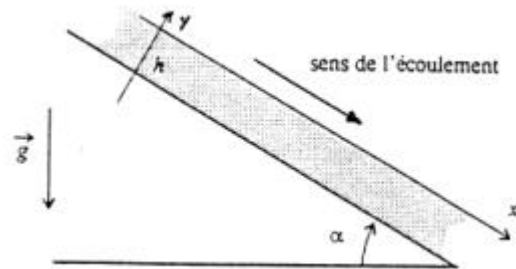


TD 8 - Milieux continus

Exercice 1 : Ecoulement d'un fluide le long d'un plan incliné

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné soumis aux seules forces de pesanteur. Soit α l'angle du plan incliné avec un plan horizontal. La direction de l'écoulement Ox est la ligne de plus grande pente et la vitesse du fluide est de la forme $\mathbf{v} = v(x,y) \mathbf{e}_x$, h est la hauteur de liquide supposée uniforme et P_0 est la pression atmosphérique.



- 1) Après avoir montré que $\mathbf{v}$ ne dépend que de y , calculer la pression dans le fluide à partir de l'équation de Navier-Stokes.
- 2) Déterminer les conditions aux limites en $y=0$ et $y=h$.
- 3) Ecrire l'expression de la vitesse du fluide.
- 4) Quelle force exerce le fluide tangentiellement au plan.

Exercice 2 : Ecoulement de Poiseuille

On s'intéresse maintenant à l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un conduit cylindrique de section circulaire. Le tube est dirigé suivant Oz et a un rayon R . La vitesse du fluide est parallèle à Oz .

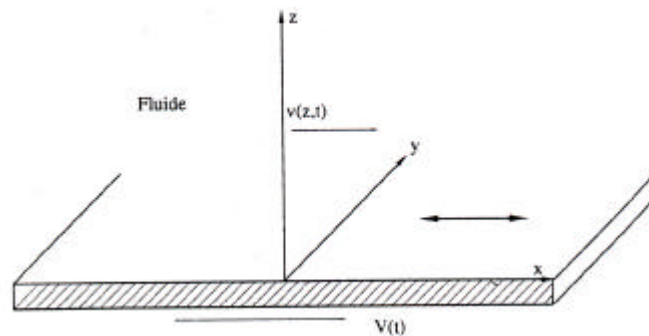
- 1) Après avoir montré que la vitesse ne dépend que de r , déterminer l'accélération d'une particule du fluide. Ecrire en coordonnées cylindriques les composantes de l'équation de Navier-Stokes.
 - 2) Montrer que la pression est la même en tout point d'une section droite.
 - 3) Déterminer la vitesse dans le fluide.
 - 4) Calculer le débit dans un conduit de longueur L en fonction de ΔP , différence de pression entre les deux extrémités du conduit.
 - 5) Quelle est la force qu'exerce le fluide sur le conduit.
- Le tube décrit ci-dessus est maintenant connecté à un réservoir circulaire de rayon R_0 et rempli d'un liquide incompressible. Le réservoir se vide par l'intermédiaire du tuyau (longueur L section R). Le liquide contenu dans le réservoir est pratiquement en équilibre hydrostatique ($R_0 \gg R$).
- 6) Exprimer le débit volumique du tube et en déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de $h(t)$
 - 7) Intégrer cette équation différentielle et déterminer la durée de vidange du réservoir, commenter.

Exercice 3 : Mouvement oscillant dans un fluide visqueux

Un fluide incompressible visqueux est en contact avec une surface plane illimitée qui effectue dans son plan un mouvement sinusoïdal de fréquence ω . On veut déterminer les mouvements induits dans le fluide. La surface en mouvement définit le plan xy et les z positifs sont pris du côté du fluide. L'axe x définit la direction de l'oscillation du plan solide et la vitesse de la plaque est donnée par : $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$

On supposera que le fluide n'est soumis à aucune force extérieure et qu'il existe pour $z > \infty$ un plan perpendiculaire à z où la pression constante.

En régime permanent, le champ de vitesse étant de la forme $\mathbf{v} = v_x(z, t) \mathbf{e}_x$



- 1) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par v_x
- 2) Résoudre cette équation en utilisant une notation complexe avec v_x de la forme $v_x = f(z)e^{i\omega t}$.

Quelle est la profondeur de pénétration de l'onde dans le fluide (longueur au bout de laquelle l'amplitude de la vitesse est divisée par e)

- 3) Calculer la force de frottement agissant sur l'unité de surface sur le plan solide
- 4) Calculer la valeur moyenne de l'énergie dissipée par unité de temps et de surface au cours de ce mouvement.

Exercice 4 : Tourbillon de Rankine

On considère un fluide parfait contenu dans un récipient cylindrique de rayon R . On impose au fluide un mouvement de rotation à la périphérie. On suppose que la vitesse est de la forme $(0, v, 0)$ en coordonnées cylindriques et que la vorticité est concentrée dans un cylindre de rayon a .

$$\begin{aligned} 2\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v} & \quad \mathbf{w} = \omega \mathbf{z} & 0 < r < a \\ & \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{si } r > a \end{aligned}$$

- 1) Déterminer la vitesse en tout point du fluide
- 2) Quelle est la forme de la surface libre
- 3) Déterminer la pression dans le fluide pour $r < a$ en se plaçant dans un référentiel tournant à la vitesse ω , retrouver la forme de la surface libre

Exercice 5 : Ecoulement rotationnel

L'écoulement rotationnel permanent d'un fluide parfait incompressible est caractérisé par le vecteur tourbillon $\mathbf{W}$ avec $\text{rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{W}$.

1) Montrer que la vitesse en tout point M du fluide peut s'écrire :

$$\mathbf{v}(M) = \text{rot } \mathbf{A}(M)$$

En déduire la relation locale entre le laplacien du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le vecteur tourbillon $\mathbf{W}$ si on suppose $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

2) Calculer la circulation du champ de vitesse $\mathbf{v}$ du fluide sur un contour circulaire de centre O, de rayon r, d'axe Ox, où règne un vecteur tourbillon uniforme $\mathbf{W}$ parallèle à Ox, en déduire la vitesse $\mathbf{v}$ pour un écoulement à symétrie cylindrique d'axe Ox.

3) Quelle analogie avec l'électromagnétisme les résultats ci-dessus vous suggèrent-ils ? Déterminer une expression intégrale du champ de vitesse $\mathbf{v}$ du fluide et du potentiel $\mathbf{A}$ en fonction de Ω .

On étudie maintenant une configuration où le vecteur tourbillon est non nul dans un tore circulaire de centre O, de rayon a, de section négligeable appelée boucle de vortex (par analogie avec une boucle de courant ou dipôle magnétique), et nul partout ailleurs. La boucle de vortex est une ligne de vortex fermée (Ω est tangent en tout point à la boucle).

On appelle :

Intensité du vortex : le flux C de Ω à travers une section droite du tore

Moment du vortex : la quantité vectorielle $\mathbf{M} = \iint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$ où s est une surface qui s'appuie sur la boucle de vortex

4) Montrer, par analogie avec l'électromagnétisme, qu'en un point M loin de la boucle (avec $r \gg a$), le champ de vitesse dérive d'un potentiel de la forme $\mathbf{A} = K \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$

où K est un nombre sans dimension que l'on déterminera.

5) Le moment du vortex étant dirigé suivant Oz déterminer le potentiel $\mathbf{A}$ et la vitesse $\mathbf{v}$ en tout point du fluide repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ , ϕ).