
École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
UFR 921 – Science du calcul et ingénierie Mathématique

Méthode de la frontière élargie pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 mai 2004

pour l'obtention des grades :

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI
et

Docteur de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis

(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Mourad ISMAIL

Composition du jury

Rapporteurs : Michel CROUZEIX
Adélia SEQUEIRA

Examineurs : Christine BERNARDI (Responsable de la cotutelle)
Taïeb HADHRI (Responsable de la cotutelle)
Yvon MADAY
Bertrand MAURY (Directeur de thèse)

Invités : Silvia Bertoluzza
Lassaad EL ASMI

La rédaction de cette thèse et le développement des différents codes de calcul ainsi que la présentation graphique des résultats numériques ont été réalisés sous le système d'exploitation libre Debian GNU/Linux en utilisant des outils libres et/ou gratuits : thloria, teTeX, CVS, Emacs, XFig, gcc, gdb, OpenDX, Plotmtv, Xmgrace.

À Maya,
à la mémoire de mon grand-père.

*« Faute de pouvoir voir clair,
nous voulons, à tout le moins,
voir clairement les obscurités. »*
Sigmund Freud

Remerciements

Le bon déroulement de cette thèse, jusqu'à son dénouement, sont en grande partie imputables à Bertrand Maury. Je le remercie du fond du coeur, aussi bien pour avoir dirigé mes travaux avec talent que pour m'avoir accompagné amicalement dans ce cheminement. Son énergie, ses compétences et sa constante disponibilité sont autant de qualités sans faille que j'apprécie chez lui et qui m'ont beaucoup aidé pour mener à bien ce travail. Ce fut un réel plaisir de l'avoir comme directeur de thèse et c'est une chance de l'avoir comme ami. J'espère encore apprendre à son contact.

Je profite aussi de ces quelques lignes pour adresser mes sincères remerciements à Catherine (sans oublier Lucie) pour sa gentillesse et son accueil toujours chaleureux.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Christine Bernardi et Taïeb Hadhri pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en acceptant de diriger cette thèse dans le cadre d'une cotutelle entre l'Université Pierre et Marie Curie et l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis. Taïeb Hadhri m'a accueilli dans le laboratoire qu'il dirige à l'École Polytechnique de Tunisie. Ses qualités scientifiques et humaines sont pour beaucoup au bon fonctionnement du laboratoire. Je le remercie profondément pour tous ses conseils, ainsi que pour sa disponibilité malgré un agenda souvent très chargé.

Ce fut un grand honneur que Michel Crouzeix et Adélia Séqueira aient accepté de rapporter sur cette thèse. Je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Silvia Bertoluzza pour ses conseils, son amitié et sa précieuse collaboration au sein de la *FBM team*.

Faire partie du Laboratoire Jacques-Louis Lions, même en tant que thésard, est sans doute un avantage; non seulement par les conditions offertes mais aussi grâce à la convivialité qui y règne. Que tous ses membres trouvent ici mes sincères remerciements. Je remercie particulièrement Vivette Girault, Yvon Maday et Olivier Pironneau pour les précieux conseils qu'ils m'ont donnés et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je profite aussi de ces quelques lignes pour adresser ma gratitude aux organisateurs du groupe de travail « Méthodes Numériques » : Yves Achdou, Christine Bernardi et Yvon Maday. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me confiant la responsabilité de la coordination du groupe de travail pendant un an et demi.

Le bon fonctionnement du laboratoire doit beaucoup à son personnel administratif et technique. Que Mesdames Danièle Boulic, Liliane Ruprecht, Martine Legras et Luce Loriller trouvent ici mes sincères remerciements. Une pensée particulière va à Monsieur Christian David pour son efficacité sans faille. Je le remercie vivement pour l'impression de ce document.

En Tunisie, j'ai la chance de faire partie du Laboratoire d'Ingénierie Mathématique de l'École Polytechnique de Tunisie. L'ambiance conviviale qui y règne est le fruit du dévouement de ses membres. Je les remercie tous. Une pensée particulière se tourne vers Lassaad El Asmi pour ses nombreux conseils, ses encouragements et son amitié.

Le financement de ma thèse a été assuré dans le cadre des coopérations franco-tunisiennes. Je remercie les responsables scientifiques de ces coopérations pour leur confiance. Je cite en particulier Christine Bernardi, Taïeb Hadhri, François Feuillebois, Benoît Perthame, Lassaad El Asmi, Jean-Frédéric Gerbeau et Bertrand Maury.

Derrière tout projet scientifique, notamment dans le cadre d'une coopération, il y a une lourde tâche administrative. Je remercie les différents responsables administratifs qui, à un moment ou un autre, m'ont apporté une aide précieuse. Ma gratitude va particulièrement à Madame Latifa Belhadj (Université du 7 novembre à Carthage), Madame Faranak Grange (Relations Internationales de l'INRIA), Mesdames Descorps, Mandire et Quillivic (Institut Français de Coopération), Madame Brigitte Bailly (EGIDE), Madame Sandrine Lemoigne (Direction des relations internationales de l'Université Pierre et Marie Curie), Mesdames Amel, Aouatef et Leïla (École Polytechnique de Tunisie) et Monsieur Salem (École Nationale d'Ingénieurs de Tunis).

Merci enfin à Frédéric Coquel et Cristinel Mardare pour leur amitié et leur gentillesse sans limite. Aussi merci à tous ceux qui ont partagé (supporté) mon quotidien de thésard : mes compagnons du bureau 3D18 (Alban toujours pressé!, Marcela une icône de gentillesse, Mounir, Louis, Nicolas, Philippe mon fidèle allié contre certains dictateurs dans le bureau ;-), et Sorin l'ambassadeur de la paix), et bien évidemment les autres joyeux thésards du Laboratoire Jacques-Louis Lions. En particulier : Antoine, Augusto, Cécile, Delphine, Filipa, Hamdi, Hammadi, Karim, Leonardo, Martin, Sever et Vincent.

Beaucoup d'entre eux font (ou ont fait) partie des membres de l'un ou de l'autre de mes deux labos d'accueil, mais j'ai choisi de les remercier séparément parce qu'on a partagé d'autres bons moments « extra-boulot » (à l'annexe, au shanon, ...) : Stef (Delpinux), merci pour ton amitié sincère, ta serviabilité et pour les bons moments que l'on a partagé. Une petite (avant) dernière pour la route ? J'espère qu'avec Bertrand on renouera avec la tradition de la pizza du vendredi, non seulement pour le plaisir de manger (*Regina, Calzone et Cipolla*) mais aussi pour noircir encore les nappes de symboles mathématiques. On en aura encore beaucoup à faire ;-).

Merci à PascUal (je dirais plutôt que c'est moi qui ai gagné! rappelle-toi des règles du jeu;-)), Phil, le grand ..., (et Corine), Fred (c'est bientôt la crémaillère!), Christophe (Jesunix), Laurent (Bozo), Olivier, Alex aka Sig.na. A., j'espère que cette fois sera la bonne!. On a la chance (et pas le choix!) de t'avoir dans le bureau :-), Hyam (l'alliée de la cheftaine!), Jérôme (et Armelle), Paul (et Hélène), Jean-Luc (je crois que je suis ...) et Tahar (merci aussi pour tes conseils).

Merci à Mohammed (et aussi à sa femme Françoise, sans pour autant oublier le petit Othmane!) pour son amitié sincère, sa serviabilité et sa disponibilité sans limite.

Hatem, Maher, Mohamed (Belhadj), Kamel et Khaled, je ne saurais comment vous remercier ! vous étiez là dans le pire de mes situations. Je vous en suis très reconnaissant.

Je n'oublierai certainement pas mes ami(e)s de l'autre côté de la Méditerranée : Yosr, Mohamed, Faiza, Chokri, Jaballah et Souhail. Merci aussi à tous les thésards du LIM. Un clin d'oeil particulier à Aroua (une amie de longue date, Tunis, Monastir, Nabeul, ... et j'en passe!).

Chaouki, bientôt 13 ans d'amitié-fraternité. Même parcours, chemins un peu différents mais même détermination pour un même but. Que dire de plus ?

Une pensée particulière pour Kamilia, Rachid, Besma, Jamel, Aouatef et Hamida. On dirait que nous nous soyons perdus de vue ! loins des yeux mais près du cœur.

Mon oncle-ami Mongi, tu as toujours été mon soutien moral dans ma scolarité. C'est grâce à tes conseils que je commence – enfin – à « voler de mes propres ailes ».

Je remercie enfin toute ma belle famille et toute ma famille pour leur soutien. Merci à Aïda et Hédi. Merci aux Majouli

Leïla et Gérard, merci pour tout ce que vous avez fait pour moi. Sans vous ma vie parisienne n'aurait pas été pareille. J'ai beaucoup appris à votre contact, notamment quand on se réunissait

le dimanche chez vous autour de la table familiale (avec Estelle et Adel). Merci encore à « GéGé » pour avoir relu avec attention ma thèse. Grâce à toi le manuscrit a gagné en clarté.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots, et qu'eux seuls auront le courage et la patience de lire ces pages jusqu'au bout : je pense à vous, mes chers parents, ma soeur, mon frère et ma très douce grand-mère. Vos encouragements et votre soutien n'ont jamais fait défaut.

Mon cher grand-père, on dirait que dans ta souffrance tu as attendu inlassablement mon retour pour me dire « À Dieu » ...tes derniers mots raisonnent encore dans ma tête et ton image restera à jamais gravée dans ma mémoire. Repose en paix, on ne t'oubliera jamais.

Ma petite famille est sans doute celle qui a payé le prix le plus cher, ma femme a su assumer avec beaucoup d'amour et une patience exemplaire. Je ne saurais ni comment la remercier ni lui dire si ce que j'ai fait valait le coup ! « Merci » Rakia ... bien que dans ce contexte, le moins que je puisse dire sur ce terme est qu'il est dépourvu de tout sens !

Pour la petite Kiko, à qui j'ai dédié ce travail, j'ose à peine lui dire : « excuse moi ma grande. Promis, un jour je t'expliquerai ».

Table des matières

Table des figures	xi
Liste des algorithmes	xv
Notations	1
Introduction générale	5

Partie I Résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés	9
---	---

Chapitre 1

État de l'art. Méthodes existantes	11
------------------------------------	----

1.1 Problèmes modèles	12
1.2 Éléments finis conformes avec maillage adaptatif	13
1.3 Méthodes numériques basées sur des maillages cartésiens	14
1.3.1 Méthode de la frontière immergée (<i>Immersed Boundary Method</i>)	14
1.3.2 Méthodes de domaines fictifs	15
1.3.3 Maillage localement adapté	18
1.3.4 <i>Physalis</i>	19
1.3.5 Couplage FEM-BEM	21
1.3.6 Couplage Différences finies – BEM	22
1.3.7 Schéma aux différences finies corrigé	23

Chapitre 2

Méthode de la frontière élargie (*The Fat Boundary Method*) 25

2.1	Introduction et motivation	26
2.2	Principe de la méthode	26
2.3	Formulation multi-domaines	26
2.3.1	Cas des conditions aux limites homogènes	26
2.3.2	Cas des conditions aux limites non-homogènes	34
2.4	Formulation de point fixe	35

Chapitre 3

Méthode de la frontière élargie : discrétisation et implémentation 41

3.1	Quelques outils nécessaires	42
3.1.1	Théorème de NITSCHÉ et SCHATZ	42
3.1.2	Rappel de quelques notations	42
3.1.3	Inégalité inverse pour les fonctions harmoniques	43
3.1.4	Projection de GALERKIN	43
3.2	Problèmes discrets	44
3.2.1	Schéma semi-discret	44
3.2.2	Espaces d'approximation et Algorithme	52
3.3	Méthodes de résolution et implémentation	54
3.3.1	Problème global	54
3.3.2	Problème local	62
3.4	Tests numériques	68
3.4.1	Le Laplacien dans un domaine perforé. Un nombre « assez grand » de particules.	68

Chapitre 4

Estimation de l'erreur de discrétisation par la F.B.M. 71

4.1	Rappel de quelques notations	72
4.2	Estimation d'erreur	73
4.3	Validations numériques	76
4.3.1	Test numérique dans le cadre d'une résolution locale exacte	77
4.3.2	Test numérique dans le cadre d'une approximation de $\frac{\partial v}{\partial n}\Big _{\gamma}$	77

Chapitre 5**Cas des conditions de Neumann au bord du trou****79**

5.1	Algorithme	80
5.2	Implémentation	82
5.3	Tests numériques	84
5.4	Validation numérique	88

Partie II Vers les écoulements fluide-particules**91**

Chapitre 6**Discrétisation des équations de Navier-Stokes****93**

6.1	Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles incompressibles . . .	94
6.2	Discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes	94
6.2.1	La méthode des caractéristiques	95
6.2.2	Les méthodes de projection	96
6.3	Discrétisation en espace des équations de Navier-Stokes	98
6.4	Un modèle pour l'interaction fluide-particule	99
6.5	conclusion / perspectives	102

Chapitre 7**Simulations numériques****103**

7.1	Convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules fixes	104
7.2	Convection-diffusion de la chaleur autour de deux boules en mouvement	106
7.3	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique	109
7.4	Écoulement autour d'une sphère	122
7.5	Écoulement dans un canal contenant deux obstacles sphériques	129
7.6	Écoulement autour d'un nombre important de boules fixes	136

Conclusion et perspectives**139**

Annexes

Annexe A

Quelques rappels utiles

143

- A.1 Formule de quadrature de Gauss-Legendre 144
- A.2 Formulaire 145
- A.3 Inégalité de Cauchy 145

Annexe B

L'élément fini Q^1

147

- B.1 Transformations de coordonnées 149
- B.2 Intégration numérique sur l'élément de référence 149
- B.3 Matrices de rigidité et de masse 149

Annexe C

Rappels de géométrie

151

- C.1 Angles d'Euler 152
- C.2 Polygones sphériques 153

Index **155**

Bibliographie **159**

Table des figures

1	Géométrie.	1
1.1	Exemple représentatif de la géométrie d'un domaine perforé.	12
1.2	Maillage non structuré.	14
1.3	Exemple 1D - Saut de la dérivée normale de la solution.	16
1.4	Exemple (bidimensionnel) des maillages de Ω et de γ	17
1.5	Exemple (bidimensionnel) des maillages de Ω et de B	18
1.6	Maillage localement adapté.	19
1.7	<i>Physalis</i> . Exemple des « cages » extérieure et intérieure.	20
1.8	Couplage Différences finies – BEM.	22
1.9	Schéma aux différences finies corrigé.	23
2.1	Exemple (bidimensionnel) des maillages local et global.	27
2.2	Exemple du domaine dans le cas bidimensionnel.	27
3.1	Géométrie.	43
3.2	Diagramme définissant les opérateurs $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$, et $\mathbf{T}_h$	45
3.3	Maillage global.	54
3.4	Exemple de la décomposition par blocs pour $k = 4$	61
3.5	Dispositions des sous-blocs du plan (x, y)	62
3.6	Projection sur la surface γ	63
3.7	Maillage initial ; surface d'un cube.	63
3.8	Approche simplifiée.	65
3.9	La solution calculée.	68
3.10	Isosurface $u = 0$	68
3.11	La solution calculée dans le cas de 343 particules.	69
3.12	Isosurface $u = 0$	69
4.1	Configuration géométrique.	72
4.2	Erreurs locales et globales ; conditions de DIRICHLET homogènes sur γ . . .	78
5.1	Donnée géométrique.	80
5.2	Raffinement local.	83
5.3	Isovaleurs de la solution ; conditions de NEUMANN homogènes sur γ	85
5.4	Gradient de la solution.	86
5.5	Isovaleurs et gradient de la solution ; cas de 5 trous.	87

5.6	Erreurs locales ; conditions de NEUMANN homogènes sur γ	89
6.1	Exemple représentatif de la géométrie d'un domaine perforé.	94
6.2	Ligne caractéristique.	95
6.3	Grille vitesse/pression ($8Q^1/Q^1$).	99
6.4	Notations (cas bidimensionnel).	100
6.5	Position angulaire d'un solide dans l'espace.	102
7.1	Convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules fixes. . .	105
7.2	Évolution de la température au cours du temps.	107
7.3	Évolution de la température au cours du temps.	108
7.4	Cavité entraînée.	109
7.5	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.	111
7.6	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.	112
7.7	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.	113
7.8	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	114
7.9	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	115
7.10	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	116
7.11	Tourbillon de TAYLOR du coin inférieur droite ; plan de coupe $y = 0$	117
7.12	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; lignes de courant. .	118
7.13	Cavité entraînée ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	119
7.14	Cavité entraînée ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	120
7.15	Cavité entraînée ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$	121
7.16	Lignes de courant et isovaleurs sur le plan $y = 0$ à $t = 3s$	123
7.17	Zone de recirculation.	124
7.18	Champ de vitesse à $t = 3s$; plan de coupe $y = 0$	125
7.19	Isobares à $t = 3s$	126
7.20	Isovaleurs de la vitesse sur les plan de coupe $x = 0$ et $y = 0$; $Re = 400$. . .	127
7.21	Isovaleurs de la vitesse sur les plan de coupe $x = 0$ et $y = 0$; $Re = 400$. . .	128
7.22	Champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$ à $t = 4s$; $Re = 10$	130
7.23	Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re = 10$. .	131
7.24	Champ de vitesse au voisinage des boules pour $Re = 200$; plan de coupe $y = 0$	132
7.25	Champ de vitesse au voisinage des boules pour $Re = 200$; plan de coupe $y = 0$	133
7.26	Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re =$ 200	134
7.27	Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re =$ 200	135
7.28	Isosurfaces de la vitesse à $t = 12s$	136
7.29	Champ de vitesse à $t = 12s$ sur le plan de coupe $y = 0$	137

B.1	L'élément de référence $\hat{\mathcal{Q}}$	148
C.1	Les angles d'Euler.	152
C.2	Polygones sphériques.	153

Liste des algorithmes

1.1	<i>Physalis</i>	20
1.2	Couplage FEM-BEM.	21
1.3	Couplage Différences finies – BEM.	22
3.1	F.B.M. Formulation multi-domaines.	53
3.2	Diagonalisation par blocs.	60
3.3	F.B.M– ε . Approche simplifiée.	66
5.1	Conditions de NEUMANN au bord du trou.	81

Notations

Nous précisons ici les notations qui seront utilisées dans cette thèse. Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev on renvoie le lecteur aux [3], [51] et [9]. Les espaces vectoriels ainsi que les champs vectoriels seront notés en caractères gras. Par exemple :

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad u_i \in L^2(\Omega)\}$$

Géométrie

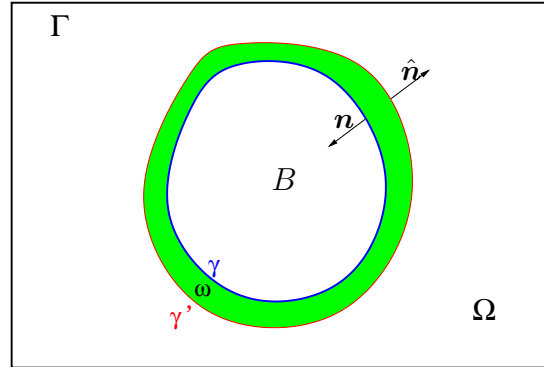


FIG. 1 – Géométrie.

