

Licence de Physique, Parcours Sciences de la Matière, Année 2005-2006
Examen de première session, Janvier 2007 (3h)

Les différentes parties sont entièrement indépendantes.

1 Perturbation dépendant du temps

On considère un système d'Hamiltonien H_0 , dont les états propres et énergies propres seront notés $|\phi_n\rangle$ et E_n . On soumet ce système à une perturbation dépendant du temps représentée par un opérateur $V(t)$. L'élément de matrice $\langle\phi_n|V(t)|\phi_m\rangle$ est noté $V_{nm}(t)$.

1. Sachant que à $t = 0$ le système est dans l'état $|\phi_n\rangle$, établir au premier ordre en perturbation l'expression de la probabilité $P_{kn}(t)$ de trouver le système dans l'état $|\phi_k\rangle$ à l'instant t .
2. On considère le cas particulier où le système est un oscillateur harmonique d'Hamiltonien $H_0 = P^2/2M + M\omega^2 X^2/2$, et la perturbation est de la forme $AXf(t)$. A l'instant initial, le système est dans l'état fondamental. Montrer que, si on se limite au premier ordre, la probabilité de passer dans un état d'énergie $(n + 1/2)\hbar\omega$ est nulle si n est différent de 1.
3. Dans le cas de l'oscillateur harmonique ci dessus, on suppose que l'on peut se limiter à considérer les 3 états $|\phi_0\rangle$, $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$. Proposer un calcul de perturbation au second ordre qui permette de calculer la probabilité $P_{02}(t)$. On exprimera le résultat en fonction des éléments de matrice $X_{01} = \langle\phi_0|X|\phi_1\rangle$, $X_{12} = \langle\phi_1|X|\phi_2\rangle$, et d'une intégrale double portant sur la fonction $f(t)$, $I(t) = \int_0^t ds f(s) \exp(i\omega s) \int_0^s ds' f(s') \exp(i\omega s')$
4. Discuter le résultat, en considérant le cas particulier d'une perturbation sinusoïdale $f(t) = \exp(i\Omega t)$. En quoi le résultat de l'oscillateur harmonique est il particulier, par rapport à un système où le niveau intermédiaire $|\phi_1\rangle$ ne serait pas équidistant en énergie des deux autres niveaux ?

2 Spins 1/2

On considère un système formé de deux particules discernables de spin 1/2. L'Hamiltonien du système est

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

L'état du système à $t = 0$ est $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle)$. Si on effectue une mesure de $S^2 = (S_1 + S_2)^2$ à un instant $t > 0$, quels résultats peut on trouver, et avec quelles probabilités ?

3 Réflexion de neutrons sur un matériau ferromagnétique

Un jet de neutrons d'énergie E est envoyé, en incidence normale, sur un matériau ferromagnétique. Le matériau occupe le demi-espace $x > 0$. Il y règne un champ magnétique parallèle à z , d'intensité B_0 . Dans la partie $x < 0$, les neutrons se propagent dans le vide et le champ magnétique est supposé nul.

On suppose que dans le matériau les neutrons sont soumis à deux types d'interaction: un potentiel uniforme $V_0 > 0$ et un potentiel d'origine magnétique, $-\gamma S_z B_0$, où S_z est la composante suivant z du moment magnétique. On se placera toujours dans la situation où $0 < \gamma\hbar B_0/2 < V_0$.

1. On suppose que le faisceau initial est constitué de 50% de particules dans l'état $|+\rangle$ et de 50% de particules dans l'état $|-\rangle$. Montrer que pour une énergie des neutrons incidents telle que $V_0 - \gamma\hbar B_0/2 < E < V_0 + \gamma\hbar B_0/2$, le faisceau réfléchi sera polarisé, et calculer son taux de polarisation (différence entre les pourcentages de neutrons dans l'état $|+\rangle$ et dans l'état $|-\rangle$).
2. Montrer, par un argument qualitatif, que le faisceau réfléchi ne sera pas polarisé si $E < V_0 - \gamma\hbar B_0/2$.
3. On considère maintenant un faisceau incident de particules polarisées suivant x (état de spin incident $|+\rangle_x$). On se place dans une situation de réflexion totale, soit $E < V_0 - \gamma\hbar B_0/2$. Construire l'état qui décrit les particules réfléchies, et montrer que la valeur moyenne de S_y dans cet état est en général non nulle. Interpréter.

4 Particules identiques

On considère trois particules identiques de masse M , à une dimension, qui sont soumises à un potentiel harmonique $M\omega^2 X^2/2$.

1. Donner l'expression de la fonction d'onde de l'état fondamental, ainsi que son énergie, quand les 3 particules ont un spin 0.
2. Quelle est l'énergie de l'état fondamental, si les particules ont un spin 1/2. Quelle est la dégénérescence de cet état fondamental? Donner, sous forme de déterminant, l'expression d'une fonction d'onde correspondant à cet état. On notera $|n, +\rangle$ l'état correspondant à une particule dans l'état n du puits harmonique ($n = 0, 1, 2, \dots$), et dans l'état de spin $|+\rangle$ suivant Oz .
3. On suppose que les particules de la question précédente ont un moment magnétique μ , et que l'on applique un champ magnétique B suivant Oz . Quelle devrait être la valeur B du champ magnétique pour que, dans l'état fondamental, le deuxième état excité du puits harmonique (d'énergie $5\hbar\omega/2$) soit occupé ?