TD 7 - Milieux continus

Exercice 1 : Déformation dans un écoulement plan bidimensionnel

A- On étudie l'écoulement caractérisé par le champ de vitesses
$V_x=ax$ $\quad\quad$ $V_y=-ay$ $\quad\quad$ avec $a>0$
Le vecteur vitesse est indépendant de z

1) Déterminer l'accélération d'un élément de fluide en tout point (x,y).
2) Quel est l'équation des lignes de courant.
3) L'écoulement est il compressible ou incompressible , rotationnel ou irrotationnel.
4) Soit un rectangle de petite taille pris à un instant initial au point (x_0,y_0) et de cotés égaux de longueurs dx et dy. Comment se déforme-t-il au cours d'un temps dt court.
5) Traiter le même problème à l'aide du tenseur de gradient de vitesse:

$$c_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$$

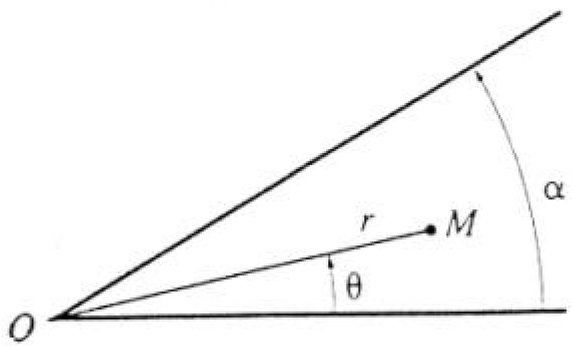
B- On étudie maintenant l'écoulement dit de cisaillement caractérisé par
$V_x=gy$ $\quad\quad$ $V_y=0$ $\quad\quad$ $g>0$

1) Quel sont les lignes de courant ainsi que les caractéristiques générales de cet écoulement
2) Décomposer le champ de vitesse en la somme d'un écoulement rotationnel et d'un écoulement irrotationnel

Exercice 2 : Ecoulement dans un dièdre

On étudie le mouvement d'un fluide parfait dans un dièdre d'angle α. Cet écoulement sera supposé irrotationnel et permanent. L'espace est repéré par ses coordonnées cylindrique (r,θ,z). Le fluide s'écoule de la zone définie par $\theta=0$ vers la zone définie par $\theta=\alpha$. On donne l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques:

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$



1) Pour un écoulement irrotationnel, la vitesse dérive d'un potentiel ϕ. Déduire de l'équation de conservation de la masse que $\Delta\phi=0$.
2) Soit r et θ les coordonnées cylindriques, on cherche ϕ sous la forme $\phi(r,\theta)=f(r)g(\theta)$, Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $g(\theta)$

3) Au contact des parois du dièdre le fluide s'écoule tangentiellement à ces parois. En déduire l'expression de g(θ) en fonction de θ, α , on supposera que la vitesse orthoradiale ne s'annule pas à l'intérieur du dièdre.
4) f(r) est de la forme $f(r)=a\ r^n$ ou A est une constante positive. Donner l'expression de n en fonction de α.
5) En déduire le champ de vitesse à l'intérieur du dièdre. Montrer que le module de la vitesse est indépendant de θ.

Exercice 3 : Ligne de courant et trajectoires de la houle linéaire

On étudie la cinématique d'une vague se propageant à la surface d'un fluide incompressible pesant. On se limite au cas d'une houle bidimensionnelle d'amplitude a, de vecteur d'onde k, de pulsation ω et qui se propage dans la direction x. Le champ de vitesse du fluide sera déterminé par:

$$v_x(t) = A\ e^{kz} \cos(kx - wt)$$

$$v_z(t) = A\ e^{kz} \sin(kx - wt)$$

Le niveau de la surface libre est z(t)= A/ω cos(kx+ωt).

1) Montrer que l'écoulement est incompressible et irrotationnel, déterminer alors le potentiel des vitesses.
2) Déterminer la trajectoire d'une particule du fluide au cours du temps (on supposera que chaque particule s'éloigne peu de sa position moyenne) et la forme des lignes de courant.