(\Omega t)$$

On note $|\phi_n>$ l'état stationnaire d'énergie $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ de l'oscillateur en l'absence du champ oscillant. On note $|\psi(t)>$ l'état du système à l'instant t.

1. On suppose que à $t = 0$, $|\psi(t)>=|\phi_0>$. Utiliser la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre pour calculer $|\psi(t)>$.

2. On veut calculer la valeur moyenne à l'instant t du dipôle électrique $D(t) =<\psi(t)|q\hat{X}|\psi(t)>$. Montrer que à l'ordre linéaire en $\mathcal{E}$, celle ci contient un terme oscillant à la fréquence Ω qui s'écrit
$$D(t) = \frac{2q^2}{\hbar}\mathcal{E}\cos(\Omega t)\sum_{n\neq 0}\frac{n\omega}{(n\omega)^2-\Omega^2}|<\phi_n|\hat{X}|\phi_0>|^2$$

3. Discuter les similarités et différences avec ce qui se passe pour un oscillateur harmonique classique de pulsation ω.

On rappelle que pour une perturbation dépendant du temps $W(t)$, le coefficient de l'état $|\phi_n>$ va s'écrire au premier ordre en perturbation (en supposant qu'à l'instant $t = 0$ le système est dans l'état $|\phi_0>$):

$$c_n(t) = \frac{1}{i\hbar}\exp(-iE_n t/\hbar)\int_0^t <\phi_n|W(s)|\phi_0> \exp(i(E_n - E_0)s/\hbar)ds$$

Pour la première question on rappellera le raisonnement qui permet d'obtenir ce résultat.