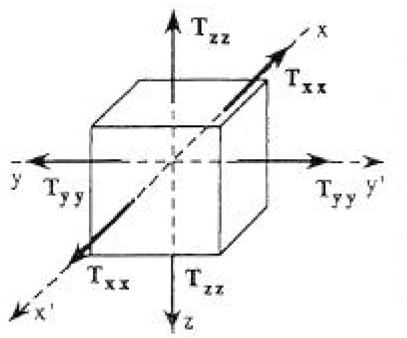
TD 3 - Milieux continus

Exercice 1



On considère un bloc homogène cubique (aire de la face S) soumis à des forces de traction T_x, T_y, T_z respectivement suivant les axes xx' yy' zz'.

1) Exprimer en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson σ, les expressions des déformations du cube le long de ces axes. On supposera que $T_{xx}/S=T_{yy}/S=T_{zz}/S=P$.

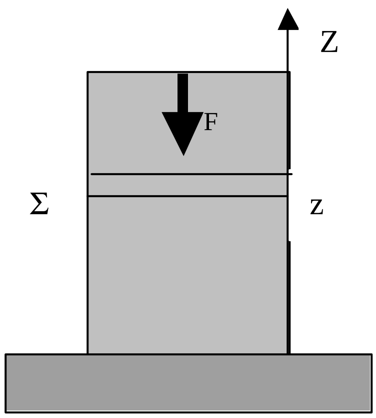
2) En déduire la variation de volume du cube en fonction de E et σ ainsi que l'expression du module de compression $k=P/(\Delta V/V)$.

A.N Calculer k pour l'acier ($E=2.1\ 10^{11} N/m^2$ $\sigma=0.29$).

3) Le cube est maintenant soumis à une compression suivant x, T_{xx} (<0), et en même temps contraint de manière à empêcher toute dilatation suivant yy' et zz'. Déterminer la longueur du bloc après compression et la comparer à celle que l'on obtiendrait pour un bloc subissant la même compression suivant xx' mais non contraint dans les autres directions.

Exercice 2

Une barre de section S de masse volumique ρ et de longueur au repos l est posée sur un socle rigide et soumise à l'action de la pesanteur. On suppose que les contraintes se répartissent uniformément sur la section.

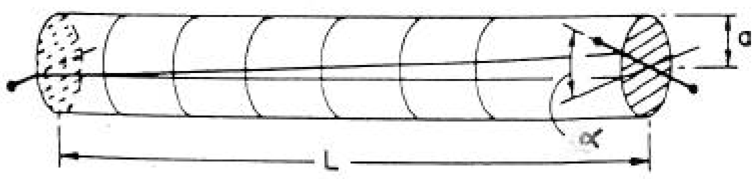


1) Evaluer la contrainte sur une section Σ située à la hauteur z. En déduire l'allongement de la barre.

2) On soumet cette barre à une force F (cf schema). Déterminer le déplacement de l'extrémité de la barre. Comment devrait varier la section S(z) de la barre pour que la contrainte soit la même en tout point ?

Exercice 3

Une poutre homogène cylindrique de rayon a d'axe Ox et de longueur L a une extrémité encastrée et l'autre libre. Elle est soumise à un moment M. Calculer la rigidité de torsion $C=M/\alpha$ où α est l'angle dont a tourné l'extrémité libre de la barre.



Exercice 4

Considérons une barre cylindrique d'axe Ox et de section S, dont les points sont animés d'un mouvement parallèle aux génératrices.

1) Déterminer la force qui s'exerce sur la section d'abscisse x ainsi que la force résultante sur l'élément de volume compris entre les abscisses au repos x et x+dx.

2) En déduire l'équation de propagation suivant Ox d'un ébranlement longitudinal.

3) Quelle est la vitesse de propagation d'une onde plane sinusoïdale.

A.N. $E=2\ 10^{11}\ Nm^{-2}$, $\rho=7.9\ 10^{3}$ kg m^{-3}

On s'intéresse maintenant à une barre, de longueur l, dont une extrémité est encastrée et l'autre libre. Cette barre est mise en vibration. Il se forme des ondes stationnaires de la forme

$$\boldsymbol{u(x,t) = A\ e^{j(wt-kx)} + B\ e^{j(wt+kx)}}$$

4) Montrer que seules certaines fréquences sont susceptibles de satisfaire aux conditions aux limites.

5) Quelle est la force maximale sur l'extrémité encastrée d'une barre, de section $1cm^2$, engendrée par une vibration dont la fréquence correspond à la fréquence de résonance la plus basse de la barre. On donne $E=2\ 10^{11}\ Nm^{-2}$ et $u_0/L=1/1000$.

Exercice 5

1) Tenseur de déformation

Dessiner la déformation d'un cube d'arêtes parallèles aux axes Ox Oy Oz correspondant au tenseur de déformation représenté par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & e & \mathbf{0} \\ e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Dessiner l'effet sur le cube de l'opération représentée par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2}e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Montrer qu'elle se décompose en une déformation vraie et une rotation.

2) Tenseur de contraintes

Ecrire le tenseur de contraintes d'une compression isotrope, d'un cisaillement pur.