

## 1 Diffusion thermique

Sur un panneau d'information touristique en Méditerranée, on lit l'information suivante: "La température moyenne à la surface varie entre 12 degrés en hiver et 26 degrés en été; en revanche, à 40 mètres de profondeur, la température de l'eau est constante."

1) le modèle discuté en cours peut-il s'appliquer en prenant comme origine la surface de la mer? Pourquoi?

2) en supposant que le modèle peut s'appliquer à partir de 10m de profondeur, et sachant que la conductivité thermique de l'eau de mer à 20 degrés Celsius est  $\lambda = 0.6 \text{ J.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , que la capacité calorifique par unité de volume est  $C = 4.2 \cdot 10^6 \text{ J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$ , l'information ci-dessus est-elle correcte? On estimera numériquement l'amplitude de variation à 40m de profondeur, en précisant les hypothèses faites sur la variation de  $\lambda$  et  $C$  avec la température.

## 2 Elasticité

On considère la situation représentée dans la figure 1: un tube vertical T de section carrée (de côté  $a$ ), parfaitement indéformable, contient un parallélépipède rectangle S, de même section, formé d'un matériau solide élastique. Le but de l'exercice est de déterminer la force verticale exercée par S sur le fond du tube T, sachant qu'il existe un frottement entre la paroi interne du tube T et le solide S. La masse volumique du solide S est  $\rho$ , sa hauteur  $H$ , sa masse  $M = \rho a^2 H$ . On note  $g$  l'accélération de la pesanteur.

1) Si on remplaçait le solide S par une colonne d'eau de même masse, quelle serait la force verticale exercée par l'eau sur le fond du tube T?

2) Le solide S est un matériau élastique de coefficient de Poisson  $\nu$ . On suppose que les contraintes ne dépendent que de la coordonnée  $z$ . On note  $\sigma_{\perp}$  la contrainte exercée par le cylindre sur les parois du tube dans la direction horizontale ( $\sigma_{\perp}$  s'identifie à  $\sigma_{xx}$  ou à  $\sigma_{yy}$ , suivant la paroi considérée) Montrer que la condition d'indéformabilité du tube extérieur implique la relation

$$\sigma_{\perp}(z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}(z)$$

On raisonnera en calculant la déformation suivant  $x$  d'une tranche de solide d'épaisseur  $dz$ , qui est soumise à la contrainte  $\sigma_{zz}$  verticalement et à  $\sigma_{\perp}$  dans les deux directions horizontales, et en exprimant que cette déformation est nulle.

3) L'existence d'un frottement sur les parois du tube T est modélisée par la relation suivante, valable sur les parois perpendiculaires à Ox:

$$\sigma_{xz}(z) = \mu\sigma_{\perp}(z)$$

avec une relation similaire

$$\sigma_{yz}(z) = \mu\sigma_{\perp}(z)$$

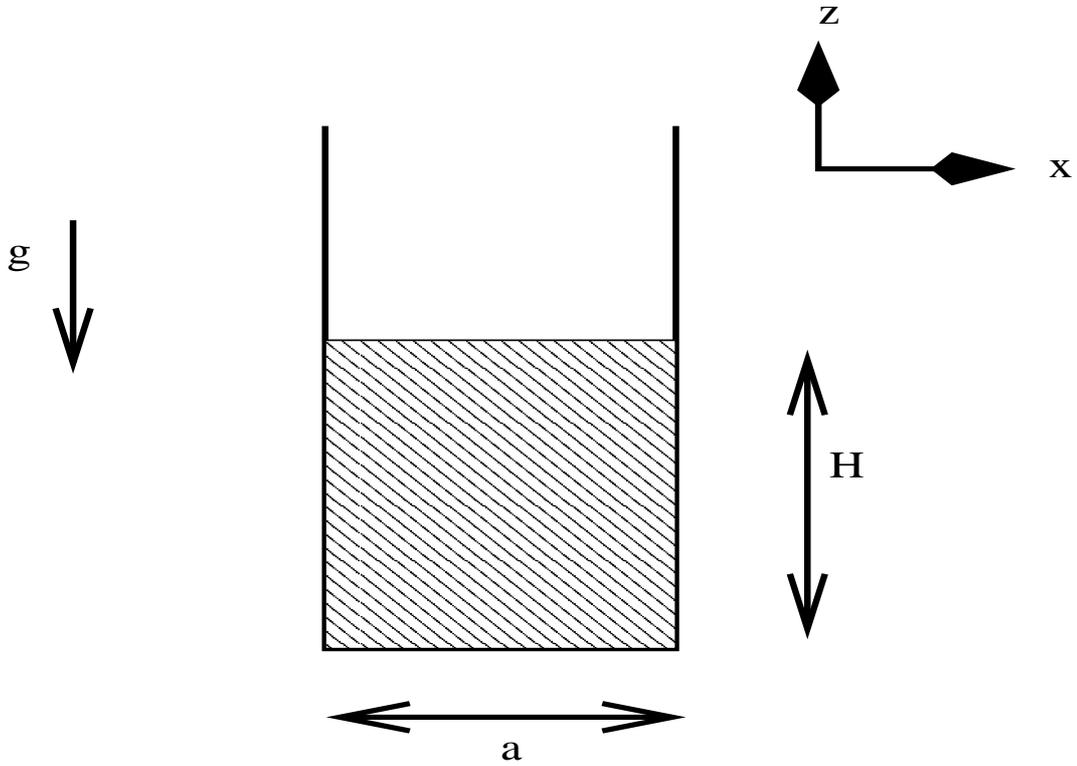


FIG. 1

sur les parois perpendiculaires à  $Oy$ .  $\mu$  est un coefficient de frottement sans dimension.