- d : dimension de l'espace
- Ω : ouvert borné de $\mathbb{R}^d$
- $\Gamma = \partial\Omega$
- B : sous-domaine régulier de Ω
- $\gamma = \partial B$
- $\Omega \setminus \overline{B}$: le domaine perforé
- ω : sous-domaine de $\Omega \setminus \overline{B}$ de frontière $\partial\omega = \gamma \cup \gamma'$
- $\Omega^* = \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega})$: le complémentaire de $B \cup \overline{\omega}$ dans Ω
- $\partial\Omega^* = \Gamma \cup \gamma'$
- $\tilde{\Omega}$: un ouvert quelconque vérifiant $\Omega^* \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega \setminus \overline{B}$
- $\mathbf{n}$ (respectivement $\hat{\mathbf{n}}$) : vecteur normal sortant à $\gamma \subset \partial(\Omega \setminus \overline{B})$, ou, à Γ (respectivement à $\gamma = \partial B$, ou, à γ')

Espaces fonctionnels

- $L^2(\#) = \{l'ensemble\ des\ fonctions\ \grave{a}\ carr\acute{e}\ int\grave{e}grable\ sur\ \#\}$, o\`u  $\#$  d\`esigne l'un des domaines (sous-domaines) mentionn\`es ci-dessus.
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad \nabla u \in L^2(\Omega)\}$
- $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u|_{\Gamma} = 0\}$
- $H^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in L^2(\Omega \setminus \overline{B}), \quad \nabla u \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})\}$
- $H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad u|_{\Gamma \cup \gamma} = 0\}$
- $H_{\Gamma}^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad u|_{\Gamma} = 0\}$
- $H^1(\omega) = \{v \in L^2(\omega), \quad \nabla v \in L^2(\omega)\}$
- $H_0^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega), \quad v|_{\gamma \cup \gamma'} = 0\}$
- $H_{\gamma}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega), \quad v|_{\gamma} = 0\}$
- $H_{\Gamma}^1(\Omega^*) = \{u \in H^1(\Omega^*), \quad u|_{\Gamma} = 0\}$
- $H^{\frac{1}{2}}(\gamma) = \{r \in L^2(\gamma), \quad \exists v \in H^1(\omega), \quad v|_{\gamma} = r\}$
- $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) = \text{le dual de } H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$

Produits scalaires, normes, produits de dualit\`e

- $\forall u \in L^2(\#), \quad \|u\|_{0,\#} = (\int_{\#} |u|^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\forall \hat{u} \in H_0^1(\Omega),$

$$\|\hat{u}\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\hat{u}\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\hat{u}|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\forall (\hat{u}, w) \in (H_0^1(\Omega))^2$ et $\alpha \geq 0,$

$$\langle \hat{u}, w \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} = \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla w + \alpha \int_{\Omega} \hat{u} w \quad \text{et} \quad \|\hat{u}\|_{1,\Omega}^{(\alpha)} = \sqrt{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)}}$$

- $\forall u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}) \cup H_{\Gamma}^1(\Omega \setminus \overline{B}),$

$$\|u\|_{1,\Omega \setminus \overline{B}} = \left(\int_{\Omega \setminus \overline{B}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{1,\Omega \setminus \overline{B}} = \left(\int_{\Omega \setminus \overline{B}} |u|^2 + \int_{\Omega \setminus \overline{B}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\forall v \in H_{\gamma}^1(\omega),$

$$\|v\|_{1,\omega} = \left(\int_{\omega} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|v\|_{1,\omega} = \left(\int_{\omega} |v|^2 + \int_{\omega} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\ll \cdot, \cdot \gg_{\frac{1}{2},\gamma} : \text{produit de dualit\`e entre } H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \text{ et } H^{-\frac{1}{2}}(\gamma).$

$$\forall s \in L^2(\gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\gamma), \quad \forall r \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma),$$

$$\ll s, r \gg_{\frac{1}{2},\gamma} = \int_{\gamma} sr$$

-
- $\forall r \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma),$

$$\|r\|_{\frac{1}{2},\gamma} = \inf\{\|v\|_{1,\omega}, \quad v \in H^1(\omega), \quad v|_{\gamma} = r\}$$
 - $\forall s \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma),$

$$\|s\|_{-\frac{1}{2},\gamma} = \sup_{\{r \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma), \|r\|_{\frac{1}{2},\gamma}=1\}} \ll s, r \gg_{\frac{1}{2},\gamma}$$

Fonctions particulières

- $\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\gamma} := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Omega \setminus \overline{B}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_B := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} : \text{saut de la dérivée normale d'une fonction } u \text{ à travers l'interface } \gamma.$
- $\mathbf{1}_{\Omega \setminus \overline{B}}$: la fonction indicatrice de $\Omega \setminus \overline{B}$
- $\overline{f}$: le prolongement par 0 dans B d'une fonction f définie seulement sur $\Omega \setminus \overline{B}$

Divers

- Le symbole $\lesssim$ désigne une inégalité à une constante multiplicative près. Par exemple $a \lesssim b$ veut dire qu'il existe une constante générique C telle que $a \leq Cb$.

Introduction générale

Les écoulements fluide-particules sont au centre des préoccupations d'un grand nombre de mathématiciens, physiciens, biologistes ou industriels. Ces écoulements interviennent dans des situations physiques très diverses, parmi lesquelles l'écoulement sanguin (les particules représentent les globules rouges), le transport de polluants, ou les écoulements liquide-gaz dans les réacteurs (les particules sont alors des gouttes de liquide).

Jusqu'à récemment, la plupart des travaux visaient à l'élaboration de modèles décrivant le mouvement du mélange vu comme un milieu homogène. Mais ces approches se basent sur des hypothèses portant sur la nature des interactions entre particules rigides, hypothèses qui sont invalidées dans le cas de fractions solides importantes.

Ces limitations, ainsi que l'augmentation de la puissance des ordinateurs, ont motivé ces dernières années un grand nombre de tentatives de simulations directes de ces écoulements. Les particules sont ainsi individualisées et leur géométrie est prise en compte. Les difficultés inhérentes à ce genre de simulations peuvent être classées en deux types. D'abord des difficultés provenant de l'interaction fluide-particules, notamment la manière dont on peut prendre en compte l'action du fluide sur les particules et inversement. Ensuite, des difficultés propres à la simulation numérique des équations de NAVIER-STOKES tridimensionnelles en géométrie complexe. C'est ce second aspect qui fait l'objet du présent travail.

Pour ce qui est de la discrétisation en temps, l'une des approches les plus utilisées est la famille des méthodes dites **de projection** ; elles ont été introduites par A.J. CHORIN [12, 13] et R. TEMAM [77]. Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler le calcul de la vitesse et celui de la pression, en résolvant dans un premier temps un problème de convection-diffusion tel que la vitesse résultante n'est pas nécessairement à divergence nulle ; puis dans un deuxième temps, celle-ci est projetée sur un espace de fonctions à divergence nulle afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité.

Dès leur introduction par A.J. CHORIN et R. TEMAM, les méthodes de projection ont fait l'objet de plusieurs travaux. Les variantes qui en découlent peuvent être classées en deux catégories : celles basées sur des techniques de correction de la pression et celles basées sur des techniques de correction de la vitesse.

Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé le schéma de projection Lagrange-Galerkin introduit par Y. ACHDOU et J.-L. GUERMOND dans [2], et qui fait partie du volet des techniques de correction de la vitesse. Un des avantages majeurs de cette approche est de traiter le terme convectif de manière explicite et de garder les opérateurs symétriques et invariants en temps. L'idée est de combiner la méthode des éléments finis avec la **méthode des caractéristiques**. Celle-ci est dédiée au traitement du terme

non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$; il s'agit d'un traitement lagrangien de la dérivée totale (voir O. PIRONNEAU [62] et E. SÜLI [75] pour plus de détails sur cette méthode).

En utilisant la stratégie décrite ci-dessus, pour discrétiser en temps les équations de NAVIER-STOKES dans le cadre de l'écoulement d'un mélange fluide incompressible et particules rigides, on se ramène à chaque pas de temps à la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés, qui sont au coeur du travail présenté ici : problème de type HELMHOLTZ, avec des conditions aux limites de DIRICHLET, pour la vitesse et un problème de POISSON, avec des conditions de NEUMANN, pour la pression.

Ce mémoire comporte deux parties : la première est consacrée à la résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines perforés, et la seconde, dédiée à l'application de ces outils (ceux développés dans le premier volet) à la simulation numérique des écoulements autour d'obstacles. L'extension à la simulation d'écoulements fluide-particules libres, fait l'objet d'un travail en cours, dont nous nous contenterons de présenter ici les grandes lignes.

Dans la première partie nous nous intéressons à la résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Outre leur utilité dans le cadre des écoulements fluide-particules, ces problèmes modélisent d'autres situations physiques, telles que la conductivité thermique dans des matériaux composites ou les écoulements fluides dans des milieux hétérogènes.

Un des problèmes majeurs réside dans la complexité géométrique. Les méthodes adaptées à la résolution numérique de tels problèmes peuvent être classées en deux catégories : celles basées sur un maillage conforme et celles basées sur un maillage cartésien. La première peut être qualifiée d'approche naturelle pour la résolution de tels problèmes, puisque le maillage est conforme dans le but d'« épouser » parfaitement la géométrie du domaine. Ceci présente le grand avantage d'offrir un cadre approprié pour bien approcher la solution au voisinage des « trous ». Néanmoins, la génération du maillage elle-même peut être coûteuse – surtout en trois dimensions – et la matrice résultante est difficile à préconditionner de manière classique.

La deuxième approche, basée sur l'utilisation de maillages cartésiens, bénéficie ainsi du cadre approprié permettant l'utilisation de solveurs rapides tels que FFT¹, multi-grilles ou PSCR² et/ou de préconditionneurs efficaces. Cependant, la difficulté réside dans la manière dont on peut prendre en compte les conditions aux bords des trous sans que ceux-ci ne soient pris en charge explicitement par le maillage.

Cette dernière approche a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs ces dernières années, ce qui s'est traduit par l'émergence de plusieurs méthodes. Parmi celles-ci, on peut citer :

- la **méthode de la frontière immergée** initialement introduite par C. PESKIN [59, 60] pour la simulation d'écoulements sanguins dans le coeur humain et, d'une manière générale, pour des problèmes d'interaction fluide-structure en hémodynamique. Depuis son apparition, cette méthode a suscité l'intérêt de beaucoup de

¹*Fast Fourier Transform*

²*Partial Solution Variant of the Cyclic Reduction* (voir chapitre 3)

chercheurs travaillant dans le cadre des mathématiques appliquées à la biologie ; on trouve une synthèse de la plupart de ces applications dans [61],

- les **méthodes de domaines fictifs** dont l'équipe de R. GLOWINSKI est l'instigatrice [26, 28, 4, 5, 21, 29, 24, 22, 25, 30],
- une **méthode de domaines fictifs algébrique** basée sur un maillage cartésien localement adapté pour prendre en compte le trou ; elle a été introduite par V.K. SAUL'EV [70],
- la méthode dite *Physalis*, introduite par A. PROSPERETTI *et al.* dans [64],
- une méthode basée sur un **couplage FEM-BEM** introduite par R. CELORRIO *et al.* dans [11],
- dans le même cadre, D. RUSSEL *et al.* [69] ont développé une méthode basée sur un **couplage différences finis – BEM**,
- et la **méthode de la frontière élargie (F.B.M.)**³ introduite par B. MAURY et qui fait l'objet du présent travail.

Dans le volet des méthodes basées sur des maillages cartésiens, l'idée de base consiste à plonger le domaine perforé dans un autre domaine de forme plus simple (typiquement un rectangle de $\mathbb{R}^2$ ou un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$) que l'on maille de façon cartésienne. Ces méthodes se distinguent les unes des autres par la manière dont les trous sont pris en compte. La présentation détaillée de ces différentes approches fait l'objet du premier chapitre.

Dans le second chapitre, nous présentons la méthode de la frontière élargie (F.B.M.) qui consiste à remplacer le problème initialement posé dans le domaine perforé par deux sous-problèmes : un problème global et un autre local. Le problème global est posé dans un domaine contenant le domaine perforé, de forme simple permettant l'utilisation d'un maillage cartésien en vu d'utiliser des solveurs rapides et/ou des préconditionneurs classiques. Le problème local est défini dans un voisinage des trous dans lequel on peut éventuellement considérer un maillage plus fin pour mieux approcher la solution.

Ensuite, le troisième et le quatrième chapitre sont respectivement dédiés à la discrétisation de la F.B.M. et à l'estimation de l'erreur sous-jacente. Les résultats théoriques ainsi obtenus sont validés par des tests numériques.

Enfin, dans le cinquième chapitre, nous proposons un algorithme permettant la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés avec des conditions de NEUMANN sur le bord des trous, des tests numériques et des courbes d'erreur sont aussi présentés.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'application des outils développés dans le premier volet en vue de simuler des écoulements fluide-particules.

Le sixième chapitre est dédié à la discrétisation des équations de NAVIER-STOKES ; on y utilise un schéma de projection pour la discrétisation en temps, combiné avec la méthode des caractéristiques pour le traitement du terme convectif, ainsi qu'une discrétisation en espace par éléments finis basée sur la F.B.M.

Finalement, le dernier chapitre est consacré aux simulations numériques. La première consiste à simuler la convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules rigides et fixes, puis, pour montrer que l'algorithme est indépendant des éventuels mouvements des particules, on a refait la même simulation avec deux boules mobiles, dont

³*Fat Boundary Method*

les trajectoires ont été imposées. Puis, pour la validation du solveur NAVIER-STOKES, on s'est d'abord intéressé aux *benchmarks* usuels, à savoir la cavité entraînée et l'écoulement autour d'une sphère faisant apparaître des zones de recirculation en aval de l'obstacle. Ensuite, outre ces tests classiques, nous avons aussi réalisé des simulations correspondant à la cavité entraînée à laquelle on a ajouté un obstacle sphérique. Enfin, après des expériences numériques d'écoulement autour de deux sphères assez proches, nous avons terminé le chapitre par une simulation d'écoulement autour de 70 boules disposées d'une manière « pseudo-aléatoire ».

Première partie

Résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés

Chapitre 1

État de l’art. Méthodes existantes

Sommaire

1.1	Problèmes modèles	12
1.2	Éléments finis conformes avec maillage adaptatif	13
1.3	Méthodes numériques basées sur des maillages cartésiens	14
1.3.1	Méthode de la frontière immergée (<i>Immersed Boundary Method</i>)	14
1.3.2	Méthodes de domaines fictifs	15
1.3.3	Maillage localement adapté	18
1.3.4	<i>Physalis</i>	19
1.3.5	Couplage FEM-BEM	21
1.3.6	Couplage Différences finies – BEM	22
1.3.7	Schéma aux différences finies corrigé	23

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principes généraux des méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre des problèmes elliptiques dans des domaines perforés.

Afin de présenter ces méthodes le plus clairement possible, on essaiera de présenter ces méthodes sur un problème elliptique modèle. Cependant, pour certaines d'entre elles, on a choisi de rester fidèle à la manière dont ces méthodes ont été introduites par leurs auteurs, et ce en les présentant directement dans le cadre particulier qui a motivé leur développement.

