TD.13 - Gaz d'électrons
Eléments de solution

1) Pour des fermions sans interactions entre eux $f(\epsilon)=\frac{1}{\exp(\beta(\epsilon-\mu)+1)}$

En 3d

$$D(\epsilon)d\epsilon = 2\times\frac{V}{(2\pi)^3}\times(4\pi k^2 dk)$$

avec $\epsilon=\hbar^2k^2/2m$.

$$D(\epsilon)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}V\epsilon^{1/2}$$

1-1-a) à $T=0$ ϵ_F est définie par $\int_0^{\epsilon_F}D(\epsilon)d\epsilon=N$

Soit

$$(2V/8\pi^3)(4\pi k_F^3/3)=N$$

$$k_F=(3\pi^2N/V)^{1/3}\ \ ;\epsilon_F=(\hbar^2k_F^2/2m)\sim(N/V)^{2/3}$$

On peut écrire $D(\epsilon)=C\epsilon^{1/2}=(3N/2\epsilon_F^{3/2})\epsilon^{1/2}$.

Quelques ordres de grandeur de $n=N/V$ et ϵ_F:

Helium 3: $n=10^{28}m^{-3}$ $\epsilon_F/k_B=30K$

électrons de valence dans Cu: $n=10^{29}m^{-3}$ $\epsilon_F/k_B=10^5K\simeq 10eV$

électrons dans naine blanche: $n=10^{36}m^{-3}$ $\epsilon_F/k_B=30000eV$

neutrons dans noyau: $n=10^{42}m^{-3}$ $\epsilon_F/k_B=10^7K$

neutrons dans étoile à neutrons: $n=10^{45}m^{-3}$ $\epsilon_F/k_B=10^8eV$

1-1-b)

$$E=\int_0^{\epsilon_F}D(\epsilon)\epsilon d\epsilon=3N\epsilon_F/5$$

1-1-c)

$$P=-dE/dV=2N\epsilon_F/5V$$

'répulsion' due au principe de Pauli.

1-2) Justification du développement de Sommerfeld

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon$$

L'idée est que f a une variation rapide autour de μ. Sa dérivée est voisine d'une fonction $\delta(\epsilon-\mu)$. On va donc intégrer par parties en posant $K(\epsilon)=\int_{-\infty}^{\epsilon}g(s)ds$ (primitive de g) ce qui donne

$$I=-\int_{-\infty}^{+\infty}K(\epsilon)f'(\epsilon)d\epsilon$$

On fait ensuite un développement limité de K autour de μ ce qui donne

$$I=K(\mu)-K'(\mu)\int_{-\infty}^{+\infty}(\epsilon-\mu)f'(\epsilon)d\epsilon+...$$

et conduit au résultat donné dans le texte, que l'on va utiliser au maximum jusqu'au troisième terme de la série.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon=\int_{-\infty}^{\mu}g(\epsilon)d\epsilon+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2g'(\mu)+\frac{\pi^4}{120}(k_BT)^4g'''(\mu)$$

En appliquant ceci à $g(\epsilon) = D(\epsilon)$ et en utilisant le fait que μ est défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = N$, on obtient

$$0 = \int_{\epsilon_F}^{\mu} D(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(\mu) + ..$$

ce qui conduit à

$$\mu = \epsilon_F (1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{D'(\epsilon_F)}{D(\epsilon_F)} (\frac{k_B T}{\epsilon_F})^2 + O(k_B T / \epsilon_F)^4)$$

En 2d, $D(\epsilon)$ est une constante et on aurait donc $\mu = \epsilon_F$ à tous les ordres si on utilise le développement de Sommerfeld. En réalité ceci n'est pas tout à fait correct: le développement suppose que la fonction $g(\epsilon)$ est développable autour de μ avec un rayon de convergence infini. Ceci n'est pas vrai de $D(\epsilon)$, qui est discontinue en $\epsilon = 0$ (car $D(\epsilon) = 0$ pour $\epsilon < 0$). Il y'a donc en réalité des corrections en $\exp(-\epsilon_F / k_B T)$, qui ne se développent pas en puissances de $k_B T / \epsilon_F$.

En appliquant le développement à $g(\epsilon) = \epsilon D(\epsilon)$ on obtient l'énergie (à l'order $k_B T / \epsilon_F)^2$)

$$U(T) = U(T=0) + (\mu - \epsilon_F) \epsilon_F D(\epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (\epsilon_F D'(\epsilon_F + D(\epsilon_F))(k_B T)^2 = U(0) + \frac{\pi^2}{6} D(\epsilon_F)(k_B T)^2$$

La correction est en $(k_B T)^2 D(\epsilon_F)$ car un nombre d'électrons de l'ordre de $D(\epsilon_F) k_B T$ acquièrent une énergie $k_B T$. Pour C_V ceci donne une contribution linéaire en T:

$$C_V = (\pi^2/2) k_B N (k_B T / \epsilon_F)$$