Université Claude Bernard-Lyon I
UFR de Physique

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Département des Sciences de la Matière

Licence de Physique, Parcours Sciences de la Matière, Année 2005-2006
Examen de première session, Janvier 2006 (3h)

Les parties I,II et III sont entièrement indépendantes.

1 Question de cours

1. Quelles sont les relations de commutation qui caractérisent les trois composantes J_x, J_y, J_z d'un opérateur moment cinétique ?
2. Démontrer en particulier ces relations pour le moment cinétique orbital d'une particule.
3. Quelle propriété de J^2 et J_z (à démontrer) permet de dire que ces deux opérateurs ont une base propre commune?
4. Quelles sont les valeurs propres possibles pour les opérateurs J^2 et J_z (on ne demande pas de démonstration)?
5. Quelle est la dimension de l'espace des états pour un moment cinétique dans lequel on observe que la mesure de J_z donne un résultat au maximum égal à $2\hbar$? Même question pour $5\hbar/2$?

2 Démarrage adiabatique d'une perturbation

On considère un système d'Hamiltonien H_0 connu, avec un spectre d'énergies dénotées par E_n et des vecteurs d'états associés $|\phi_n\rangle$. On suppose que pour $t \to -\infty$ le système est dans l'état fondamental de H_0, $|\phi_0\rangle$, d'énergie E_0, supposé non dégénéré.
Le système est soumis dans l'intervalle de temps $]-\infty, 0]$ à une perturbation dépendant du temps de la forme $W(t) = H_1 \exp(t/\tau)$, où τ est une constante de temps fixée et H_1 une perturbation indépendante du temps. On pourra noter W_{0n} l'élément de matrice $\langle\phi_0|H_1|\phi_n\rangle$, $\omega_{0n} = (E_n - E_0)/\hbar$

1. Utiliser la théorie des perturbations dépendant du temps pour calculer la probabilité $P_{0\to n}(0)$ de trouver le système dans l'état $|\phi_n\rangle$ à l'instant $t = 0$.
2. Calculer en utilisant la théorie des perturbations indépendantes du temps le vecteur d'état décrivant l'état fondamental de l'Hamiltonien (indépendant du temps) $H_0 + H_1$
3. Comparer les résultats des questions précédentes. A quelle condition sur le temps τ peut on considérer que le système reste toujours dans son état fondamental (conditions dites "adiabatiques")? Interpréter en terme des composantes de Fourier (en fréquence) de la fonction $\exp(t/\tau)$. Application numérique: un atome d'hydrogène, animé d'une vitesse de 1000m/s, passe à une distance de 1nm d'un ion H^+. Va t'il passer dans un état excité?

3 Inégalité de Bell et résultat d'une mesure quantique

Les trois premières questions sont de l'ordre de la question de cours. Les suivantes ne demandent aucun calcul complexe, mais une certaine réflexion. Il est donc indispensable de rédiger très clairement vos réponses

On considère une paire de particules différentes, qui portent chacune un spin 1/2. Ces particules sont préparées **dans un état initial où le moment cinétique total $\vec{S_1} + \vec{S_2}$ est nul**, et s'éloignent l'une de l'autre, sans que l'ensemble du système $1+2$ ne subisse d'interaction. Une fois que les particules sont éloignées, on mesure séparément la composante de leur moment cinétique suivant un axe z.
On mesure d'abord la composante S_{1z} du moment cinétique de la particule 1 suivant Oz. On obtient alors le résultat $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$, avec des probabilités 1/2.

1. Si la mesure du moment cinétique S_{1z} pour la particule 1 donne le résultat $+\hbar/2$, quels sont les résultats possibles pour une mesure du moment cinétique suivant z de la particule 2? En déduire l'état quantique de la particule 2 après une mesure sur 1 qui donne le résultat $+\hbar/2$.

2. Après avoir effectué la mesure de S_{1z} sur la particule 1, on mesure pour la particule 2 la composante $S_{2\phi}$ du moment cinétique suivant un axe noté ϕ, qui est contenu dans le plan xOz fait l'angle ϕ avec l'axe Oz. Quels sont les deux résultats que l'on peut obtenir ? Avec quelles probabilités ? On rappelle l'égalité $S_{2\phi} = \cos\phi\ S_{2z} + \sin\phi\ S_{2x}$ valable pour les opérateurs.

3. En considérant les probabilités respectives pour les 4 résultats possibles de mesures consécutives de S_{1z} et $S_{2\phi}$, déduire la quantité
$$F(\phi) =< S_{1z}S_{2\phi} >$$
Le fait que cette quantité est non nulle est caractéristique de l'existence d'une *corrélation* entre les résultats des deux mesures faites séparément sur la particule 1 et la particule 2.

4. Le résultat précédent implique que la physique quantique est "non locale". La mesure faite sur 1 influence le résultat de la mesure faite sur 2, même si les deux particules sont très éloignées.

   Cette "non localité" pourrait être évitée en faisant l'hypothèse que la corrélation entre les résultats de deux mesures dénote l'existence d'une cause commune, appelée "variable cachée" qui est déterminée par la préparation initiale de l'état des deux particules. Dans cette hypothèse le résultat de la mesure de S_{1z} devient une simple fonction, $s_{1z}(\lambda)$ de cette "variable cachée", dénotée par λ. **Cette fonction peut prendre uniquement les valeurs** $\pm\hbar/2$; de même, la mesure de $S_{2\phi}$ est une fonction $s_{2\phi}(\lambda)$. **Comme les deux particules ont un spin total nul, on a $s_{2\phi}(\lambda) = -s_{1\phi}(\lambda)$ pour toutes valeurs de ϕ et λ.**

   Justifier alors que
$$F_{loc}(\phi) =< S_{1z}S_{2\phi} >= \int d\lambda s_{1z}(\lambda)s_{2\phi}(\lambda)p(\lambda)$$
   où $p(\lambda)$ est la distribution de probabilité de la variable λ lors de la préparation du système.

5. Montrer que si on considère deux angles ϕ et ϕ' on va avoir l'inégalité (dite inégalité de Bell):
$$|F_{loc}(\phi) - F_{loc}(\phi')| \leq \frac{\hbar^2}{4} + F_{loc}(\phi - \phi')$$
   .

   Indications: on utilisera (en le justifiant) que:
   (i) $s_{1z}(\lambda)^2 = s_{2\phi}(\lambda)^2 = s_{2\phi'}(\lambda)^2 = \hbar^2/4$
   (ii) $s_{1z}(\lambda)s_{2\phi'}(\lambda) = -(4/\hbar^2)s_{1z}(\lambda)s_{2\phi}(\lambda)s_{1\phi}(\lambda)s_{2\phi'}(\lambda)$
   (iii) $p(\lambda) \geq 0$
   (iv) $\int d\lambda p(\lambda)|s_{1z}(\lambda)s_{2\phi}(\lambda)| \leq \hbar^2/4$

6. Montrer que cette inégalité n'est pas vérifiée en général par le résultat quantique obtenu à la question 2. On pourra considérer le cas particulier $\phi' = 2\phi$. Conclusions ?