1.1 Problèmes modèles

Pour simplifier la présentation des différentes méthodes adaptées à la résolution des problèmes elliptiques dans des domaines perforés, on se place dans le cadre du problème modèle : l'équation de POISSON (ou d'HELMHOLTZ), avec des conditions au bord de type DIRICHLET homogène et/ou NEUMANN homogène. On considère alors un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à frontière Lipschitzienne Γ , dans lequel est plongée une collection de sous-domaines réguliers, notée B . Un exemple représentatif de la géométrie du domaine est donné par la figure 1.1

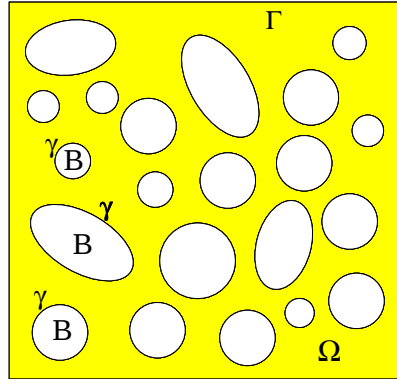


FIG. 1.1 – Exemple représentatif de la géométrie d'un domaine perforé.

$\Omega \setminus \overline{B}$ désigne le domaine perforé de frontière $\Gamma \cup \gamma$, où l'on a noté par γ la frontière interne (composée de plusieurs composantes connexes). Étant donnés f dans $L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ et α un réel positif ou nul, on se propose de résoudre les problèmes suivants :

$$\mathbf{I}_D : \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}), \text{ telle que :} \\ \alpha u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \end{cases} \quad (1.1)$$

et

$$\mathbf{I}_N : \begin{cases} \text{trouver } u \in H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B}), \text{ telles que :} \\ \alpha u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (1.2)$$

où

$$H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad u|_{\Gamma \cup \gamma} = 0\}, \quad (1.3)$$

$$H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad u|_\Gamma = 0\}. \quad (1.4)$$

La seule différence entre ces deux problèmes réside dans le choix des conditions au bord γ des « trous » B . On a pris des conditions de DIRICHLET homogènes pour $\mathbf{I}_D$ et des conditions de NEUMANN homogènes pour $\mathbf{I}_N$. La formulation variationnelle « naturelle » du problème $\mathbf{I}_D$ s'écrit comme suit : trouver $u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$, telle que :

$$\alpha \int_{\Omega \setminus \overline{B}} uw + \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega \setminus \overline{B}} fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad (1.5)$$

et celle du problème $\mathbf{I}_N$ est donnée par : trouver $u \in H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B})$, telle que :

$$\alpha \int_{\Omega \setminus \overline{B}} uw + \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega \setminus \overline{B}} fw, \quad \forall w \in H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B}). \quad (1.6)$$

L'existence et l'unicité des solutions pour les problèmes (1.5) et (1.6) sont assurées grâce au théorème de LAX-MILGRAM (cf. [16]).

Dans ce qui suit on présente quelques méthodes numériques adaptées à la résolution de tels problèmes. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : celles utilisant des maillages non structurés, pour mieux approcher la géométrie du domaine, permettant de calculer avec précision la solution discrète, et celles s'appuyant sur une grille cartésienne permettant l'utilisation de solveurs rapides et la construction de préconditionneurs efficaces.

1.2 Éléments finis conformes avec maillage adaptatif

Vue la géométrie du domaine, l'approche la plus naturelle pour résoudre numériquement un problème de type $\mathbf{I}_D$, ou, $\mathbf{I}_N$, par la méthode des éléments finis, est de considérer un maillage non structuré, éventuellement raffiné au voisinage des trous. Voir la figure 1.2 pour un exemple d'une triangulation de ce type.

Le but est d'être précis là où généralement on s'attend à un fort gradient de la solution. Au delà du voisinage des trous, où la solution est assez régulière, on peut se permettre de considérer un maillage grossier. Cette approche a fait l'objet de plusieurs travaux, ce qui explique son cadre mathématique assez complet, notamment les estimations d'erreurs optimales dont nous disposons (cf. [15]).

L'inconvénient majeur est surtout la perte de la structure cartésienne, ce qui rend difficile la construction de préconditionneurs classiques, et exclut l'utilisation de solveurs rapides. Par ailleurs, la dégénérescence des éléments de la triangulation, qui se manifeste dans le cadre des problèmes instationnaires où les trous sont mobiles, impose un remaillage du domaine à chaque pas de temps, ou, dans le meilleur des cas, à chaque « paquet » de pas de temps. Ce qui est une tâche très coûteuse, surtout en 3D. (Voir [52] pour un exemple de simulation numérique bidimensionnelle d'écoulements fluide-particules basée sur cette approche).

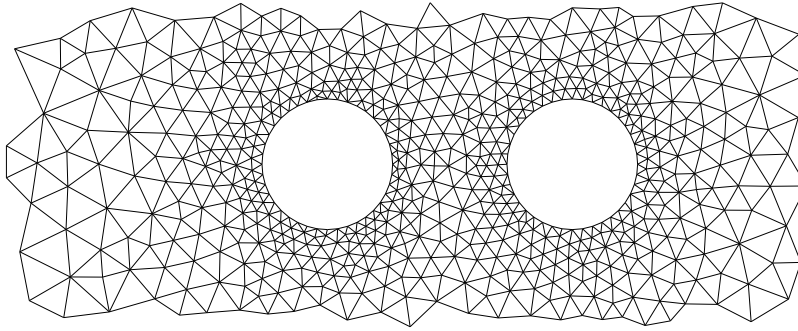


FIG. 1.2 – Maillage non structuré.

1.3 Méthodes numériques basées sur des maillages cartésiens

Afin de surmonter les difficultés, si l'on peut dire, des méthodes basées sur des maillages adaptatifs fidèles à la géométrie du domaine, on peut plonger le domaine perforé dans un autre domaine de forme plus simple (typiquement un domaine parallélépipédique de $\mathbb{R}^3$) dans lequel on considère un maillage structuré, voire une grille cartésienne. Le domaine de calcul sera donc ce nouveau domaine fictif. Cette idée est quasiment commune à toutes les méthodes développées pour cet effet. La différence entre elles est surtout la manière avec laquelle les trous sont pris en compte, la précision de calcul, la facilité d'implémentation et bien sûr la théorie mathématique sous-jacente.

Dans ce qui suit on présente quelques méthodes basées sur cette technique.

1.3.1 Méthode de la frontière immergée (*Immersed Boundary Method*)

La méthode de la frontière immergée est probablement l'une des premières méthodes permettant de faire des calculs dans des géométries « complexes » tout en utilisant des maillages cartésiens. Elle a été introduite par C. PESKIN dans les années 70 (cf. [59, 60]) pour la simulation d'écoulements sanguins dans le cœur humain et, d'une manière générale, pour des problèmes d'interaction fluide-structure en hémodynamique. Depuis son apparition, cette méthode a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs travaillant dans le cadre des mathématiques appliquées à la biologie. On trouve une synthèse de la plupart de ces applications dans [61] et ses renvois bibliographiques.

L'idée principale est de « baigner » la structure dans le fluide, et de modéliser les effets de cette structure par une force appliquée sur le fluide, et agissant suivant une distribution surfacique de DIRAC portée par la structure. Les équations du fluide sont alors résolues, par la méthode des différences finies, dans le domaine en son ensemble (réunion des domaines occupés par le fluide et la structure) en utilisant une grille cartésienne. Afin de pouvoir approcher l'interaction fluide-structure, un autre maillage curviligne (lié à la structure) est considéré. Pour plus de précision, notamment concernant l'analyse mathématique de cette méthode, le lecteur est invité à consulter [61].

1.3.2 Méthodes de domaines fictifs

R. GLOWINSKI *et al.* (voir [26, 28, 4, 5, 21, 29, 24, 22, 25, 30] et leurs références) sont les instigateurs des méthodes de domaines fictifs. L'idée principale est de ramener la résolution d'un problème elliptique initialement posé dans un domaine perforé en un problème posé dans un domaine, plus grand, de forme plus simple et permettant l'utilisation des maillages structurés. Bien évidemment la difficulté tient à la prise en compte de la complexité géométrique du domaine sans pour autant qu'elle soit « prise en charge » directement par le maillage. Outre cette difficulté intrinsèque, on s'interdit, dans ce cadre, la modification de l'opérateur global afin de garantir un système linéaire à preconditionnement « raisonnable ».

Pour présenter ces méthodes, on se place dans le cadre du problème modèle $\mathbf{I}_D$ et de sa formulation variationnelle (1.5). Au lieu de considérer le problème dans le domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$ (cf. figure 1.1), on le réécrit dans tout le domaine Ω , qui est supposé être un ouvert polygonal et simplement connexe. Notons par $\overline{f}$ un prolongement de f dans $L^2(\Omega)$. Formellement, on peut réécrire l'équation (1.5) sous cette forme : trouver $u^* \in H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$\alpha \int_{\Omega} u^* w^* + \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla w^* = \int_{\Omega} \overline{f} w^*, \quad \forall w^* \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

$$u^* = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma. \quad (1.8)$$

Deux questions se posent :

1. Quel est le meilleur choix du prolongement $\overline{f}$ du second membre f ?
2. Comment imposer les conditions au bord γ des trous B ?

Pour répondre à la première question, *a priori*, le choix naturel de l'extension $\overline{f}$ du second membre est de prolonger f par 0 dans B . Or, comme on peut le remarquer dans [28] et [21], l'estimation d'erreur entre la solution du problème continu et celle du problème discret dépend de la régularité de u^* dans le domaine fictif Ω , et, *a fortiori*, elle dépend aussi de la régularité de $\overline{f}$. En conclusion, le choix trivial de l'extension du second membre f ne semble pas le meilleur. Dans [5], C. ATAMIAN et P. JOLY proposent une approche permettant de calculer l'extension optimale de f en résolvant un problème auxiliaire.

La deuxième question évoque le point le plus délicat des méthodes de domaines fictifs. En effet, la géométrie du domaine n'est pas totalement prise en compte par le maillage qui « ignore » les trous. Ainsi, comment prendre en compte des conditions au bord sans que ce dernier ne soit représenté par le maillage ?

D'autre part, la qualité de la solution est intimement liée à l'extension du second membre f , et il ne suffit pas seulement que ce prolongement soit régulier. En effet, ceci peut être illustré par un exemple simple en 1D : prenons $\Omega =]0, 1[$, $B =]a, b[\subset]0, 1[$, $\partial B = \gamma = \{a\} \cup \{b\}$ et $f = 1$, ainsi que l'extension $\overline{f} = 1$. On veut donc résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{dans} \quad]0, a[\cup]b, 1[, \\ u(0) = u(1) = u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Il est clair que la solution u peut être représentée par les deux courbes en trait continu de la figure 1.3.

Quant à la solution u^* de la formulation domaines fictifs associée (de type (1.7)-(1.8)), elle est définie sur tout le segment $]0, 1[$ en prenant $\bar{f}$ comme second membre, et est représentée par les trois courbes (on suppose qu'on a pu prendre en compte d'une manière exacte les conditions au bord γ).

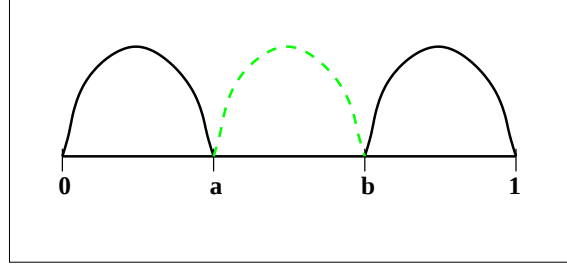


FIG. 1.3 – Exemple 1D - Saut de la dérivée normale de la solution.

Bien que l'extension de f soit assez régulière sur tout le domaine Ω , cela n'empêche pas l'apparition d'un saut de la dérivée normale à travers le bord du trou (représenté ici par les deux points a et b). On trouve dans [4] une solution pour contourner ce problème. En effet, l'approche proposée consiste à utiliser $\bar{f}|_B$ comme une variable de contrôle afin de minimiser le saut de la dérivée normale.

Dans les sous-sections qui suivent on présente en détail les deux approches les plus utilisées dans le cadre des domaines fictifs : domaines fictifs avec multiplicateurs de LAGRANGE de surface et domaines fictifs avec multiplicateurs de LAGRANGE distribués. On présente également une troisième approche basée sur une technique de pénalisation.

Domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange de surface

Afin d'imposer les conditions au bord du trou à l'aide des multiplicateurs de LAGRANGE, R. GLOWINSKI *et al.* [26] formulent l'approche domaines fictifs comme un problème de point selle. On considère le problème modèle $\mathbf{I}_D$: (1.1) et sa formulation variationnelle (1.5) : trouver $u \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B})$, telle que :

$$\alpha \int_{\Omega \setminus \bar{B}} uw + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}). \quad (1.9)$$

Au lieu de faire la résolution sur le domaine perforé $\Omega \setminus \bar{B}$, on se ramène à un problème sur le domaine Ω (supposé polygonal) avec la contrainte $u^* = 0$ sur $\partial B = \gamma$. Le nouveau problème s'écrit de la manière suivante : trouver $u^* \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \alpha \int_{\Omega} u^* w^* + \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla w^* + \ll \lambda, w^* \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\Omega} \bar{f} w^*, \\ \ll \mu, u^* \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = 0, \end{cases} \quad \forall (w^*, \mu) \in H_0^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma), \quad (1.10)$$

où $\bar{f}$ est un prolongement de f dans $L^2(\Omega)$ et $\ll \cdot, \cdot \gg_{\frac{1}{2}, \gamma}$ désigne le produit de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$.

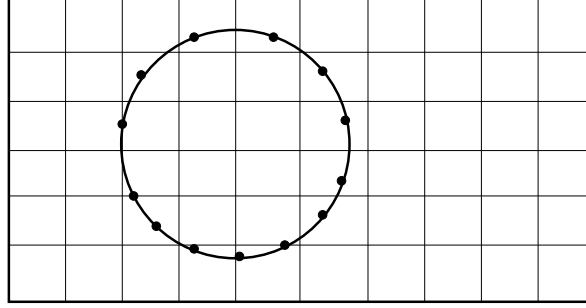


FIG. 1.4 – Exemple (bidimensionnel) des maillages de Ω et de γ .

Les multiplicateurs de LAGRANGE ainsi introduits « vivent » dans un espace défini sur la surface γ . On a donc juste besoin d'un maillage surfacique du bord du trou. Voir la figure 1.4 pour un exemple bidimensionnel des maillages du domaine Ω et de la surface γ .

Le système linéaire issu de la discrétisation du problème (1.10) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha M + A & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Il peut être résolu par des méthodes de type UZAWA ou bi-gradient conjugué.

Domaines fictifs avec mutiplicateurs de Lagrange distribués

Une autre approche basée sur l'utilisation des multiplicateurs de LAGRANGE est celle des multiplicateurs distribués. Cette fois la contrainte n'est plus appliquée sur le bord γ mais plutôt sur tout le trou B . Cette approche est analysée dans GIRAULT *et al.* [22] et GLOWINSKI *et al.* [24, 25].

Pour résoudre le problème modèle $\mathbf{I_D}$ par cette approche, la formulation variationnelle de la section 1.3.2 est remplacée par la suivante : trouver $u^* \in H_0^1(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} \alpha \int_{\Omega} u^* w^* + \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla w^* + \ll \lambda, w^*_{|B} \gg_{1,B} = \int_{\Omega} \bar{f} w^*, \\ \forall (w^*, \mu) \in H_0^1(\Omega) \times (H^1(B))', \\ \ll \mu, u^*_{|B} \gg_{1,B} = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

où, dans ce cas, $\ll \cdot, \cdot \gg_{1,B}$ désigne le produit de dualité entre $H^1(B)$ et son dual.

Sachant que dans cette approche les multiplicateurs de LAGRANGE « vivent » dans le volume B (surface en 2D), il est donc nécessaire de mailler B pour passer au problème discret. La figure 1.5 donne un exemple bidimensionnel des maillages de B et de Ω .

Un des avantages à ne pas négliger de cette approche, est de ne pas être amené à remailler l'obstacle quand il s'agit de problèmes instationnaires où B est mobile.

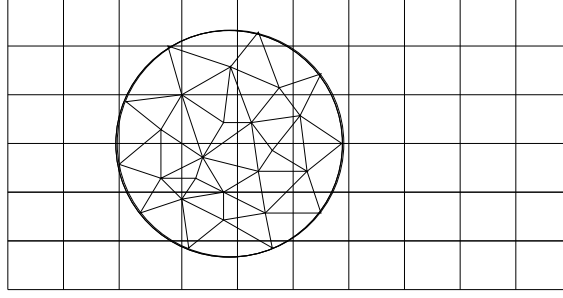


FIG. 1.5 – Exemple (bidimensionnel) des maillages de Ω et de B .

Domaines fictifs avec pénalisation

Cette approche a pour objet de prendre en compte les conditions aux limites, au bord du trou, de type DIRICHLET moyennant une technique de pénalisation. Cette technique est surtout employée en mécanique des fluides. Il s'agit dans ce cadre d'ajouter un terme du type $\frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ aux équations de NAVIER-STOKES :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0, \quad (1.13)$$

sous la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Cette technique est utilisée pour les méthodes tensorielles (différences finies, méthodes spectrales, ondelettes [71]) qui ne permettent pas une bonne approximation de la géométrie.

