TD.6
Eléments de solution

I.A

1) p^N

2) $C^N_{N+p-1} = C^{p-1}_{N+p-1}$ (on calcule le nombre de façons de disposer N objets parmi un ensemble constitué de N objets plus $p-1$ cloisons intérieurs séparants les niveaux d'énergie).

3) On considère que ce sont des bosons (car plusieurs peuvent se mettre sur le même niveau d'énergie). On a donc:

$$< n_i >= \Sigma_{n_1} \cdots \Sigma_{n_p}\ n_i \exp[-E/(k_B T)]/Q \ \ sous \ \ contrainte \sum_{j=1}^{p} n_j = N$$

où

$$E = \sum_{j=1}^{p} n_j\, \epsilon_j \quad et \quad Q = \Sigma_{n_1} \cdots \Sigma_{n_p}\ \exp[-E/(k_B T)] \ \ .$$

I.B

1)$\left(\Pi_{\{i=1\ldots p\}}\, g_i^{N_i}\right) \frac{N!}{N_1! \cdots N_p!}$

2)$\Pi_{i=1\ldots p}\, C^{N_i}_{N_i+g_i-1}$

3)$C^N_{(\sum g_i)}$ (mettre au plus une particule sur chaque état)

II

exo.1

$p_r(X_1 = x) = (C^x_{n_1} \dot{C}^{r-x}_{n_2})/C^r_n$ (numérateur=nb de façons de prendre x éléments de type 1 parmi n_1 et $r-x$ éléments de type 2 parmi n_2 (r éléments en tout); dénominateur=nb de façons de prendre r éléments parmi $n = n_1 + n_2$

$< X_1 >= r \cdot n_1/n;$

$< X_1^2 >= r \cdot n_1/n + n_1(n_1-1)\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$

exo.2

a) $\Omega = N!/[\Pi_{i=1\ldots p}(n_i!)]$

b)

$$S = k_B \ln \Omega \approx N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i$$

pour tenir compte des contraintes, on introduit 2 multiplicateurs de Lagrange λ_1 et λ_2, et l'on minimise:

$$S' = S - \lambda_1(\sum_i n_i - N) - \lambda_2(\sum_i n_i \epsilon_i - E)$$

par rapport à n_i: $\partial S'/\partial n_i = 0$, ce qui donne:

$$n_i = \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 \epsilon_i)$$

avec les conditions

$$\sum_i n_i = N = e^{-\lambda_1} \sum_i e^{-\lambda_2 \epsilon_i}$$

et

$$\sum_i n_i \epsilon_i = E = e^{-\lambda_1} \sum_i \epsilon_i e^{-\lambda_2 \epsilon_i}$$

Il s'ensuit:

$$S = k_B(N \ln N + \lambda_1 N + \lambda_2 E)$$

A partir duquel on montre: $\partial S/\partial E = k_B \lambda_2$, or on sait que $\partial S/\partial E = 1/T$, ce qui implique $\lambda_2 = 1/(k_B T)$.

N.B. On montre aussi $\lambda_1 = -\mu/(k_B T)$, où μ est le potentiel chimique d'une particule.