

Fluctuations d'une membrane, Interactions entre membranes

DEA de physique statistique et phénomènes non linéaires

Cours de physique de la matière condensée

Références: Chaikin et Lubensky; Safran

Exercice I: Fluctuations d'une membrane

On considère une membrane fluide, c'est à dire un objet bidimensionnel dont la configuration peut être définie par une surface sans surplomb d'équation $z = h(x, y)$. L'énergie libre d'une configuration faiblement ondulée de la membrane est donnée par

$$F[h] = F_0 + \frac{1}{2} \int dx \int dy (\gamma (\nabla h)^2 + \kappa (\nabla^2 h)^2) \quad (1)$$

où $\nabla \mathbf{h} = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y})$. L'intégrale porte sur la surface de base de la membrane, $-L < x < +L$ et $-L < y < L$.

II.1 A quoi correspond chacun des deux termes de l'énergie libre $F[h]$? On rappelle que pour une surface faiblement ondulée, l'augmentation de surface par rapport à la surface plane est donnée par $(\nabla \mathbf{h})^2/2$, et que la courbure vaut $(\nabla^2 h)^2$. κ est appelé le module de courbure

II.2 On suppose d'abord que $\gamma > 0$ et $\kappa = 0$. On pose $\vec{\rho} = (x, y)$ vecteur position dans le plan, at on note a une taille moléculaire ($2\pi/a$ sera donc la limite supérieure des intégrales sur les vecteurs d'onde). Montrer, en utilisant le formulaire ci dessous, que pour $L \gg \rho \gg a$

$$\langle (h(\rho) - h(0))^2 \rangle \simeq \frac{k_B T}{2\pi\gamma} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (2)$$

Pour cela il suffit d'étudier le comportement asymptotique de l'intégrale obtenue, qui est dominé par sa borne supérieure.

Calculer de même, pour $L \gg \rho \gg a$

$$\langle (\vec{N}(\vec{\rho}) - \vec{e}_z)^2 \rangle \quad (3)$$

où $\vec{N}$ est le vecteur normal à la surface, en fonction de $k_B T$, γ et a .

En déduire que la membrane ne présente pas d'ordre positionnel, mais conserve à basse température un ordre orientationnel à longue distance.

Ces résultats seraient ils modifiés qualitativement si κ est non nul (positif) ?

II.3 On suppose maintenant que $\gamma = 0$ et $\kappa > 0$ (situation rencontrée par exemple pour des films de tensioactifs en solution). Reprendre le calcul de

$$\langle (h(x, y))^2 \rangle \quad (4)$$

et

$$\langle (\mathbf{N}(x, y) - \mathbf{e}_z)^2 \rangle \quad (5)$$

Montrer que l'ordre orientationnel disparaît au delà d'une taille $\xi = a \exp(2\pi\kappa/k_B T)$, où a est une dimension moléculaire (on prendra $2\pi/a$ comme borne supérieure dans les intégrales sur le vecteur d'onde).

II.4 Reprendre les questions précédentes dans le cas où la membrane est remplacée par une ligne dans un espace de dimension 2.

Exercice II: Interactions entropiques entre membranes et phases lamellaires

On considère une membrane confinée entre deux murs parallèles impénétrables, distants de d . On suppose $\gamma = 0$. Pour tenir compte de la présence des murs, on

suppose qu'on peut diviser la membrane en blocs de taille $L_b \times L_b$, tels que pour cette taille on a des fluctuations de hauteur moyenne égales à d .

III.1 En utilisant les résultats de l'exercice précédent, expliciter la relation entre L_b et d .

III.2 On suppose que l'on peut additionner les contributions des différents blocs de taille L_b , et que pour chacun de ces blocs on peut remplacer $\nabla^2 h$ par d^2/L_b^2 . Montrer alors que l'énergie libre d'une membrane de taille $L \gg d$ confinée entre deux parois distantes de d est de la forme $F(L, d) \sim L^2(k_B T)^2/(\kappa d^2)$.

III.3 Des molécules de surfactant sont diluées dans un solvant, et ont alors un potentiel chimique $\mu_0(\phi)$, fonction de leur concentration ϕ . On envisage la formation d'une phase faite de membranes empilées. Dans cette phase **lamellaire**, les molécules de surfactant forment des membranes distantes en moyenne de d . Le nombre de molécules par unité de surface de la membrane est fixé, égal à Σ . On appelle μ_1 le potentiel chimique d'une molécule prise à l'intérieur d'une membrane isolée. Montrer que si on tient compte du confinement discuté dans la question précédente, le potentiel chimique d'une molécule à l'intérieur de la phase lamellaire s'écrit

$$\mu_L = \mu_1 + C \frac{(k_B T)^2}{\kappa d^2 \Sigma} \quad (6)$$

où C est une constante numérique que l'on ne cherchera pas à calculer.

En déduire que si on concentre la solution, il y aura formation d'une phase lamellaire. Exprimer la distance d pour une phase lamellaire coexistant avec une solution de concentration ϕ en fonction de $\mu_0(\phi)$ et μ_1 .

Formulaire

Pour une membrane bidimensionnelle de taille $L \times L$ on peut écrire

$$h(\vec{q}) = \int d^2 \vec{\rho} h(\rho) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{\rho}); \quad h(\vec{\rho}) = \frac{1}{L^2} \sum_{\vec{q}} h(\vec{q}) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{\rho})$$

$$\frac{1}{L^2} \sum_{\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{q}$$

Pour la question II-1 on introduira la fonction

$$J_0(z) = \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} \cos(z \sin \theta) d\theta$$

qui possède les comportements asymptotiques

$$J_0(z) = 1 - z^2/4 \quad (z \ll 1); \quad J_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \cos(z - \frac{\pi}{4}) \quad (z \gg 1)$$