Cette méthode a été testée et mise en œuvre dans le cadre de FreeFEM3D⁴ (voir [18, 20]) ; la technique de pénalisation utilisée est de type surfacique, qui revient dans le cas des opérateurs du second ordre, à faire tendre une condition aux limites de type FOURIER vers une condition de type DIRICHLET :

$$\frac{1}{\varepsilon} u + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma = \partial B. \quad (1.14)$$

Rappelons que le réel positif ε est destiné à tendre vers 0. On trouve une analyse mathématique plus détaillée dans B. MAURY [54] et dans la thèse de S. DEL PINO [18].

1.3.3 Maillage localement adapté

L'objectif est toujours le même, à savoir se ramener à un domaine de résolution de forme simple permettant l'utilisation d'un maillage cartésien. Cette méthode, dite de domaine fictif algébrique, est introduite par V.K. SAUL'EV [70]. L'idée de celle-ci est alors de plonger le domaine perforé dans un domaine plus grand et dans lequel on peut considérer un maillage cartésien. Ce dernier est localement modifié pour prendre en compte le trou. Voir la figure 1.6 pour un exemple bidimensionnel.

⁴A 3D finite element PDE solver : un logiciel de calcul (licence GPL) développé par S. Del Pino au sein de l'équipe de O. PIRONNEAU (Laboratoire JACQUES-LOUIS LIONS). Voir <http://www.freefem.org>

La résolution se fait par la méthode des éléments finis standards dans le domaine global Ω , mais en préconditionnant le système linéaire par la matrice construite à l'aide du maillage (structuré) non modifié.

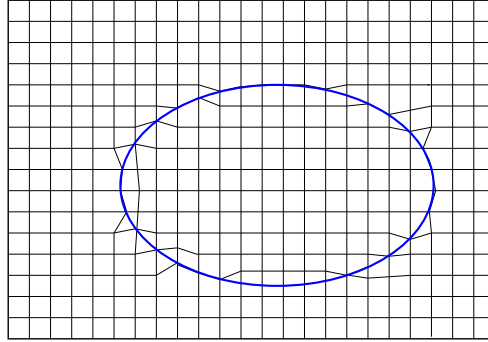


FIG. 1.6 – Maillage localement adapté.

D'un point de vue technique, la tâche de modification du maillage est du même ordre de difficulté que la génération d'un maillage conforme (à la géométrie du domaine perforé). En effet, il faut détecter les points de maillage à modifier tout en étant contraint de rester aussi proche que possible du maillage structuré afin de tirer un profit maximal du préconditionneur.

Cette méthode a été utilisée par S. DEL PINO *et al.* dans [19] pour résoudre un problème de HELMHOLTZ en dimension trois. Dans ce cadre, le préconditionnement du système linéaire a été fait en utilisant une implémentation parallèle du préconditionneur PSCR (voir chapitre 3 pour plus de détails), initialement développé par P.S. VASSILEVSKI [80], et par Y. KUZNETSOV *et al.* [35, 44, 36].

Cette méthode est très efficace. Toutefois, sa mise en oeuvre n'est pas une tâche aisée. En effet, d'une certaine manière, elle nécessite la génération d'un maillage du domaine perforé puisque les sommets du maillage cartésien doivent être déplacés pour prendre en compte la présence du trou. Cette tâche peut s'avérer plus compliquée que la génération d'un maillage non structuré, compte tenu de la difficulté à combiner la qualité du maillage et une bonne approximation du bord du trou.

1.3.4 *Physalis*

Cette méthode, dite *Physalis*, a été introduite par A. PROSPERETTI *et al.* dans [64] dans le cadre de la simulation des écoulements potentiels autour de sphères. Il s'agit d'un couplage entre la méthode de différences finies et une représentation analytique, locale, de la solution dans une zone proche de l'obstacle.

On considère une grille recouvrant tout le domaine et on identifie les sommets entourant la particule. Ces sommets forment une « cage intérieure » (*inner cage*) englobant la particule et une « cage extérieure » (*outer cage*) englobant la particule et la cage intérieure (voir la figure 1.7).

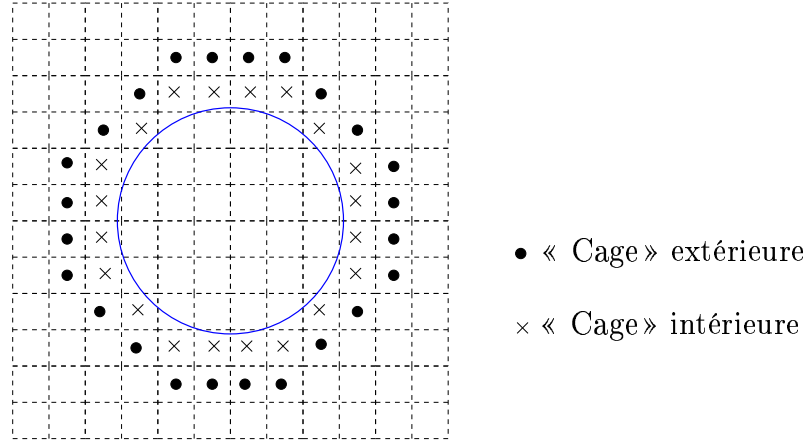


FIG. 1.7 – *Physalis*. Exemple des « cages » extérieure et intérieure.

L'idée est de ramener la résolution dans le domaine en son ensemble (y compris la partie occupée par les obstacles). Et pour « caler » l'algorithme, on a besoin d'une connaissance *a priori* de la solution analytique.

On doit donc disposer de l'expression analytique de la solution, même localement dans un voisinage de la particule. Par exemple dans le cas de l'équation de LAPLACE, et lorsqu'il s'agit d'un obstacle de forme sphérique, on peut utiliser le développement en harmoniques sphériques de la solution (voir [37] par exemple).

L'application de cette méthode aux équations de NAVIER-STOKES, pour simuler des écoulements bidimensionnels autour de cylindres, est faite par S. TAKAGI *et al.* dans [76]. Quant à l'analyse mathématique, notamment la convergence de l'algorithme itératif, dans le cas bidimensionnel des écoulements potentiels et de STOKES, elle se trouve dans H. HUANG *et al.* [38].

On rappelle ici (dans l'algorithme 1.1) les principales étapes d'une itération de l'algorithme de *Physalis* dans le cas de la simulation numérique d'un écoulement, bidimensionnel, autour d'un cylindre, régi par les équations de NAVIER-STOKES incompressibles.

boucle

Étape 1. Utiliser la solution calculée à l'itération précédente sur la cage extérieure pour calculer les coefficients qui apparaissent dans l'expression de la solution locale (solution du problème de STOKES). // *Ce qui se traduit par la résolution d'un système linéaire dont ces coefficients sont solutions.*

Étape 2. Utiliser ces coefficients pour calculer les valeurs de la solution locale sur la cage intérieure.

Étape 3. Résoudre les équations de NAVIER-STOKES dans tout le domaine (toute la grille différences finies) en imposant la solution calculée à l'étape 2 sur la cage intérieure.

Étape 4. Évaluer la nouvelle solution sur les noeuds de la cage extérieure.

fin boucle

ALGORITHME 1.1: *Physalis*.

1.3.5 Couplage FEM-BEM

R. CELORRIO *et al.* [11] ont introduit une méthode adaptée à la résolution de l'équation de LAPLACE dans un domaine perforé et ce, en décomposant la résolution en un problème intérieur et un problème extérieur.

L'idée principale est toujours de se ramener en une résolution globale, dans le domaine non perforé, ce problème est appelé problème intérieur par les auteurs de la méthode.

La particularité de cette méthode, quant à la manière de prendre en compte la présence d'un obstacle, se base sur la résolution, par la méthode d'éléments frontière (BEM), d'un problème défini sur le bord du trou, ce problème est dit problème extérieur. Il s'agit ainsi d'un couplage éléments finis (FEM) – éléments frontières (BEM).

On se place dans le cadre du problème modèle $\mathbf{I}_D$ (page 12) avec α nul. Ce qui revient à résoudre l'équation de LAPLACE dans le domaine perforé représenté par la figure 1.1 (voir page 12) avec des conditions de DIRICHLET homogènes aux bords γ et Γ .

La stratégie de résolution consiste à décomposer la solution en la somme de deux solutions : une solution, qualifiée intérieure, pour le domaine non perforé et une solution, qualifiée d'extérieure, pour le domaine $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B}$ ($d = 2$ ou 3).

La restriction au domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$ de la somme de ces deux solutions est censée approcher la solution du problème de départ. La résolution de ces problèmes se fait par un processus itératif de type SCHWARZ dont à chaque itération la résolution du problème intérieur se fait par éléments finis, et celle du problème extérieur, ramené en un problème défini sur la frontière de la particule, par les éléments frontières (BEM). Une itération de SCHWARZ pour cette décomposition est donnée par l'algorithme 1.2.

Étape 0. Initialisation : $g_\Gamma^1 := 0$, $g_\gamma^1 := 0$.

boucle

Étape 1. Problème intérieur : résoudre

$$\begin{cases} -\Delta v_n = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_n = g_\Gamma^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.15)$$

Étape 2. Problème extérieur : résoudre

$$\begin{cases} w_n := \mathcal{S}_\gamma \psi_n, & \psi_n \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma), \\ \mathcal{S}_\gamma \psi_n|_\gamma = g_\gamma^n, \end{cases} \quad (1.16)$$

où $\mathcal{S}_\gamma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est le potentiel de simple couche défini par : $\mathcal{S}_\gamma \psi := \int_\gamma \phi(\cdot, y) \psi(y)$.

Le noyau $\phi(x, y)$ est égale à $\frac{1}{|x - y|}$ en 3D et égal à $-\log|x - y|$ en 2D.

Étape 3. Mise à jour : $g_\Gamma^{n+1} := -w_n|_\Gamma$, $g_\gamma^{n+1} := -v_n|_\gamma$.

fin boucle

ALGORITHME 1.2: Couplage FEM-BEM.

La restriction de la suite $v_n + w_n$ à $\Omega \setminus \overline{B}$ est censée être une approximation de la solution u du problème du départ.

1.3.6 Couplage Différences finies – BEM

On présente dans cette section une méthode qui, dans le principe de base, ressemble à celle présentée dans la section 1.3.5. Cette méthode a été récemment introduite par D. RUSSEL *et al.* dans [69] pour modéliser des objets, bidimensionnels mobiles, dans un fluide visqueux. Elle est basée sur la formulation tourbillon (*vortex formulation*) des équations de NAVIER-STOKES et un couplage Différences finies – Éléments frontières (BEM).

Les équations de NAVIER-STOKES bidimensionnelles sont écrites sous leur formulation tourbillon :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = \nu \Delta w, \quad (1.17)$$

$$\Delta \psi = w, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \quad (1.19)$$

$$w = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.20)$$

où w désigne la vorticité, $\mathbf{u}$ la vitesse, ν la viscosité et ψ la fonction de courant (*stream function*) du champ de vitesse.

La procédure de résolution est résumée par l'algorithme 1.3 et la figure 1.8.

- Étape 1.** Calculer le champ de vitesse $\mathbf{u}$ créé par la distribution de la vorticité w et ce, en résolvant une équation de POISSON pour la fonction de courant ψ_P dans le domaine non perforé, et dont le second membre est égal à la vorticité dans $\Omega \setminus \overline{B}$ et 0 dans B .
- Étape 2.** Calculer l'interpolé de cette solution sur la frontière de l'objet immergé afin d'approximer sa dérivée tangentielle $\frac{\partial \psi_P}{\partial s}$.
- Étape 3.** Résoudre une équation de LAPLACE par la BEM de telle sorte que la superposition de sa solution (ψ_L) avec celle de l'étape précédente (ψ_P) satisfasse la condition de non pénétration.
- Étape 4.** Distribuer la vorticité autour du bord de l'objet pour satisfaire la condition de non glissement.
- Étape 5.** Intégrer en temps l'équation de la vorticité.

ALGORITHME 1.3: Couplage Différences finies – BEM.

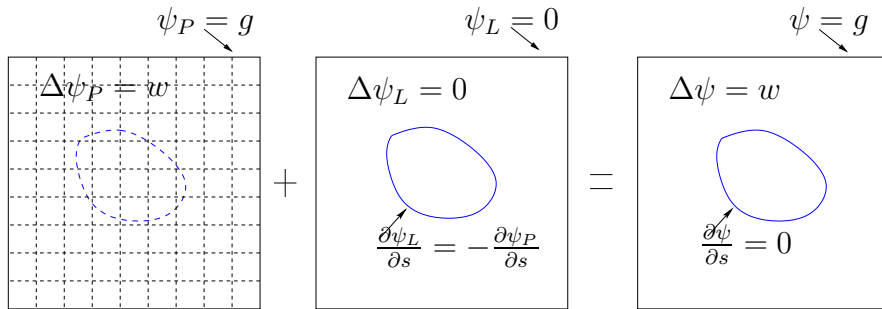


FIG. 1.8 – Couplage Différences finies – BEM.

1.3.7 Schéma aux différences finies corrigé

Il s'agit là de tout un volet de méthodes permettant la prise en compte d'objets (fixes ou mobiles) immergés dans un domaine de forme simple. Ces approches sont certainement les plus anciennes dans ce cadre. Leur point commun est la résolution d'un problème elliptique ou parabolique en utilisant la méthode des différences finies.

La méthode de la frontière immergée décrite dans la section 1.3.1 peut être considérée comme faisant partie de ce volet. Cependant, on a choisi de la présenter indépendamment parce qu'à la différence de ces méthodes, le terme de correction nécessaire pour prendre en compte la présence d'un objet, se fait au niveau du second membre, tandis que dans ces dernières c'est plutôt le schéma de différences finies qui est modifié. Dans ce cadre, la méthode la plus connue est la méthode de l'interface immergée (*Immersed Interface Method*) introduite par R.J. LEVEQUE & Z.L. LI [50].

On trouve dans la littérature plusieurs variantes. On présente ici une des plus récentes, celle introduite par D. CALHOUN dans [10] pour la simulation d'écoulements fluides bidimensionnels en présence d'obstacle. Cette approche est basée sur un schéma de différences finies à cinq points, modifié par un terme de correction qui agit sur les sommets proches du bord de l'objet (voir figure 1.9). Formellement, on peut dire que le schéma est d'ordre 1 au voisinage du trou et d'ordre 2 ailleurs.

Dans le cadre de cette méthode, c'est la formulation tourbillon (décrite dans la section 1.3.6) des équations de NAVIER-STOKES bidimensionnelles qui est utilisée. On se ramène donc à la résolution des équations de type POISSON. Ce système d'équations est résolu dans tout le domaine en utilisant un solveur rapide et la prise en compte de l'obstacle est faite par une correction introduite comme un terme source.

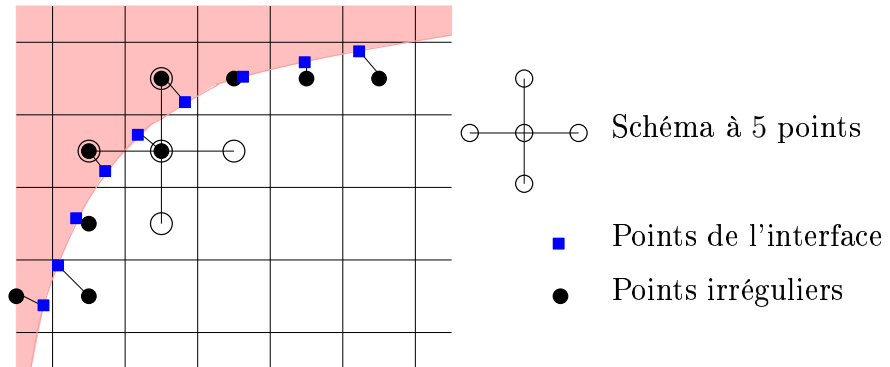


FIG. 1.9 – Schéma aux différences finies corrigé.

Chapitre 2

Méthode de la frontière élargie (*The Fat Boundary Method*)

Sommaire

2.1	Introduction et motivation	26
2.2	Principe de la méthode	26
2.3	Formulation multi-domaines	26
2.3.1	Cas des conditions aux limites homogènes	26
2.3.2	Cas des conditions aux limites non-homogènes	34
2.4	Formulation de point fixe	35

On reste dans le volet des méthodes numériques basées sur des maillages cartésiens et adaptées à la résolution des problèmes elliptiques dans des domaines perforés. L'objet de ce chapitre est de présenter la **Méthode de la frontière élargie** (*The Fat Boundary Method*) que l'on désignera par ses initiales : F.B.M..

2.1 Introduction et motivation

La Méthode de la frontière élargie a été introduite par B. MAURY [53] dans le but de résoudre le problème de POISSON dans un domaine perforé. L'idée de base est proche de celle des domaines fictifs. En effet, on remplace le problème initialement posé dans un domaine perforé par un problème équivalent posé dans un domaine de forme simple. Dans celui-ci, on considère un maillage cartésien permettant d'utiliser des solveurs rapides et des préconditionneurs efficaces.

L'originalité est l'utilisation d'un maillage cartésien tout en gardant la possibilité d'approcher la solution avec précision dans un voisinage du trou, et ce, en utilisant un problème local, auxiliaire, basé sur un maillage fin.

