Diffusion dans un film mince

DEA de physique statistique et phénomènes non linéaires
Cours de physique de la matière condensée

On étudie la diffusion de molécules marquées dans un film liquide mince. Le film est infini dans les directions x et y, son épaisseur dans la direction z est h ($-h/2 < z < h/2$). Il est totalement "libre", c'est a dire limité par des interfaces avec le vide (en pratique, avec l'air extérieur).

Le principe de l'expérience est le suivant. Les molécules de traceur sont fluoresentes. A $t = 0$, on illumine une portion du film par un pulse laser qui fait passer les molécules dans un état excité. La durée de vie de cet état excité est τ. On peut ensuite suivre l'évolution temporelle de la concentration $n(x, y, z, t)$ de molécules fluorescentes excitées. On admettra que celles-ci sont suffisament diluées pour se comporter comme des traceurs indépendants.

En réalité, on suit l'évolution temporelle du nombre de molécules excitées par unité de surface dans le plan Oxy, $c(x, y, t) = \int_{-h/2}^{h/2} n(x, y, z, t) dz$.

Le milieu étant inhomogène et anisotrope, la diffusion au point de coordonnées x, y, z fait intervenir 2 coefficients $D_{//}(z)$ et $D_{\perp}(z)$. On va supposer que la partie diffusive de l'évolution de $c(x, y, t)$ peut être décrite par un coefficient de diffusion parallèle (au film liquide) *effectif*, donné par:

$$D_e(h) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} dz D_{//}(z)$$

II-1 Ecrire dans ces conditions l'équation d'évolution pour c, prenant en compte la diffusion des particules marquées dans le plan xOy et la durée de vie finie des particules.

II-2 Justifier qualitativement que si on s'interesse à des échelles de temps assez grandes (à préciser) la diffusion dans la direction perpendiculaire au film ne joue aucun role.

II-3 Montrer que la solution de l'équation obtenue au I-1, pour une condition initiale correspondant à une zone illuminée de rayon très faible autour de l'origine (fonction delta), est de la forme:

$$c(x, y, t) = f(t) c_0(x, y, t)$$

où c_0 est la solution de l'équation de diffusion à deux dimensions pour cette condition initiale -que l'on rappellera- et $f(t)$ une fonction que l'on précisera.

II-4 On considère un fluide semi-infini occupant le demi-espace $z > 0$, l'autre demi espace étant vide. Montrer que la mobilité dans la direction parallèle à xOy d'une particule qui se situe à une distance z de l'interface (c'est à dire du plan $z = 0$) peut s'écrire approximativement:

$$\mu(z) = \frac{\mu_0}{(1 - \phi(2z))}$$

où $\phi(2z)$ est la composante parallèle à l'interface du champ de vitesse que crée, *dans un fluide infini*, une particule située à la cote z et animée d'une vitesse unité, au point "image" (symétrique par rapport à $z = 0$) situé à la cote $-z$. μ_0 est la mobilité dans un système infini.

(NB: on pourra d'abord envisager une situation dans laquelle deux particules situées symétriquement par rapport au plan $z = 0$ dans un fluide infini se déplacent à la même vitesse. On calculera dans ces conditions la friction sur une des deux particules. On montrera ensuite que le même écoulement est obtenu pour un fluide semi infini, une seule particule et une interface libre).

II-5 Si on admet que les contributions des deux interfaces se superposent, on peut écrire la mobilité parallèle à xOy à la cote z dans le film sous la forme

$$\mu_f(z) = \mu(h/2 - z) + \mu(h/2 + z) - \mu_0$$

Sachant que $\phi(z) \simeq \frac{\sigma}{2z}$ (pour $z >> \sigma$), où σ est le diamètre des particules marquées, en déduire le comportement du coefficient de diffusion $D_e(h)$ en fonction de h. On admettra que $D_{//}(z)$ et $\mu(z)$ sont liés par la relation d'Einstein. On pourra se placer dans l'approximation $h >> \sigma$.

II-6 Intrepréter le fait que le coefficient de diffusion dans le film est augmenté par rapport à sa valeur dans un fluide infini. On pourra envisager ce qu'il advient de la quantité de mouvement transverse initialement échangée entre le traceur et le reste du fluide. Qualitativement, que se passerait il pour un film confiné par des parois solides plutot que libre?