En considérant l'équilibre des forces verticales sur une tranche d'épaisseur  $dz$ , montrer que

$$\frac{d\sigma_{zz}(z)}{dz} - \rho g - \frac{4\mu\nu}{(1-\nu)a}\sigma_{zz}(z) = 0$$

4) En résolvant l'équation différentielle ci dessus, montrer que  $\sigma_{zz}(z)$  est de la forme

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 (1 - \exp(\alpha(z - H)))$$

et préciser les valeurs des constantes  $\sigma_0$  et  $\alpha$ .

En déduire la force ressentie par le fond du tube, qu'on exprimera en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\nu, \mu$ ,  $H$  et  $a$ . Commenter. Dans quel cas retrouve t'on le résultat de la question 1?

### 3 Hydrodynamique

On considère un écoulement dit "stratifié" entre deux plans parallèles à  $xOy$  (figure 2) situés en  $z = 0$  et  $z = H$ . Le fluide 1 est de l'eau de viscosité  $\eta_1$ , le fluide 2 est une huile de viscosité  $\eta_2$ . L'épaisseur d'eau est  $h_1$ , l'épaisseur d'huile  $h_2$  ( $H = h_1 + h_2$ ).

1) On suppose que l'huile et l'eau ont la même densité, donc que il n'y a pas d'effet de la gravité. Soient  $\gamma_{S1}$  la tension de surface entre l'eau et le solide,  $\gamma_{S2}$  celle entre l'huile et le solide,  $\gamma_{12}$  la tension de surface entre huile et eau. Quelle est la condition sur ces trois quantités pour que puisse être réalisée, à l'équilibre, la situation représentée à gauche de la figure 2 plutôt que celle représentée à droite?

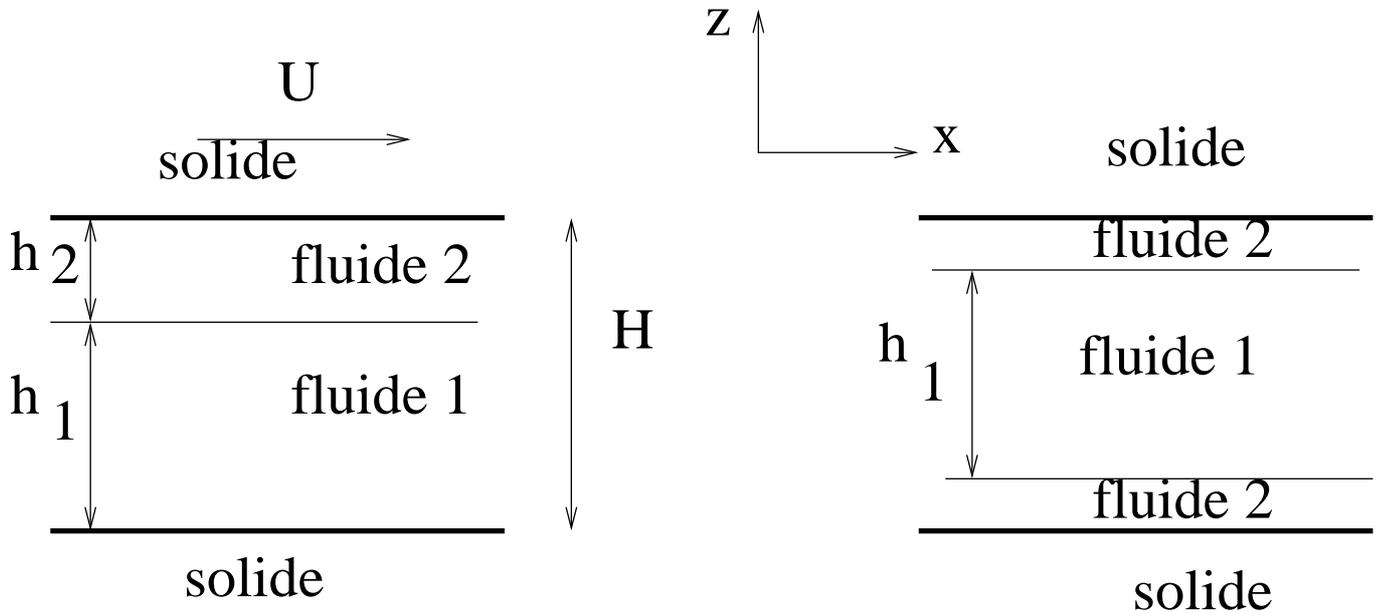


FIG. 2

2) On suppose la situation de gauche réalisée. La plaque solide supérieure est en mouvement à la vitesse  $U$  dans la direction  $x$  (écoulement de Couette plan). Calculer tout d'abord le profil de vitesse en supposant que  $h_2 = 0$ , c'est à dire qu'il y a un seul fluide de viscosité  $\eta_1$ .

3) On suppose maintenant que il y a deux fluides. Préciser les conditions limites que doivent vérifier la vitesse  $v_x(z)$  et la contrainte  $\sigma_{xz}$  à l'interface entre les deux fluides. En déduire la condition limite pour  $\partial v_x / \partial z$  à cette interface.

3) Calculer le profil de vitesse  $v_x(z)$  dans les deux fluides, et en faire une représentation schématique (pour cette représentation on supposera  $\eta_2 = 2\eta_1$ ). Calculer la force par unité de surface exercée sur la plaque supérieure, et définir une viscosité d'un fluide "moyen" équivalent à la superposition des couches d'eau et d'huile.