2.2 Principe de la méthode

L'idée principale est de remplacer le problème initialement posé dans le domaine perforé en deux sous-problèmes : un problème global et un autre local.

Le problème global est posé dans un domaine, contenant le domaine perforé, de forme simple permettant la construction d'un maillage cartésien et l'utilisation des solveurs rapides et/ou des préconditionneurs classiques.

Le problème local est défini dans un voisinage des trous dans lequel on peut considérer un maillage fin pour mieux approcher la solution. La figure 2.1 donne un exemple bidimensionnel des maillages local et global dans le cas où B est formé par une seule composante connexe.

Le lien entre les résolutions locale et globale se fait par :

- une interpolation d'un champ global sur l'interface artificielle γ' (comme dans l'approche de décomposition de domaines avec recouvrement totale proposée par P. LETALLEC et M.D. TIDRIRI dans [49]),
- une prescription d'un saut de la dérivée normale à travers γ . Cette approche est utilisée dans le cadre de la méthode de la frontière immergée. Voir chapitre précédent, section 1.3.1.

2.3 Formulation multi-domaines

2.3.1 Cas des conditions aux limites homogènes

On se place dans le cadre du problème modèle I_D , à savoir Ω désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), sa frontière $\partial\Omega$ est aussi notée par Γ et elle est supposée être Lipschitzienne. Les trous dans le domaine Ω sont représentés par une collection de

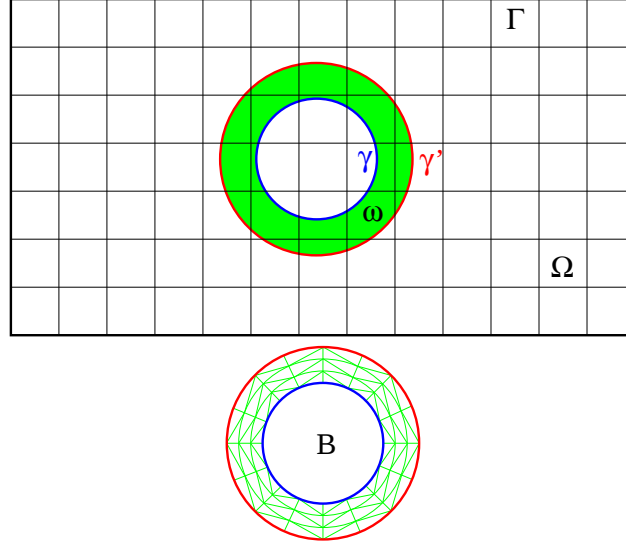


FIG. 2.1 – Exemple (bidimensionnel) des maillages local et global.

sous-domaines réguliers, notée B . La figure 1.1 du chapitre précédent donne un exemple représentatif de la géométrie du domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$. Pour des raisons de simplicité, et sans perdre de généralité, on se limite dans ce paragraphe au cas d'un seul trou. On introduit donc une frontière artificielle γ' autour du bord γ du trou B et on note par ω le sous-domaine délimité par γ et γ' . Le vecteur normal (sortant) au bord de $\Omega \setminus \overline{B}$, $\Gamma \cup \gamma$, est noté par $\mathbf{n}$. Celui, normal (sortant) à $\gamma = \partial B$ (respectivement à $\gamma \subset \partial\omega$), ou, à $\gamma' \subset \partial\omega$ est noté par $\hat{\mathbf{n}}$ (respectivement $\mathbf{n}$). Notons que $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$ (voir la figure 2.2).

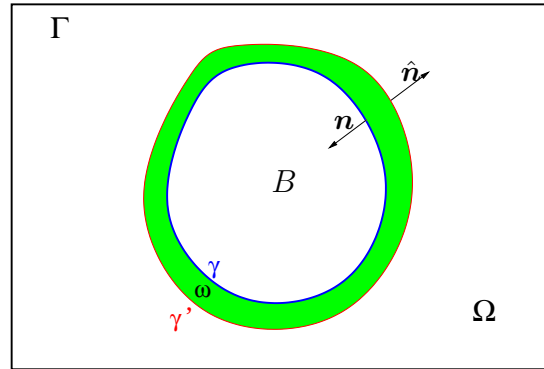


FIG. 2.2 – Exemple du domaine dans le cas bidimensionnel.

Remarque 2.1 Dans le cas où B est formé par plusieurs composantes connexes, on suppose que les « couronnes » de type ω ne se recouvrent pas.

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

- $H_0^1(\Omega) = \{\widehat{u} \in H^1(\Omega), \widehat{u}|_\Gamma = 0\}$, muni des normes :

$$|\widehat{u}|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |\nabla \widehat{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

et

$$||\widehat{u}||_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |\widehat{u}|^2 + \int_\Omega |\nabla \widehat{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

- $H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), u|_{\Gamma \cup \gamma} = 0\}$, muni des normes

$$|u|_{1,\Omega \setminus \overline{B}} = \left(\int_{\Omega \setminus \overline{B}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

et

$$||u||_{1,\Omega \setminus \overline{B}} = \left(\int_{\Omega \setminus \overline{B}} |u|^2 + \int_{\Omega \setminus \overline{B}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

- $H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), u|_\Gamma = 0\}$, muni des normes

$$|u|_{1,\Omega \setminus \overline{B}} = \left(\int_{\Omega \setminus \overline{B}} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

et de la norme définie par (2.4).

- $H_\gamma^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega), v|_\gamma = 0\}$, muni des normes :

$$|v|_{1,\omega} = \left(\int_\omega |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

et

$$||v||_{1,\omega} = \left(\int_\omega |v|^2 + \int_\omega |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2 Les fonctions de $H_\Gamma^1(\Omega \setminus \overline{B})$ (respectivement $H_\gamma^1(\omega)$) ne sont pas nécessairement nulles sur γ (respectivement γ'). De même, les fonctions de $H_{\gamma'}^1(\omega)$ ne sont pas nécessairement nulles sur γ .

Nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.1 Soit $v \in H^1(\omega)$, telle que $\Delta v \in L^2(\omega)$. On a alors, $\frac{\partial v}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ et

$$- \int_\omega \Delta v w = \int_\omega \nabla v \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial v}{\partial n}, w \gg_{\frac{1}{2}, \partial\omega}, \quad \forall w \in H^1(\omega), \quad (2.8)$$

où $\ll \cdot, \cdot \gg_{\frac{1}{2}, \partial\omega}$ désigne le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$.

Preuve. On peut trouver la démonstration de ce résultat dans GIRAULT-RAVIART [23] par exemple. $\square$

Remarque 2.3 Le domaine ω auquel on s'intéresse est de forme particulière : il s'agit d'un domaine borné et à frontière régulière ayant deux composantes connexes (γ et γ'). Comme $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, on peut identifier (à un isomorphisme près) les espaces $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\gamma')$.

Définition 2.1 On définit l'application τ_γ , trace sur γ des fonctions de $H^1(\Omega)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau_\gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega) \\ w &\longmapsto \tau_\gamma w := \begin{cases} w & \text{sur } \gamma \\ 0 & \text{sur } \gamma' \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Définition 2.2 Soit $\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$. On note par $\tilde{\psi} = (\psi, 0) \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma')$. On définit une forme linéaire sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ de la manière suivante :

$$\ll \psi, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} := \ll \tilde{\psi}, \tau_\gamma w \gg_{\frac{1}{2}, \partial\omega}, \quad \forall w \in H^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Si en plus $\psi \in L^2(\gamma)$,

$$\ll \psi, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_\gamma \psi w. \quad (2.11)$$

La formule de GREEN, donnée par le lemme 2.1, peut être écrite sous cette forme :

Corollaire 2.2 Soit $v \in H^1(\omega)$, telle que $\Delta v \in L^2(\omega)$. On a alors, $\frac{\partial v}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ et

$$-\int_\omega (\Delta v)w = \int_\omega \nabla v \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial v}{\partial n}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} \quad \forall w \in H_{\gamma'}^1(\omega). \quad (2.12)$$

Étant donnés $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ et α un réel positif ou nul, on s'intéresse à la résolution du problème modèle $\mathbf{I}_D$:

$$\mathbf{I}_D : \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}), \text{ telle que :} \\ \alpha u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}. \end{cases}$$

Le principe de la F.B.M. est de remplacer le problème initialement posé dans le domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$ par un couple de sous-problèmes, l'un posé sur tout le domaine Ω et l'autre sur la « couronne » ω . Pour ce faire, notons par $\overline{f}$ le prolongement de f par 0 sur B :

$$\begin{cases} \overline{f}|_{\Omega \setminus \overline{B}} &= f, \\ \overline{f}|_B &= 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans la proposition 2.3, on montrera que le problème $\mathbf{I}_D$ est équivalent à ce couple de problèmes : trouver $(\hat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\gamma'}^1(\omega)$ tel que :

$$\mathbf{II}_D : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} \alpha v - \Delta v &= f & \text{dans } \omega, \\ v|_{\gamma'} &= \hat{u}|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : \alpha \hat{u} - \Delta \hat{u} = \overline{f} + \frac{\partial v}{\partial n} \delta_\gamma & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

où δ_γ désigne la masse de DIRAC, associée à la surface γ , et $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma$ l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ (la forme linéaire) définie par :

$$w \in H_0^1(\Omega) \longmapsto \ll \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma}, \quad (2.15)$$

(le crochet $\ll \cdot, \cdot \gg_{\frac{1}{2}, \gamma}$ est introduit dans la définition 2.2).

Remarque 2.4 On montrera que la forme linéaire, définie par (2.15), est continue sur $H_0^1(\Omega)$ après avoir établi le résultat suivant :

Proposition 2.3 Les problèmes $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{II}_D$ sont équivalents au sens suivant :

- i) si une fonction u de $H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$ est solution du problème $\mathbf{I}_D$, alors le couple $(\overline{u}, u|_\omega)$ appartient à $H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ et est solution du problème $\mathbf{II}_D$,
- ii) si un couple $(\widehat{u}, v)$ de $H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ est solution du problème $\mathbf{II}_D$, alors la fonction $\widehat{u}|_{\Omega \setminus \overline{B}}$ appartient à $H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$ et est solution du problème $\mathbf{I}_D$.

Preuve. i) Il est clair que si $u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B})$, alors $\overline{u}$, l'extension de u par 0 dans B , appartient à $H_0^1(\Omega)$ et $u|_\omega$, la restriction de u à ω , appartient à $H_\gamma^1(\omega)$. Il est facile de vérifier que $u|_\omega$ est solution du premier problème ($\mathbf{II}_D - \mathbf{a}$) du système $\mathbf{II}_D$. Soit $\overline{u}$ l'extension de u par 0 dans B . Elle vérifie

$$\alpha \overline{u} - \Delta \overline{u} = \overline{f} \text{ dans } \Omega \setminus \overline{B}, \quad (2.16)$$

$$\alpha \overline{u} - \Delta \overline{u} = \overline{f} \text{ dans } B. \quad (2.17)$$

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test. En multipliant (2.16) par w et en intégrant par parties sur $\Omega \setminus \overline{B}$ (en tenant compte du fait que la trace de w sur $\Gamma \subset \partial(\Omega \setminus \overline{B})$ est nulle), on obtient :

$$\alpha \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \overline{u} w + \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla \overline{u} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \overline{u}}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\Omega \setminus \overline{B}} \overline{f} w, \quad (2.18)$$

De même, en multipliant (2.17) par w , en intégrant par parties sur B et en remarquant que $\overline{u}$ est constante (nulle) sur B , on a :

$$\alpha \int_B \overline{u} w + \int_B \nabla \overline{u} \cdot \nabla w = \int_B \overline{f} w. \quad (2.19)$$

En faisant la somme de (2.18) et (2.19) on a : $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\alpha \int_\Omega \overline{u} w + \int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \overline{u}}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_\Omega \overline{f} w. \quad (2.20)$$

Ce qu'on écrit, au sens des distributions :

$$\alpha \overline{u} - \Delta \overline{u} = \overline{f} + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.21)$$

c'est-à-dire $\overline{u}$ est solution de $(\mathbf{II}_D - \mathbf{b})$.

ii) Réciproquement, soit $(\widehat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ solution du problème $\mathbf{II}_D$. Il est clair

que $\widehat{u}|_{\Omega \setminus \overline{B}}$ appartient à $H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B})$. Il est facile aussi de vérifier que $\alpha \widehat{u}|_{\Omega \setminus \overline{B}} - \Delta(\widehat{u}|_{\Omega \setminus \overline{B}}) = f$ dans $\Omega \setminus \overline{B}$. Il reste donc à montrer que sa trace sur γ est nulle.

D'une part, $\overline{v}$, l'extension par 0 de v dans B , vérifie :

$$\alpha v - \Delta v = f \quad \text{dans } \omega, \quad (2.22)$$

$$\alpha \overline{v} - \Delta \overline{v} = \overline{f} \quad \text{dans } B, \quad (2.23)$$

$$v|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}. \quad (2.24)$$

D'autre part, les restrictions de $\widehat{u}$ à ω et B vérifient :

$$\alpha \widehat{u} - \Delta \widehat{u} = f \quad \text{dans } \omega, \quad (2.25)$$

$$\alpha \widehat{u} - \Delta \widehat{u} = \overline{f} \quad \text{dans } B. \quad (2.26)$$

Soit à présent $w \in H^1_{\gamma'}(\omega \cup \overline{B})$, une fonction test de $H^1(\omega \cup \overline{B})$ à trace nulle sur γ' . Multiplions (2.22) et (2.25) par w et intégrons par parties sur ω , on a :

$$\alpha \int_{\omega} v w + \int_{\omega} \nabla v \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\omega} f w, \quad (2.27)$$

$$\alpha \int_{\omega} \widehat{u} w + \int_{\omega} \nabla \widehat{u} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\omega} f w. \quad (2.28)$$

De même, multiplions (2.23) et (2.26) par w et intégrons par parties sur B , on a :

$$\alpha \int_B \overline{v} w + \int_B \nabla \overline{v} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \overline{v}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_B \overline{f} w, \quad (2.29)$$

$$\alpha \int_B \widehat{u} w + \int_B \nabla \widehat{u} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_B f w. \quad (2.30)$$

Or, $\overline{v}$ est nulle sur B . Par conséquent $\ll \frac{\partial \overline{v}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = 0$.

La somme des équations (2.27) et (2.29), nous donne

$$\alpha \int_{\omega \cup B} \overline{v} w + \int_{\omega \cup B} \nabla \overline{v} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\omega \cup B} \overline{f} w. \quad (2.31)$$

De même, en faisant la somme des équations (2.28) et (2.30), on a :

$$\alpha \int_{\omega \cup B} \widehat{u} w + \int_{\omega \cup B} \nabla \widehat{u} \cdot \nabla w - \ll \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma} = \int_{\omega \cup B} f w. \quad (2.32)$$

Observons que $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$, et que $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} := \left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\gamma}$ est le saut de la dérivée normale de $\widehat{u}$ à travers l'interface γ .

Rappelons que, par hypothèse, $\widehat{u}$ est solution de $(\mathbf{\Pi}_D - \mathbf{b})$. Elle vérifie alors :

$$\alpha \int_{\omega \cup B} \widehat{u} w + \int_{\omega \cup B} \nabla \widehat{u} \cdot \nabla w = \int_{\omega \cup B} \overline{f} w + \ll \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, w \gg_{\frac{1}{2}, \gamma}. \quad (2.33)$$

En comparant cette dernière équation, (2.33), avec (2.32), on conclut :

$$\left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\gamma}, \quad (2.34)$$

En notant $\phi := \hat{u} - \bar{v}$ et en faisant la différence des équations (2.22) et (2.25), et la différence des équations (2.23) et (2.26), on a

$$\alpha \phi - \Delta \phi = 0 \quad \text{dans } \omega \quad \text{et dans } B. \quad (2.35)$$

De plus, l'équation (2.34) implique

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\gamma} = 0. \quad (2.36)$$

Finalement, comme la trace de ϕ sur γ' est nulle, on en déduit que $\phi \equiv 0$. C'est-à-dire $\hat{u}|_{\overline{B} \cup \omega} = \bar{v}$, et comme par construction $\bar{v}$ est nulle sur B , on a $\hat{u}|_B = 0$. Ce qui implique $\hat{u}|_{\gamma} = 0$. D'où $\hat{u}|_{\Omega \setminus \overline{B}}$ est solution de $\mathbf{I}_D$. $\square$

Remarque 2.5 v étant dans $H_{\gamma}^1(\omega)$ et Δv dans $L^2(\omega)$, la dérivée normale $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$ appartient donc à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ (pas nécessairement à $L^2(\partial\omega)$). C'est pour cette raison qu'on a défini la forme linéaire $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_{\gamma}$ en utilisant le crochet de dualité $\ll \cdot, \cdot \gg_{\frac{1}{2}, \gamma}$. Cependant, en utilisant des résultats de régularité classiques, on sait que u appartient à $H^2(\Omega \setminus \overline{B})$ (voir DAUTRAY-LIONS [16] par exemple).

