TD 5 - Milieux continus

Exercice 1 : Ondes élastiques superficielles

On étudie la propagation de déformations dans un solide homogène illimité. L'équation d'un mouvement quelconque dans un milieu élastique isotrope s'écrit:

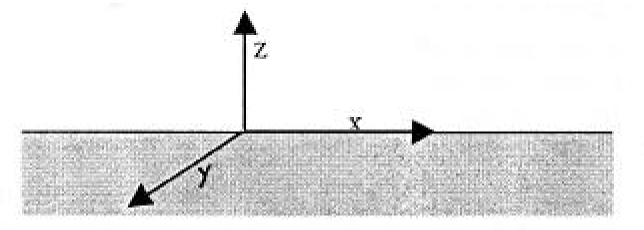
$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta \boldsymbol{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\, \boldsymbol{grad}(div\ \boldsymbol{u})$$

1) On s'intéresse à la propagation d'une onde plane dans la direction x. En supposant que la déformation ne dépend que de x, écrire les équations différentielles pour les trois composantes du vecteur **u**.

2) Montrer que les solutions de ces équations peuvent se séparer en ondes longitudinales et transverses et déterminer les vitesses de phase correspondantes.

On considère maintenant un solide s'étendant dans le demi-espace z<0. Il se propage au voisinage de la surface des ondes superficielles dont le vecteur déplacement est de la forme $\mathbf{u}=\mathbf{u}_t+\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_t$ et $\mathbf{u}_l$ étant solutions des équations:

$$\frac{1}{c_t^{\,2}}\ddot{\boldsymbol{u}}_t = \Delta \boldsymbol{u}_t \qquad\qquad \frac{1}{c_l^{\,2}}\ddot{\boldsymbol{u}}_l = \Delta \boldsymbol{u}_l$$



3) Montrer qu'un vecteur déplacement de la forme

$$\boldsymbol{u}_{t,l} = \boldsymbol{B}_{t,l}\ e^{\gamma_{t,l} z} e^{i(kx-\omega t)}$$

est solution de l'équation de propagation et déterminer γ_l et γ_t pour les parties longitudinales et transverses de l'onde.

4) Comparer les vitesses de propagation d'une onde longitudinale, transverse, et de surface.

5) Ecrire les conditions aux limites en z=0. Déduire de la valeur de u_{yz} et de rot u_l=0 que $B_{ly}=B_{ty}=0$. Justifier le nom d'onde de cisaillement vertical donné à ce type d'onde.

6) Sachant que div $\mathbf{u}_t$=0 et rot $\mathbf{u}_l$=0, déterminer les relations qui lient $\mathbf{u}_{tx}$ et $\mathbf{u}_{tz}$, ainsi que $\mathbf{u}_{lx}$ et $\mathbf{u}_{lz}$. Donner les grandes lignes de la méthode d'obtention de la relation de dispersion

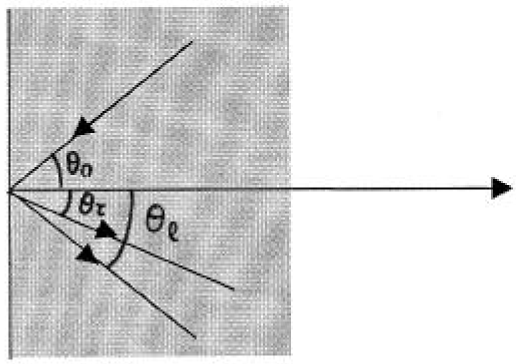
Exercice 2 : Réflexion à l'interface milieu-vide

On étudie la réflexion d'une onde longitudinale monochromatique de vecteur d'onde k, de pulsation ω et d'amplitude A_0 tombant sous un angle θ_0 sur l'interface plane d'un milieu avec le vide. Cette onde se transforme après réflexion en une onde mixte contenant une partie longitudinale (angle d'incidence θ_l, amplitude A_l) et une partie transverse (angle d'incidence θ_t, amplitude A_t). On admettra que les ondes réfléchies sont de même fréquence et que les

$$\frac{\sin q_r}{\sin q_i} = \frac{c_r}{c_i}$$

angles de réflexion sont déterminés par

Ou θ_r et c_r (resp. θ_i et c_i)sont l'angle d'incidence et la vitesse de phase de l'onde incidente (resp. refléchie).



1) Ecrire les coordonnés des vecteurs d'onde puis du déplacement pour les parties longitudinales et transverses de l'onde réfléchie.

2) Ecrire le tenseur de déformation à l'interface.

3) Quelles sont les conditions aux limites en x=0.

4) La loi de Hooke peut s'écrire sous la forme

$\sigma_{ik}=2\rho\, c_t^2 u_{ik}+\rho(c_l^2-2c_t^2)u_{ll}\,\delta_{ik}$

En déduire le système de deux équations dont A_l et A_t sont solutions et qui permettrait de déterminer les coefficients de réflexion (A_t/A_0 et A_l/A_0) pour les ondes longitudinales et transverses.