Maitrise de Physique, Université Lyon I, Année 2000-2001

Examen de Physique des Milieux Continus

28 Mai 2001, durée 2h.

Exercice 1 : contact de Hertz entre deux cylindres

On considère deux cylindres parallèles de même rayon R, en contact le long d'une de leurs génératrices. Les cylindres sont constitués d'un même matériau élastique de caractérisé par ses modules d'Young et de Poisson, E et σ.

On exerce une force par unité de longueur F pour écraser les cylindres l'un contre l'autre. On cherche à déterminer l'enfoncement δ des cylindres en fonction de F.

Reprendre les arguments utilisés pour obtenir le loi de Hertz du contact entre deux sphères et montrer que dans le cas des deux cylindres on doit avoir

$$F \sim E\delta. \tag{1}$$

De quoi dépend le coefficient de proportionnalité ?

Exercice II : Capillarité

On considère un récipient dont les bords verticaux sont deux plans formant un dièdre d'angle α. Ce dièdre est limité par un arc de cercle de rayon R (voir figure 1a).

Fig. 1 – (a) vue de dessus de la géométrie du récipient. (b) vue de profil schématique du liquide contenu dans le récipient, et définition correspondante du profil $h(r)$.

1) On remplit le récipient partiellement avec un liquide. Expliquer pourquoi le profil de ce liquide, défini par la fonction $h(r)$, n'est pas horizontal (figure 1b). A votre avis, quelle est la longueur maximale que peut avoir le récipient pour qu'il soit raisonnable de décrire l'interface par une fonction $h(r)$, sans tenir compte de sa forme dans la direction perpendiculaire ?

2) Soit γ l'énergie de surface gagnée lorsque le liquide est en contact avec le solide. Montrer que l'énergie totale d'une configuration associée à un profil $h(r)$ peut s'écrire

$$E[h(r)] = 2\gamma \int_0^R h(r)dr + \frac{\rho g \alpha}{2} \int_0^R h(r)^2 r dr \tag{2}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et ρ la densité du liquide.

3) Pour trouver le profil du liquide, on doit minimiser l'énergie par rapport à $h(r)$, à volume constant. Le volume du liquide étant $V[h] = \int_0^R h(r)\alpha r dr$, on va utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui consiste à minimiser par rapport à h la quantité $E[h] - pV[h]$, où p est une constante.

Montrer que cette minimisation conduit à un profil de la forme

$$h(r) = h_0 + \frac{B}{r} \tag{3}$$

Que vaut le coefficient B ? Comment déterminer la constante h_0 en fonction du volume total V_0 de liquide ?

Exercice 3 : évolution d'une bulle de vide dans un liquide.
A l'instant $t = 0$ existe dans un liquide une bulle sphérique de vide de rayon a_0. A $t = 0$, le liquide est au repos. La pression dans le liquide loin de la bulle est p_0. On va étudier le processus d'"implosion" par lequel la bulle disparaît, c'est à dire l'évolution du diamètre $a(t)$ de la bulle (qui reste sphérique) en fonction du temps.

L'écoulement du liquide sera considéré comme incompressible. On négligera la viscosité du fluide.

1) Si on appelle γ la tension de surface liquide-vide, quelle est la pression dans le liquide à l'interface liquide-vide, c'est à dire en $r = a(t)$? Exprimer cette pression en fonction de γ et a. Dans la suite, on négligera la tension de surface et on prendra $p = 0$ à la surface de la bulle.

2) Les trois paramètres du problème sont a_0, p_0 et ρ, masse volumique du fluide. Utiliser l'analyse dimensionnelle pour obtenir le temps T au bout duquel la bulle aura disparu en fonction de ces 3 paramètres, à un coefficient numérique près.

3) Montrer que le champ de vitesse à l'intérieur du fluide est de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{f(t)}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{4}$$

et que la fonction $f(t)$ est liée à l'évolution du rayon de la bulle par $a(t)$ par

$$f(t) = a(t)^2 \frac{da}{dt} \tag{5}$$

4) On appelle $\phi(r, t) = -f(t)/r$ le potentiel dont dérive le champ de vitesse (**??**). En intégrant l'équation d'Euler, montrer que à un instant donné,

$$\frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} + \frac{v(r, t)^2}{2} + \frac{p(r, t)}{\rho} \tag{6}$$

est une constante dans l'écoulement. En déduire que

$$-\frac{1}{r}\frac{df}{dt} + \frac{f(t)^2}{2r^4} + \frac{p(r, t)}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \tag{7}$$

5) En appliquant la relation (**??**) à la frontière de la bulle montrer que

$$a\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{p_0}{\rho} = 0 \tag{8}$$

6) Pour résoudre l'équation (**??**), on prend comme variable $Y(a) = \left(\frac{da}{dt}\right)^2$. Montrer que $\frac{dY}{da} = 2\frac{d^2a}{dt^2}$. En déduire que l'équation (**??**) peut se réécrire sous la forme

$$a\frac{dy}{da} = -(2p_0/\rho + 3Y) \tag{9}$$

Intégrer l'équation (**??**) pour obtenir

$$a^3(3Y + 2p_0/\rho) = a_0^3(2p_0/\rho) \tag{10}$$

(on fixera la constante d'intégration en considérant les valeurs de a et Y à $t = 0$).

7) A partir de (**??**), montrer que

$$\frac{da}{dt} = -\left(\frac{2p_0}{3\rho}\right)^{1/2}\left[\frac{a_0^3}{a^3} - 1\right]^{1/2}. \tag{11}$$

En déduire le temps de disparition de la bulle, $T = -\int_0^{a_0} \frac{dt}{da}da$. On donne

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}dx = 1,29. \tag{12}$$