Comme le saut $\left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\gamma}$ n'est pas forcément nul, et bien que $\hat{u}$ soit assez régulière loin de γ , elle n'est que $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$ (voir GRISVARD [31]). Toutefois, on peut vérifier que v est assez régulière ($v \in H^2(\omega)$). D'où, l'appartenance de $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$ à $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$, en particulier à $L^2(\partial\omega)$. Ainsi, à la place du produit de dualité, on utilisera désormais cette définition de $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_{\gamma}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_{\gamma} : w \in H_0^1(\Omega) \longmapsto \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w. \quad (2.37)$$

Proposition 2.4 Soit v la solution du problème $(\mathbf{I}_D - \mathbf{a})$. La forme linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_{\gamma} : w \in H_0^1(\Omega) \longmapsto \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w \quad (2.38)$$

est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. La continuité découle du fait que $v \in H_{\gamma}^1(\omega)$ et $\Delta v \in L^2(\omega)$. En effet, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w = \int_{\omega} w \Delta v + \int_{\omega} \nabla v \cdot \nabla w, \quad (2.39)$$

où n désigne la normale extérieure au domaine ω (elle est égale à $\mathbf{n}$ si on est sur γ et à $\hat{\mathbf{n}}$ si on est sur γ'). En appliquant CAUCHY-SCHWARZ à l'inégalité (2.39), on a :

$$|\int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w| \leq |\int_{\partial \omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w| \leq \|\Delta v\|_{0,\omega} \|w\|_{0,\omega} + \|\nabla v\|_{0,\omega} \|\nabla w\|_{0,\omega}. \quad (2.40)$$

Comme v vérifie l'équation $\alpha v - \Delta v = f$ dans ω , il vient :

$$\|\Delta v\|_{0,\omega} \leq \|f\|_{0,\omega} + \alpha \|v\|_{0,\omega} \lesssim \|f\|_{0,\omega}, \quad (2.41)$$

où le symbole $\lesssim$ désigne une inégalité à une constante multiplicative près.

De même,

$$\|\nabla v\|_{0,\omega} \lesssim \|f\|_{0,\omega}. \quad (2.42)$$

Finalement en utilisant $\omega \subset \Omega$,

$$|\int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w| \lesssim \|w\|_{0,\omega} + \|\nabla w\|_{0,\omega} \lesssim \|w\|_{1,\omega} \leq \|w\|_{1,\Omega}. \quad (2.43)$$

□

Remarque 2.6 On peut aussi écrire la forme linéaire $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_{\gamma}$ en fonction des intégrales de volume. En effet, on introduit un problème auxiliaire défini sur le sous-domaine $\Omega^* = \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega})$, de frontière $\partial \Omega^* = \Gamma \cup \gamma'$. On introduit aussi l'espace $H_{\Gamma}^1(\Omega^*)$,

$$H_{\Gamma}^1(\Omega^*) = \{u \in H^1(\Omega^*), \quad u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (2.44)$$

On note par $\tilde{v} \in H_{\Gamma}^1(\Omega^*)$, la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha \tilde{v} - \Delta \tilde{v} = f & \text{dans } \Omega^*, \\ \tilde{v}|_{\gamma'} = \hat{u}|_{\gamma'}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$. On multiplie la première équation de $(\mathbf{II}_D - \mathbf{a})$ par w et on intègre par parties sur ω , on a

$$\int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w = \alpha \int_{\omega} v w + \int_{\omega} \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\omega} f w + \int_{\gamma'} \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w. \quad (2.46)$$

De même, on multiplie la première équation de (2.45) par w et on intègre par parties sur Ω^* en tenant compte du fait que w soit nulle sur Γ , on a

$$\int_{\gamma'} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w = \int_{\Omega^*} f w - \alpha \int_{\Omega^*} \tilde{v} w - \int_{\Omega^*} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w. \quad (2.47)$$

Par ailleurs, puisque f est $L^2(\Omega \setminus \overline{B})$, et $\tilde{v}|_{\gamma'} = \hat{u}|_{\gamma'}$, $\tilde{v}$ n'est qu'un prolongement, assez régulier, de v . Par conséquent,

$$\int_{\gamma'} \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w = \int_{\gamma'} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w. \quad (2.48)$$

D'où, en utilisant les équations (2.46) et (2.47), la forme linéaire $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma$ peut être définie par : pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\boxed{\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w = \int_\omega \nabla v \cdot \nabla w - \int_\omega f w + \alpha \left(\int_\omega v w - \int_{\Omega^*} \tilde{v} w \right) + \int_{\Omega^*} f w - \int_{\Omega^*} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla w.} \quad (2.49)$$

Bien évidemment, la définition de la forme linéaire $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma$, donnée par l'équation (2.49), n'est pas celle qu'on utilise en pratique, puisque le principe de la F.B.M. est tel qu'on ne construit pas de maillage, ni pour $\Omega \setminus \overline{B}$ ni pour Ω^* . On a donc choisi d'approcher l'intégrale $\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w$ en utilisant une formule de quadrature définie directement sur la surface γ (voir chapitre 3 pour plus de précision).

2.3.2 Cas des conditions aux limites non-homogènes

La formulation multi-domaines précédente se généralise, sans difficulté supplémentaire, au cas des conditions aux limites de type DIRICHLET non-homogènes. En effet, le cas des conditions non-homogènes sur Γ est standard. Quant au bord γ , en suivant le même raisonnement que celui de la proposition 2.3, on montre un résultat analogue :

Proposition 2.5 Soient $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $\tilde{g}$ un relèvement harmonique de g dans B . Le problème

$$\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} : \begin{cases} \text{trouver } u \in H_1^1(\Omega \setminus \overline{B}), \text{ telle que :} \\ \alpha u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ u = g \quad \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (2.50)$$

est équivalent (au sens de la proposition 2.3) à ce couple de sous-problèmes : trouver $(\hat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\omega)$ tel que :

$$\mathbf{II}'_{\mathbf{D}} : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} \alpha v - \Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v|_{\gamma'} = \hat{u}|_{\gamma'}, \\ v|_\gamma = g, \end{cases} \\ \mathbf{b} : \quad \alpha \hat{u} - \Delta \hat{u} = \bar{f} + \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.51)$$

Remarque 2.7 Si le relèvement harmonique de g n'est pas facile à calculer explicitement, on peut considérer n'importe quel autre relèvement $\tilde{g}$, à laplacien dans $L^2(B)$ (cette condition est remplie dès que $g \in H^{\frac{3}{2}}(\gamma)$). Avec cette dernière condition, $\Delta \tilde{g}$ peut être prolongé par 0 dans $\Omega \setminus \overline{B}$ en une fonction $L^2(\Omega)$. Dans ce cadre, l'équation $(\mathbf{II}'_{\mathbf{D}} - \mathbf{b})$ devient alors :

$$\alpha \hat{u} - \Delta \hat{u} = \bar{f} + \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta_\gamma - \Delta \tilde{g} \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.52)$$

Pour des raisons de simplicité, dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'au cas des conditions de DIRICHLET homogènes sur le bord γ .

Les deux problèmes $(\mathbf{II}_D - \mathbf{a})$ et $(\mathbf{II}_D - \mathbf{b})$ du système $\mathbf{II}_D$ sont couplés. Ce qui suggère la construction d'une formulation de point fixe. C'est l'objet de la section suivante.

2.4 Formulation de point fixe

Notre objectif est de transformer le problème $\mathbf{II}_D$

$$\mathbf{II}_D : \begin{cases} \mathbf{a} : & \begin{cases} \alpha v - \Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : & \alpha \widehat{u} - \Delta \widehat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.53)$$

en un problème de point fixe. Soit θ un paramètre réel. Considérons l'opérateur

$$\boxed{\mathcal{T}_\theta(\cdot, \cdot; f) : \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega) \\ (\widehat{u}, v) & \longmapsto & (\widehat{U}, V), \end{array}} \quad (2.54)$$

où $V \in H_\gamma^1(\omega)$ et $\widehat{U} \in H_0^1(\Omega)$ sont solutions de

$$\begin{cases} \alpha V - \Delta V = f & \text{dans } \omega, \\ V = \theta v + (1 - \theta)\widehat{u} & \text{sur } \gamma', \end{cases} \quad (2.55)$$

et

$$\alpha \widehat{U} - \Delta \widehat{U} = \bar{f} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.56)$$

Par définition de $\mathcal{T}_\theta$, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Pour $\theta \neq 1$, $(\widehat{u}, v)$ est solution de $\mathbf{II}_D$ si et seulement si*

$$\mathcal{T}_\theta(\widehat{u}, v; f) = (\widehat{u}, v). \quad (2.57)$$

La recherche d'un tel point fixe se fait par un processus itératif. En effet, soit $(\widehat{u}^m, v^m)$ la suite de $H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$(\widehat{u}^{m+1}, v^{m+1}) = \mathcal{T}_\theta(\widehat{u}^m, v^m; f). \quad (2.58)$$

On montrera que, sous certaines conditions sur θ , la suite ci-dessus converge vers la solution exacte du problème $\mathbf{II}_D$. Pour ce faire, on va se restreindre au cas homogène ($f = 0$). En effet, si $(\widehat{u}_0, v_0)$ est le point fixe de $\mathcal{T}_\theta$, la suite $(\widehat{u}^m - \widehat{u}_0, v^m - v_0)$ recouvre le cas non homogène.

On introduit les opérateurs linéaires $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_\gamma^1(\omega) \\ \widehat{u} &\longmapsto \mathbf{D}\widehat{u} = V, \text{ solution de } (\mathbf{II}_D - \mathbf{a}) : \begin{cases} \alpha V - \Delta V = 0 & \text{dans } \omega, \\ V|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{N} : H_\gamma^1(\omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ v &\longmapsto \mathbf{N}v = \widehat{U}, \text{ solution de } (\mathbf{I}_D - \mathbf{b}) : \alpha \widehat{U} - \Delta \widehat{U} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta \gamma \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.60)$$

On note par $\mathbf{T} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ le composé de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$: $\mathbf{T} = \mathbf{N} \circ \mathbf{D}$ qu'on notera parfois $\mathbf{ND}$. Cet opérateur vérifie les deux propriétés données par le lemme suivant :

Lemme 2.7 *L'opérateur $\mathbf{T}$ vérifie les propriétés suivantes :*

– pour tout $\widehat{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$,

$$|\mathbf{T}\widehat{u}|_{1,\Omega} \lesssim |\widehat{u}|_{1,\Omega}, \quad (2.61)$$

– pour tout $\widehat{u}$ dans $\mathcal{I}m(\mathbf{N})$,

$$\langle \mathbf{T}\widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} \leq 0. \quad (2.62)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)}$ désigne le produit scalaire (pondéré) dans $H_0^1(\Omega)$ défini par :

$$\langle u, w \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + \alpha \int_\Omega uw, \quad \forall u, w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.63)$$

Preuve. Soient $V = \mathbf{D}\widehat{u}$ et $\widehat{U} = \mathbf{T}\widehat{u} = \mathbf{N} \circ \mathbf{D}\widehat{u} = \mathbf{N}V$. La continuité de $\mathbf{T}$ découle de celle des opérateurs du diagramme suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{u} \in H_0^1(\Omega) &\longmapsto \widehat{u}|_{\gamma'} \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma') \\ &\downarrow \\ V &\in H_\gamma^1(\omega) \\ &\downarrow \\ \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right|_\gamma &\in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \longmapsto \widehat{U} \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Passons à l'équation (2.62), c'est-à-dire montrons que $\langle \widehat{U}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} \leq 0$. Comme $\widehat{U} = \mathbf{N}V$, en prenant $\widehat{u}$ comme fonction test, on a :

$$\langle \mathbf{ND}\widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} = \int_\Omega \nabla \widehat{U} \cdot \nabla \widehat{u} + \alpha \int_\Omega \widehat{U} \widehat{u} = \int_\gamma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \widehat{u}. \quad (2.65)$$

Or, $\widehat{u} \in \mathcal{I}m(N)$. Elle est donc solution de :

$$\alpha \widehat{u} - \Delta \widehat{u} = \xi \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.66)$$

pour une certaine fonction $\xi \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$. Multiplions (2.66) par V , et intégrons sur ω en utilisant le fait que la trace de V sur γ est nulle :

$$\int_\omega \nabla \widehat{u} \cdot \nabla V + \alpha \int_\omega \widehat{u} V - \int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \mathbf{n}} V = 0. \quad (2.67)$$

Une autre intégration par parties nous donne :

$$\underbrace{- \int_{\omega} \widehat{u} \Delta V + \alpha \int_{\omega} \widehat{u} V}_{0} + \int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \widehat{u} + \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \widehat{u} - \int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} V = 0, \quad (2.68)$$

et par suite, on a :

$$\int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \widehat{u} = \int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} V - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \widehat{u}, \quad (2.69)$$

d'où, en utilisant le fait que $V|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}$, on a :

$$\langle \mathbf{ND}\widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} = \int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \widehat{u} = \int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} V - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \widehat{u} = \int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \widehat{u} - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} V. \quad (2.70)$$

Remarquons que :

$$\begin{cases} \alpha \widehat{u} - \Delta \widehat{u} = 0 & \text{dans } \Omega^*, \\ \widehat{u}|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (2.71)$$

où $\Omega^* = \Omega \setminus (\bar{B} \cup \omega)$. Ce qui implique (en prenant $\widehat{u}$ comme fonction test et en intégrant par parties sur Ω^*) :

$$\int_{\gamma'} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} \widehat{u} = - \int_{\Omega^*} |\nabla \widehat{u}|^2 - \alpha \int_{\Omega^*} |\widehat{u}|^2 \leq 0. \quad (2.72)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha V - \Delta V = 0 & \text{dans } \omega, \\ V|_{\gamma} = 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

implique

$$\int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \widehat{\mathbf{n}}} V = \int_{\omega} |\nabla V|^2 + \alpha \int_{\omega} |V|^2 \geq 0. \quad (2.74)$$

Finalement, l'équation (2.70) et les inégalités (2.72) et (2.74) nous donnent :

$$\int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \widehat{u} \leq 0. \quad (2.75)$$

Ainsi,

$$\langle \widehat{U}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega}^{(\alpha)} \leq 0. \quad (2.76)$$

□

Notons par C_T la norme de l'opérateur $\mathbf{T} = \mathbf{N} \circ \mathbf{D}$ (constante optimale pour l'inégalité (2.61)). Le résultat suivant permet de prouver la convergence de l'algorithme de point fixe.

Proposition 2.8 *Pour tout $\theta \in]1 - \frac{2}{(1 + C_T)^2}, 1[$, il existe des constantes $k \in]0, 1[$ et $C_D > 0$ telles que, pour tout $(\widehat{u}, v) \in \mathcal{Im}(\mathcal{T}_{\theta}(\cdot, \cdot; 0))$,*

$$|\widehat{U}|_{1,\Omega} \leq k |\widehat{u}|_{1,\Omega}, \quad (2.77)$$

et

$$|V|_{1,\omega} \leq \theta|v|_{1,\omega} + C_D|\widehat{u}|_{1,\Omega}, \quad (2.78)$$

où $(\widehat{U}, V) = \mathcal{T}_\theta(\widehat{u}, v; 0)$. Le k optimal (par rapport à la majoration (2.78)) est obtenu pour $\theta = \theta_{opt} = 1 - \frac{1}{(1 + C_T)^2}$, et sa valeur est $k_{opt} = \sqrt{\theta_{opt}}$.

Preuve. On a, par hypothèse : $(\widehat{u}, v) \in \mathcal{Im}(\mathcal{T}_\theta^*(\cdot, \cdot; 0))$. Ce qui implique en particulier $\widehat{u} = \mathbf{N}v$. D'autre part, $(\widehat{U}, V) = \mathcal{T}_\theta(\widehat{u}, v; 0)$. On a alors :

$$V = \theta v + (1 - \theta)\mathbf{D}\widehat{u}. \quad (2.79)$$

L'inégalité (2.78) est donc une conséquence immédiate de la continuité de l'opérateur $\mathbf{D}$. On a noté par C_D la constante de continuité de $\mathbf{D}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \widehat{U} &= \mathbf{N}V \\ &= \theta\mathbf{N}v + (1 - \theta)\mathbf{N}\mathbf{D}\widehat{u} \\ &= \theta\widehat{u} + (1 - \theta)\mathbf{T}\widehat{u} \\ &= \widehat{u} + (1 - \theta)(\mathbf{T}\widehat{u} - \widehat{u}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} |\widehat{U}|_{1,\Omega}^2 = \langle \widehat{U}, \widehat{U} \rangle_{1,\Omega} &= |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2 + (1 - \theta)^2 |\mathbf{T}\widehat{u} - \widehat{u}|_{1,\Omega}^2 \\ &\quad + 2(1 - \theta) \langle \mathbf{T}\widehat{u} - \widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega} \\ &= |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2 - 2(1 - \theta) |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2 + 2(1 - \theta) \langle \mathbf{T}\widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega} \\ &\quad + (1 - \theta)^2 |\mathbf{T}\widehat{u} - \widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Or, en utilisant l'inégalité (2.62) du lemme 2.7 (pour alléger les notations, α est choisi égale à 0 ici), on a

$$\langle \mathbf{T}\widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega} \leq 0. \quad (2.82)$$

Par ailleurs, la continuité de l'opérateur $\mathbf{T}$ implique :

$$|\mathbf{T}\widehat{u} - \widehat{u}|_{1,\Omega}^2 \leq (1 + C_T)^2 |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (2.83)$$

L'équation (2.81) implique donc

$$|\widehat{U}|_{1,\Omega}^2 \leq (1 - 2(1 - \theta) + (1 - \theta)^2(1 + C_T)^2) |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (2.84)$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \left] 1 - \frac{2}{(1 + C_T)^2}, 1 \right[$,

$$k = \sqrt{1 - 2(1 - \theta) + (1 - \theta)^2(1 + C_T)^2} < 1. \quad (2.85)$$

D'où l'inégalité (2.77). Le θ optimal θ_{opt} en découle directement en prenant la valeur, admissible, pour laquelle le membre de gauche de l'inégalité (2.85) est minimal. $\square$

Corollaire 2.9 *Supposons que $\theta \in]1 - 2/(1 + C_T)^2, 1[$. On a alors : pour tout $(\widehat{u}^0, v^0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\omega)$, la suite $(\widehat{u}^m, v^m)$ définie par la relation de récurrence :*

$$(\widehat{u}^{m+1}, v^{m+1}) = \mathcal{T}_\theta(\widehat{u}^m, v^m; 0) \quad (2.86)$$

converge vers $(0, 0)$.

