

MAITRISE DE PHYSIQUE
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON I
Examen de Physique des Milieux Continus (2 heures)
Session de Juin 2000.

Exercice 1: déformation d'un solide en rotation

On considère un cylindre solide de rayon R , animé d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour de son axe. On veut calculer l'augmentation du rayon du cylindre due à la rotation. On note ρ la masse volumique, E le module d'Young et σ le module de Poisson du matériau, considéré comme élastique, linéaire, homogène et isotrope. On suppose que le problème est invariant par translation le long de l'axe du cylindre. Le problème étant invariant par rotation, tous les champs dépendent donc uniquement de la distance r à l'axe.

1) Montrer, par une analyse dimensionnelle, que l'augmentation relative de rayon est de la forme

$$\frac{\delta R}{R} = f\left(\frac{\rho\Omega^2 R^2}{E}, \sigma\right) \quad (1)$$

où f est une fonction sans dimension. Montrer ensuite que

$$f\left(\frac{\rho\Omega^2 R^2}{E}, \sigma\right) = g(\sigma) \frac{\rho\Omega^2 R^2}{E} \quad (2)$$

où g est une fonction inconnue.

2) Pour obtenir la fonction g il faut résoudre l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{r})$

$$\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{u}) + (1 - 2\sigma)\Delta\vec{u} = -\frac{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E}\vec{f}_v(r) \quad (3)$$

où $\vec{f}_v(r)$ est la force par unité de volume

2-a) Préciser la nature de la force $\vec{f}_v(r)$, et donner son expression. Quel est le référentiel dans lequel est écrite l'équation d'équilibre?

2-b) En utilisant les expressions de la divergence et du laplacien pour un champ radial $\vec{u}(\vec{r}) = u_r(r)\vec{e}_r$, soit

$$\text{div}\vec{u}(\vec{r}) = r^{-1} \frac{d(ru_r(r))}{dr} \quad (4)$$

$$\Delta \vec{u}(\vec{r}) = \left(\frac{d}{dr} r^{-1} \frac{d}{dr} (r u_r(r)) \right) \vec{e}_r, \quad (5)$$

montrer que cette équation peut s'écrire

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left(r^{-1} \frac{d}{dr} (r u) \right) = -\rho \Omega^2 r \quad (6)$$

2-c) Résoudre cette équation en introduisant deux constantes d'intégration.

2-d) Montrer que la nécessité d'avoir un déplacement fini en $r = 0$ permet d'éliminer l'une des constantes d'intégration.

2-e) Quelle est la condition limite à appliquer en $r = R$? En déduire la seconde constante d'intégration. On rappelle que dans ce cas particulier, le tenseur gradient de déformation a deux composantes non nulles. $\epsilon_{rr} = du_r/dr$ et $\epsilon_{\theta\theta} = u_r/r$, et que la relation entre contrainte et déformation est

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\sigma)} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\sigma}{(1-2\sigma)} \delta_{ij} \epsilon_{ll} \right). \quad (7)$$

3) Estimer $\frac{\delta R}{R}$ pour un cylindre de métal de 10cm de rayon tournant à 6000tr/mn . On utilisera des valeurs raisonnables pour E , ρ et σ . (NB: Il n'est pas absolument nécessaire d'avoir résolu la question 2 pour donner une réponse à cette question)

Exercice 2: Diffusion dans un écoulement

On considère un fluide en écoulement qui contient des particules en suspension. L'écoulement est décrit par un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$. La densité de particules est $\rho(\vec{r}, t)$. En l'absence d'écoulement, les particules ont un coefficient de diffusion D .

1) Montrer que la concentration des particules obéit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \rho(\vec{r}, t) + D \Delta \rho(\vec{r}, t). \quad (8)$$

A quels phénomènes correspondent, respectivement, les deux termes du second membre de cette équation ?

2) A partir de l'équation (1), définir un nombre sans dimension (nombre de Péclet) qui quantifie l'importance des effets de convection par rapport à ceux de diffusion, en fonction des caractéristiques (vitesse typique U , longueur typique L) de l'écoulement.

3) Estimer le nombre de Péclet pour une particule de sphérique de rayon R soumise à une gravité g , en suspension dans un fluide. On estimera d'abord la vitesse de la particule, sachant que la différence de masse volumique entre la particule et le fluide est $\Delta\rho$. On utilisera la formule de Stokes Einstein $D = k_B T / (6\pi\eta R)$ pour estimer le coefficient de diffusion.

On donne $\Delta\rho = 100\text{kg/m}^3$, $T = 300\text{K}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$. Pour quelle taille de particules la diffusion devient-elle un phénomène important? Si le fluide est de l'eau ($\eta = 10^{-3}\text{Pa.s}$), discuter l'approximation faite pour estimer la vitesse de la particule.

4) Une tache circulaire de colorant est injectée à l'origine des coordonnées dans un écoulement bidimensionnel de cisaillement caractérisé par le champ de vitesse $v_x(x, y, z) = \alpha y$, $v_y(x, y, z) = 0$, $v_z(x, y, z) = 0$. Initialement, la tache est circulaire de rayon R , avec un bord bien net. Décrire qualitativement l'évolution de cette tache en fonction du temps. On introduira (en précisant sa signification) le temps $t_0 = D/(\alpha^2 R^2)$, et on supposera $\sqrt{Dt_0} \ll R$.