Preuve. soit $(\lambda^m, \mu^m) \in \mathbb{R}^2$ la suite définie par

$$\begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\widehat{u}^0|_{1,\Omega} \\ |v^0|_{1,\omega} \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^{m+1} \\ \mu^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ C_D & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^m \\ \mu^m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda^m \\ \mu^m \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

En utilisant les inégalités (2.77) et (2.78), on a $|\widehat{u}^m|_{1,\Omega} \leq \lambda^m$ et $|v^m|_{1,\omega} \leq \mu^m$. Comme le rayon spectral $\rho(A) = \max(k, \theta)$ est strictement inférieur à 1, la suite (λ^m, μ^m) converge vers $(0, 0)$, et de même $(|\widehat{u}^m|_{1,\Omega}, |v^m|_{1,\omega})$. $\square$

Remarque 2.8 *Le calcul de θ_{opt} , qui apparaît dans la proposition 2.8, est basé sur la constante C_T . Cette dernière dépend implicitement de la géométrie du domaine. Dans des cas simples, où le second membre $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ est radial, Γ , γ et γ' sont des sphères concentriques de $\mathbb{R}^3$ (ou des cercles concentriques de $\mathbb{R}^2$), on peut avoir une estimation assez précise de cette constante et par suite la possibilité de calculer avec précision θ_{opt} (voir [53]). Par exemple, dans le cas où γ est une sphère de rayon R et γ' est une sphère de rayon $R + \varepsilon$, on a $C_T \sim \frac{R}{\varepsilon}$.*

Par ailleurs, calculer le paramètre θ_{opt} est certainement un avantage puisque, dans des cas simples par exemple, cela permet la convergence de l'algorithme de point fixe en une seule itération, mais, en pratique, comme on le verra dans le chapitre 3, l'estimation de ce paramètre n'est pas indispensable ; il suffit simplement de prendre θ raisonnablement proche de 1 pour avoir une convergence en une dizaine d'itérations.

Chapitre 3

Méthode de la frontière élargie : discrétisation et implémentation

Sommaire

3.1	Quelques outils nécessaires	42
3.1.1	Théorème de NITSCHKE et SCHATZ	42
3.1.2	Rappel de quelques notations	42
3.1.3	Inégalité inverse pour les fonctions harmoniques	43
3.1.4	Projection de GALERKIN	43
3.2	Problèmes discrets	44
3.2.1	Schéma semi-discret	44
3.2.2	Espaces d'approximation et Algorithme	52
3.3	Méthodes de résolution et implémentation	54
3.3.1	Problème global	54
3.3.2	Problème local	62
3.4	Tests numériques	68
3.4.1	Le Laplacien dans un domaine perforé. Un nombre « assez grand » de particules.	68

Afin d'alléger la notation, et sans perdre de généralité, on s'intéresse dans ce chapitre au problème modèle $\mathbf{I}_D$, décrit dans les deux précédents chapitres. En outre, on prend $\alpha = 0$, et par suite nous nous intéresserons à la discrétisation du problème de POISSON, par la F.B.M., en utilisant les éléments finis $\mathbb{Q}^1$ (voir l'annexe B pour plus de détails sur ce type d'éléments finis). L'espace (de dimension finie) d'approximation par ces éléments finis est noté par $\mathbb{U}_h$, où h désigne le pas de discrétisation. Rappelons que $\mathbb{U}_h \subset H_0^1(\Omega)$.

3.1 Quelques outils nécessaires

Pour construire le problème discret, montrer sa convergence et établir les estimations d'erreurs (dans le chapitre 4), on a besoin des résultats suivants :

3.1.1 Théorème de NITSCHKE et SCHATZ

Soient $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. On suppose que pour G_0 et G deux sphères concentriques telles que $G_0 \subset\subset G \subset\subset \Omega_1$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $0 < h \leq h_0$, les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H.1 : il existe une projection $\mathcal{P}_h : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{U}_h$ et une constante C (dépendant de G_0 , G et $\mathcal{P}_h$), telles que pour tout $w \in H^\ell(G)$ ($1 \leq \ell \leq 2$),

$$\|w - \mathcal{P}_h w\|_{1,G} \leq Ch^{\ell-1} \|w\|_{\ell,G}. \quad (3.1)$$

Si en plus $\text{supp}(w) \subseteq \overline{G_0}$, alors $\text{supp}(\mathcal{P}_h w) \subseteq \overline{G}$.

H.2 : Pour tout $h < h_0$, il existe un ensemble G_h , $G_0 \subset\subset G_h \subset\subset G$, et une constante C (dépendant de G_0 et G) tels que pour tout $w_h \in \mathbb{U}_h$, si $0 \leq l \leq 1$,

$$\|w_h\|_{1,G_h} \leq Ch^{l-1} \|w_h\|_{l,G_h}. \quad (3.2)$$

Théorème 3.1 (NITSCHKE et SCHATZ [57]). Soient $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. On suppose que les hypothèses **H.1** et **H.2** sont satisfaites. Soient $u \in H^\ell(\Omega_1)$ ($1 \leq \ell \leq 2$) et $u_h \in \mathbb{U}_h$, telles que, pour tout $w_h \in \mathbb{U}_h \cap H_0^1(\Omega_1)$,

$$\int_{\Omega_1} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w_h = 0. \quad (3.3)$$

Il existe alors $h_1 \leq 1$ et une constante C (dépendant de Ω_0 et Ω_1), tels que pour tout $h < h_1$, on a :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega_0} \leq C (h^{\ell-1} \|u\|_{\ell,\Omega_1} + \|u - u_h\|_{0,\Omega_1}). \quad (3.4)$$

3.1.2 Rappel de quelques notations

- On rappelle que Ω^* est le sous-domaine de $\Omega \setminus \overline{B}$, défini par :

$$\Omega^* = \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega}).$$

(Voir la figure 3.1).

- Le théorème 3.1 et le lemme 3.2 vont être appliqués en prenant

$$\Omega_0 = \Omega^* \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{B}.$$

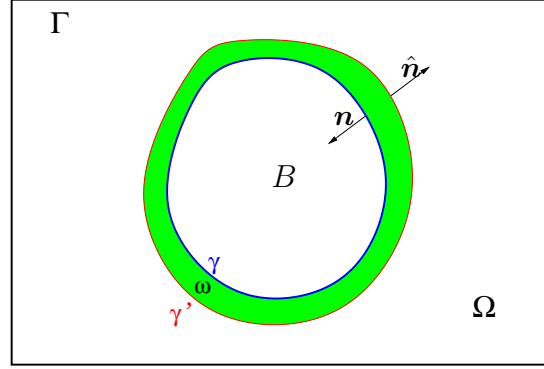


FIG. 3.1 – Géométrie.

3.1.3 Inégalité inverse pour les fonctions harmoniques

Lemme 3.2 Soient $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$. Il existe une constante C , telle que l'on ait pour toute fonction ξ harmonique sur Ω_1

$$|\xi|_{2,\Omega_0} \leq C \|\xi\|_{1,\Omega_1}. \quad (3.5)$$

Preuve. Soit $\rho \in C_0^\infty(\Omega_1)$ une fonction *cut-off* avec $\rho = 1$ dans Ω_0 . On a alors :

$$|\xi|_{2,\Omega_0} \leq |\rho\xi|_{2,\Omega_0} \leq \|\Delta(\rho\xi)\|_{0,\Omega_1}. \quad (3.6)$$

Le résultat en découle en remarquant que

$$\Delta(\rho\xi) = \xi\Delta\rho + \rho\Delta\xi + 2\nabla\rho \cdot \nabla\xi. \quad (3.7)$$

et le fait que ξ soit harmonique sur Ω_1 . $\square$

3.1.4 Projection de GALERKIN

On note par π_h la projection de GALERKIN, définie par : $\pi_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{U}_h$, telle que,

$$\int_{\Omega} \nabla(\pi_h u) \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (3.8)$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.3 Si en plus Ω est convexe, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u - \pi_h u\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u\|_{1,\Omega}. \quad (3.9)$$

3.2 Problèmes discrets

Étant donnée $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$, on s'intéresse à la classe de problèmes $\mathbf{I}_D$, introduits dans le chapitre 1 :

$$\mathbf{I}_D : \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \overline{B}), \text{ telle que :} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Rappelons que résoudre ce problème par la F.B.M., revient à résoudre la formulation multi-domaines $\mathbf{II}_D$ qui lui est associée (voir chapitre 2) : trouver $(\widehat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ telles que :

$$\mathbf{II}_D : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v|_{\gamma'} = \widehat{u}|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : -\Delta \widehat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.1 Schéma semi-discret

Puisqu'on a à résoudre deux problèmes couplés, l'un local (défini au voisinage des trous) et l'autre global (posé dans tout le domaine Ω), leur analyse mathématique notamment celle du problème discret n'est pas une tâche aisée. Pour simplifier ce problème, dans un premier temps on a essayé de se focaliser sur la résolution globale.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la discrétisation du problème global ($\mathbf{II}_D - \mathbf{b}$). Le problème local ($\mathbf{II}_D - \mathbf{a}$) est conservé sous sa forme continue.

On introduit donc un espace d'approximation de dimension finie $\mathbb{U}_h \subset H_0^1(\Omega)$ vérifiant les hypothèses du théorème 3.1 (NITSCHKE et SCHATZ) de la section 3.1.1. Cette analyse a été réalisée en collaboration avec S. BERTOLUZZA (voir [8]).

La solution discrète du problème global est définie à l'aide de la projection de GALERKIN π_h (section 3.1.4).

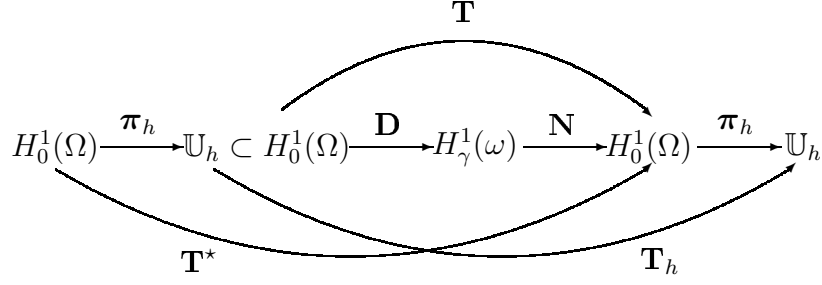
Pour définir le schéma semi-discret, on suit la même méthodologie que celle du chapitre 2 où on a construit et montré la convergence d'un algorithme de point fixe correspondant au problème continu. En plus des opérateurs $\mathbf{N}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T} = \mathbf{N} \circ \mathbf{D}$) introduits dans le chapitre 2 (page 35), on a besoin de deux nouveaux opérateurs $\mathbf{T}^*$ et $\mathbf{T}_h$ qui sont donnés par le diagramme de la figure 3.2.

Plus précisément $\mathbf{T}^* = \mathbf{T} \circ \pi_h = \mathbf{N} \circ \mathbf{D} \circ \pi_h$ et il est défini par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{T}^* : & H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\pi_h} & \mathbb{U}_h \subset H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\mathbf{D}} & H_\gamma^1(\omega) & \xrightarrow{\mathbf{N}} & H_0^1(\Omega) \\ & \widehat{u} & \longmapsto & \pi_h \widehat{u} & \longmapsto & V = \mathbf{D} \pi_h \widehat{u} & \longmapsto & \widehat{U} = \mathbf{N} \mathbf{D} \pi_h \widehat{u}, \end{array} \quad (3.12)$$

où, $V = \mathbf{D} \pi_h \widehat{u}$ est solution du problème (local)

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \omega, \\ V|_{\gamma'} = (\pi_h \widehat{u})|_{\gamma'}, \end{cases} \quad (3.13)$$


 FIG. 3.2 – Diagramme définissant les opérateurs $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$, et $\mathbf{T}_h$.

et $\widehat{U} = \mathbf{ND}\pi_h \widehat{u}$ est solution du problème (global)

$$-\Delta \widehat{U} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \delta \gamma \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.14)$$

Quant à l'opérateur $\mathbf{T}_h$, il est égal à $\pi_h \circ \mathbf{T}$, et il agit sur $\widehat{U} = \mathbf{ND}\pi_h \widehat{u}$ en la projetant sur l'espace discret $\mathbb{U}_h$ (via la projection de GALERKIN π_h).

À l'instar de l'opérateur $\mathcal{T}_\theta(\cdot, \cdot, f)$ (chapitre 2, page 35) définissant la formulation de point fixe dans le cadre du problème continu, on introduit $\mathcal{T}_\theta^h(\cdot, \cdot, f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\theta^h(\cdot, \cdot, f) : & \mathbb{U}_h \times H_\gamma^1(\omega) & \longrightarrow \mathbb{U}_h \times H_\gamma^1(\omega) \\ & (\widehat{u}_h, v) & \longmapsto (\widehat{U}_h, V), \end{array}} \quad (3.15)$$

où, $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ étant donnée, $V \in H_\gamma^1(\omega)$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta V = f & \text{dans } \omega, \\ V = \theta v + (1 - \theta)\widehat{u}_h & \text{sur } \gamma', \end{cases} \quad (3.16)$$

et $\widehat{u}_h \in \mathbb{U}_h$, est telle que, pour tout $w_h \in \mathbb{U}_h$

$$\int_\Omega \nabla \widehat{U}_h \cdot \nabla w_h = \int_\Omega \bar{f} w_h + \int_\gamma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} w_h. \quad (3.17)$$

La question qui se pose est donc la suivante : existe-t-il un point fixe $(\widehat{u}_h, v^*) \in \mathbb{U}_h \times H_\gamma^1(\omega)$ du problème

$$\boxed{(\widehat{u}_h, v^*) = \mathcal{T}_\theta^h(\widehat{u}_h, v^*; f)}? \quad (3.18)$$

Afin d'apporter une réponse à cette question, on passe par une étape intermédiaire qui consiste à reprendre la formulation de point fixe du problème continu (2.58) et à remplacer, dans les conditions aux limites du problème local, $\widehat{u}_h$ par son projeté (au sens de GALERKIN). On considère donc la formulation de point fixe auxiliaire définie par l'opérateur $\mathcal{T}_\theta^*(\cdot, \cdot, f)$ qui est donné par

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_\theta^*(\cdot, \cdot, f) : & H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega) & \longrightarrow H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega) \\ & (\widehat{u}, v) & \longmapsto (\widehat{U}, V), \end{array}} \quad (3.19)$$

où $V \in H_\gamma^1(\omega)$ et $\widehat{U} \in H_0^1(\Omega)$ sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} -\Delta V &= f & \text{dans } \omega, \\ V &= \theta v + (1 - \theta)\pi_h \widehat{u} & \text{sur } \gamma', \end{cases} \quad (3.20)$$

et

$$-\Delta \widehat{U} = \overline{f} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.21)$$

La formulation de point fixe auxiliaire consiste à trouver $(u^*, v^*) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$, solution de

$$\boxed{(u^*, v^*) = \mathcal{T}_\theta^*(u^*, v^*; f)}. \quad (3.22)$$

L'objet du lemme 3.4 est de faire le lien entre les solutions du schéma auxiliaire (3.22) et celles du schéma semi-discret (3.18).

Lemme 3.4 *Si (u^*, v^*) est une solution du schéma auxiliaire (3.22), alors $(\pi_h u^*, v^*)$ est une solution du schéma semi-discret (3.18). Réciproquement, si $(\widehat{u}_h, v^*)$ est une solution du schéma (3.18) et si on prend $u^* \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de*

$$-\Delta u^* = \overline{f} + \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.23)$$

alors le couple (u^, v^*) est solution du schéma auxiliaire (3.22).*

Preuve. (u^*, v^*) est une solution de (3.22), ce qui implique que v^* et u^* sont respectivement solutions de

$$\begin{cases} -\Delta v^* &= f & \text{dans } \omega, \\ v^* &= \pi_h u^* & \text{sur } \gamma', \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$-\Delta u^* = \overline{f} + \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma \quad \text{sur } \Omega. \quad (3.25)$$

Soit $(\widehat{U}_h, V) \in \mathbb{U}_h \times H_\gamma^1(\omega)$, tel que $(\widehat{U}_h, V) = \mathcal{T}_\theta^h(\pi_h u^*, v^*; f)$. On a alors :

$$\begin{cases} -\Delta V &= f & \text{dans } \omega, \\ V &= \theta v^* + (1 - \theta)\pi_h u^* & \text{sur } \gamma'. \end{cases} \quad (3.26)$$

Or, sur γ' , $\theta v^* + (1 - \theta)\pi_h u^* = v^*$, et par suite $V = v^*$.

Par ailleurs, par définition de $\widehat{U}_h$, on a :

$$\int_\Omega \nabla \widehat{U}_h \cdot \nabla w_h = \int_\Omega \overline{f} w_h + \int_\gamma \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (3.27)$$

Comme u^* est solution du problème (3.25), elle vérifie donc :

$$\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla w_h = \int_\Omega \overline{f} w_h + \int_\gamma \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (3.28)$$

En comparant les équations (3.27) et (3.28), on a :

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{U}_h \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h, \quad (3.29)$$

qui veut dire $\widehat{U}_h = \pi_h u^*$. D'où $(\pi_h u^*, v^*)$ est solution de (3.18).

Réciproquement, soit $(\widehat{u}_h, v^*)$ solution du schéma (3.18). Ceci implique :

$$\begin{cases} -\Delta v^* &= f & \text{dans } \omega, \\ v^* &= \widehat{u}_h & \text{sur } \gamma', \end{cases} \quad (3.30)$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_h \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} \bar{f} w_h + \int_{\gamma} \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (3.31)$$

Sachant que u^* est solution de (3.23) et $\widehat{u}_h$ vérifie (3.31), il est clair que $\widehat{u}_h = \pi_h u^*$. Soit à présent $(\widehat{U}, V) = \mathcal{T}_{\theta}^*(u^*, v^*; f)$. V vérifie donc :

$$\begin{cases} -\Delta V &= f & \text{dans } \omega, \\ V &= \theta v^* + (1 - \theta) \pi_h u^* & \text{sur } \gamma'. \end{cases} \quad (3.32)$$

Or, sur γ' , $\theta v^* + (1 - \theta) \pi_h u^* = v^*$, et par suite $V = v^*$. Il est clair qu'en comparant (3.21) et (3.23), on en déduit que $\widehat{U} = u^*$. Ce qui achève la démonstration. $\square$

À l'aide du lemme 3.4, on a pu faire le lien entre la formulation semi-discrète (3.18) et le schéma de point fixe auxiliaire (3.22), il suffit donc d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour (3.22). Pour ce faire, on a besoin d'établir une propriété sur l'opérateur $\mathbf{T}^*$ (défini par (3.12)) qui approche au mieux le résultat du lemme 2.7 page 36). On a le lemme suivant :

Lemme 3.5 Soient $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $\xi \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ telles que $\widehat{u}$ soit solution de l'équation

$$-\Delta \widehat{u} = \xi \delta_{\gamma}, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.33)$$

Il existe alors une constante C^* , telle que,

$$\langle \mathbf{T}^* \widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega} \leq C^* h^2 \|\widehat{u}\|_{1,\Omega}^2, \quad (3.34)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ désigne le produit scalaire dans $H_0^1(\Omega)$: $\forall u, w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (3.35)$$

Preuve. Comme $\mathbf{T}^* = \mathbf{N} \circ \mathbf{D} \circ \pi_h$ (voir (3.12)), en considérant $V \in H_{\gamma}^1(\omega)$, défini par $V = \mathbf{D}(\pi_h \widehat{u})$, on a $\mathbf{T}^* \widehat{u} = \mathbf{N}V$. D'où $\mathbf{T}^* \widehat{u}$ est solution de :

$$\int_{\Omega} \nabla (\mathbf{T}^* \widehat{u}) \cdot \nabla w = \int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (3.36)$$

Or,

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{T}^* \hat{u}) \cdot \nabla \hat{u}, \quad (3.37)$$

avec $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$. Il vient donc

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} = \int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \hat{u}. \quad (3.38)$$

Par ailleurs, en multipliant $-\Delta \hat{u} = \xi \delta_{\gamma}$ par V et en intégrant le tout sur ω , on a

$$\int_{\gamma} \xi V = \int_{\omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla V - \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} V + \int_{\gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} V. \quad (3.39)$$

Or, $V = 0$ sur γ (rappelons que $V \in H_{\gamma}^1(\omega)$). L'équation (3.39) devient donc

$$\int_{\omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla V - \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} V = 0. \quad (3.40)$$

Une deuxième intégration par parties (de l'équation (3.40)) nous donne

$$- \int_{\omega} \hat{u} \Delta V - \int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \hat{u} + \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} - \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} V = 0. \quad (3.41)$$

Or, $-\Delta V = 0$ dans ω et $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$. On a donc

$$\int_{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} = - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} + \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} V. \quad (3.42)$$

C'est-à-dire, en utilisant (3.38) et en intercalant $\pi_h \hat{u}$,

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} = - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} + \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} V. \quad (3.43)$$

Rappelons que $V = \mathbf{D}(\pi_h \hat{u})$. Ce qui implique en particulier : $V = \pi_h \hat{u}$ sur γ' . En intercalant V dans la première intégrale de (3.43) et $\hat{u}$ dans la deuxième, l'équation (3.43) devient

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} = - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} V - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) + \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} + \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} (\pi_h \hat{u} - \hat{u}). \quad (3.44)$$

Or, il est facile de vérifier que

$$- \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} V = -|V|_{1,\omega}^2 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} \hat{u} = -|\hat{u}|_{1,\Omega^*}^2, \quad (3.45)$$

avec $\Omega^* = \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega})$. Ce qui implique finalement

$$\boxed{\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} = -|V|_{1,\omega}^2 - |\hat{u}|_{1,\Omega^*}^2 - \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) + \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} (\pi_h \hat{u} - \hat{u})}. \quad (3.46)$$

On a donc besoin de majorer les deux intégrales du second membre de l'équation (3.46). On a

$$\left| \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) \right| \leq \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-\frac{1}{2}, \gamma'} \|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|_{\frac{1}{2}, \gamma'}. \quad (3.47)$$

Par le premier et le deuxième théorème de trace, on a respectivement

$$\|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|_{\frac{1}{2}, \gamma'} \lesssim |\hat{u} - \pi_h \hat{u}|_{1, \Omega^*} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-\frac{1}{2}, \gamma'} \lesssim |V|_{1, \omega}. \quad (3.48)$$

Appliquons maintenant le théorème de NITSCHKE et SCHATZ (théorème 3.1 page 42). On a donc

$$|\hat{u} - \pi_h \hat{u}|_{1, \Omega^*} \lesssim h|\hat{u}|_{2, \tilde{\Omega}} + \|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|_{0, \tilde{\Omega}}, \quad (3.49)$$

où on a noté par $\tilde{\Omega}$ un ouvert vérifiant $\Omega^* \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega \setminus \overline{B}$ (ce nouveau sous-domaine a été introduit afin de garantir une régularité suffisante de $\hat{u}$).

En utilisant l'inégalité inverse pour les fonctions harmoniques donnée par le lemme 3.2 (page 43), l'équivalence entre les normes $H^1_{\Gamma}(\Omega \setminus \overline{B})$ et $H^1(\Omega \setminus \overline{B})$, et le fait que $\Omega \setminus \overline{B}$ est un sous-domaine de Ω , on a :

$$|\hat{u}|_{2, \tilde{\Omega}} \lesssim \|\hat{u}\|_{1, \Omega \setminus \overline{B}} \lesssim |\hat{u}|_{1, \Omega \setminus \overline{B}} \leq |\hat{u}|_{1, \Omega}. \quad (3.50)$$

Quant à la deuxième norme du membre de droite de l'inégalité (3.49), en utilisant l'argument de dualité d'AUBIN-NITSCHKE (voir [15] par exemple), on a :

$$\|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|_{0, \tilde{\Omega}} \lesssim h|\hat{u}|_{1, \Omega}. \quad (3.51)$$

Revenons à l'équation (3.46). En utilisant les inégalités (3.47), (3.48) et celles qui les suivent, il vient :

$$- \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) \leq \left| \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) \right| \leq Ch|V|_{1, \omega} |\hat{u}|_{1, \Omega}. \quad (3.52)$$

En appliquant l'inégalité de CAUCHY⁵ au produit $Ch|V|_{1, \omega} |\hat{u}|_{1, \Omega}$ de (3.52), on a pour tout réel strictement positif ε ,

$$- \int_{\gamma'} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} (\hat{u} - \pi_h \hat{u}) \leq \varepsilon |V|_{1, \omega}^2 + \frac{C}{\varepsilon} h^2 |\hat{u}|_{1, \Omega}^2. \quad (3.53)$$

De même, la deuxième intégrale de l'équation (3.46) peut être majorée de cette façon :

$$\int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} (\pi_h \hat{u} - \hat{u}) \leq \left| \int_{\gamma'} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} (\pi_h \hat{u} - \hat{u}) \right| \leq \varepsilon |\hat{u}|_{1, \Omega^*}^2 + \frac{C}{\varepsilon} h^2 |\hat{u}|_{1, \Omega}^2. \quad (3.54)$$

Finalement, l'équation (3.46) implique

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1, \Omega} \leq (\varepsilon - 1) (|\hat{u}|_{1, \Omega^*}^2 + |V|_{1, \omega}^2) + 2 \frac{C}{\varepsilon} h^2 |\hat{u}|_{1, \Omega}^2. \quad (3.55)$$

⁵ Soient $a, b > 0$. On a : $\forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$. En effet, $ab = (\sqrt{2\varepsilon}a)(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}) \leq \frac{1}{2}[(\sqrt{2\varepsilon}a)^2 + (\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}})^2]$.

Il suffit donc de choisir ε égal à 1 pour avoir le résultat final. C'est-à-dire :

$$\langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} \lesssim h^2 |\hat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (3.56)$$

□

Remarque 3.1 Sachant que $\mathbf{T}^*$ est la composée de $\mathbf{T}$ et π_h , sa continuité est une conséquence immédiate de celle de $\mathbf{T}$. (Voir lemme 2.7 page 36).

Le lemme 3.5, que l'on vient de démontrer, nous est indispensable pour établir un résultat de convergence. On poursuit donc le même cheminement que celui du chapitre 2. On a alors la proposition suivante (l'analogue de la proposition 2.8 page 37 établie dans le cadre de la formulation continue) :

Proposition 3.6 Soient $(\hat{u}, v) \in \mathcal{Im}(\mathcal{T}_\theta^*(\cdot, \cdot; 0))$ et $(\hat{U}, V) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$, tels que

$$(\hat{U}, V) = \mathcal{T}_\theta^*(\hat{u}, v; 0).$$

Pour h assez petit, il existe $0 < \theta^* < 1$, $0 < k^* < 1$ et $C_\Omega > 0$, tels que : pour tout $\theta \in]\theta^*, 1[$,

$$|\hat{U}|_{1,\Omega} \leq k^* |\hat{u}|_{1,\Omega}, \quad (3.57)$$

et

$$|V|_{1,\omega} \leq \theta |v|_{1,\omega} + C_D |\hat{u}|_{1,\Omega}. \quad (3.58)$$

Preuve. Remarquons que le fait que $(\hat{u}, v)$ appartienne à $\mathcal{Im}(\mathcal{T}_\theta^*(\cdot, \cdot; 0))$ implique en particulier $\hat{u} = \mathbf{N}v$. D'autre part, $(\hat{U}, V) = \mathcal{T}_\theta^*(\hat{u}, v; 0)$. On a alors

$$V = \theta v + (1 - \theta) \mathbf{D} \pi_h \hat{u}. \quad (3.59)$$

L'inégalité (3.58) est donc une conséquence immédiate de la continuité des opérateurs $\mathbf{D}$ (cf. chapitre 2) et π_h . On a noté par C_D la constante de continuité de $\mathbf{D}$. Celle de π_h est majorée par 1. En effet,

$$|\pi_h \hat{u}|_{1,\Omega} \leq |\hat{u}|_{1,\Omega}. \quad (3.60)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \mathbf{N}V \\ &= \theta \mathbf{N}v + (1 - \theta) \mathbf{N} \mathbf{D} \pi_h \hat{u} \\ &= \theta \hat{u} + (1 - \theta) \mathbf{T}^* \hat{u} \\ &= \hat{u} + (1 - \theta) (\mathbf{T}^* \hat{u} - \hat{u}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Et par suite,

$$\begin{aligned} |\hat{U}|_{1,\Omega}^2 = \langle \hat{U}, \hat{U} \rangle_{1,\Omega} &= |\hat{u}|_{1,\Omega}^2 + (1 - \theta)^2 |\mathbf{T}^* \hat{u} - \hat{u}|_{1,\Omega}^2 \\ &\quad + 2(1 - \theta) \langle \mathbf{T}^* \hat{u} - \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} \\ &= |\hat{u}|_{1,\Omega}^2 - 2(1 - \theta) |\hat{u}|_{1,\Omega}^2 + 2(1 - \theta) \langle \mathbf{T}^* \hat{u}, \hat{u} \rangle_{1,\Omega} \\ &\quad + (1 - \theta)^2 |\mathbf{T}^* \hat{u} - \hat{u}|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Or, en utilisant le lemme 3.5, on a : il existe une constante C^* , telle que

$$\langle \mathbf{T}^* \widehat{u}, \widehat{u} \rangle_{1,\Omega} \leq C^* h^2 |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (3.63)$$

Et d'après la continuité de l'opérateur $\mathbf{T}^*$, il existe une constante strictement positive C_{T^*} , qui ne dépend que du domaine, telle que

$$|\mathbf{T}^* \widehat{u} - \widehat{u}|_{1,\Omega}^2 \leq (1 + C_{T^*})^2 |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (3.64)$$

L'équation (3.62) implique donc

$$|\widehat{U}|_{1,\Omega}^2 \leq (1 - 2(1 - \theta)(1 - C^* h^2) + (1 - \theta)^2(1 + C_{T^*})^2) |\widehat{u}|_{1,\Omega}^2. \quad (3.65)$$

Ainsi, pour tout $h < \frac{1}{\sqrt{C^*}}$ et $\theta \in \left] 1 - 2 \frac{1 - C^* h^2}{(1 + C_{T^*})^2}, 1 \right[$,

$$k^* = \sqrt{1 - 2(1 - \theta)(1 - C^* h^2) + (1 - \theta)^2(1 + C_{T^*})^2} < 1. \quad (3.66)$$

D'où l'inégalité (3.57). $\square$

Remarque 3.2 Remarquons que ce résultat de convergence est compatible avec celui du schéma continu. En effet, en faisant tendre h vers 0 dans l'expression de k^* , on retrouve le résultat de la proposition 2.8 page 37.

Corollaire 3.7 On suppose que le paramètre de relaxation θ vérifie les hypothèses de la proposition précédente. On se donne $(\widehat{u}^0, v^0) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$. Alors, la suite récurrente $(\widehat{u}^m, v^m) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ définie par : pour tout entier $m \geq 1$,

$$(\widehat{u}^m, v^m) = \mathcal{T}_\theta^*(\widehat{u}^{m-1}, v^{m-1}; 0), \quad (3.67)$$

converge vers $(0, 0)$.

Preuve. La démonstration est en tout point analogue à celle du corollaire 2.9 page 39. Rappelons qu'il s'agit du même résultat que dans le cas continu, où l'on considère l'opérateur $\mathcal{T}_\theta$ au lieu de $\mathcal{T}_\theta^*$. $\square$

Remarque 3.3 On vient de montrer que, si elle existe, la solution du schéma auxiliaire (3.22) est unique. La démonstration a été faite dans le cas homogène ($f = 0$). Pour le cas général, il suffit de considérer la suite $(\widehat{u}^m - \widehat{u}^0, v^m - v^0)$.

Corollaire 3.8 Grâce au lemme 3.4, l'unicité de solution pour le schéma semi-discret (3.18) découle de celle du schéma auxiliaire (3.22).

Proposition 3.9 Il existe une unique fonction $\widehat{u}_h \in \mathbb{U}_h$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_h \cdot \nabla w_h = \int_{\Omega} \bar{f} w_h + \int_{\gamma} \frac{\partial v^*}{\partial n} w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (3.68)$$

Où $v^* \in H_\gamma^1(\omega)$ est définie par

$$\begin{cases} -\Delta v^* &= f & \text{dans } \omega, \\ v^* &= \widehat{u}_h & \text{sur } \gamma'. \end{cases} \quad (3.69)$$

Autrement dit, le problème (3.18) :

$$(\widehat{u}_h, v^*) = \mathcal{T}_\theta^h(\widehat{u}_h, v^*; f)$$

admet un unique point fixe.

Preuve. D'après la remarque 3.3, si une telle fonction $\widehat{u}_h$ existe, elle est unique. Or, le problème en $\widehat{u}_h$ est en dimension finie et par conséquent l'unicité implique l'existence. $\square$

3.2.2 Espaces d'approximation et Algorithme

Le domaine de calcul Ω , qualifié de global, est souvent choisi de forme parallélépipédique pour pouvoir être approché par un maillage cartésien. On note par Ξ_h une grille cartésienne construite sur Ω , où h fait référence au pas de la grille. Notons que h dépend des pas de discrétisation dans les trois directions, qui ne sont pas forcément égales, et qui peuvent aussi varier d'un élément à un autre. Pour tout hexaèdre $\mathcal{Q} \in \Xi_h$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^r(\mathcal{Q})$ désigne l'ensemble des polynômes de degré – par rapport à chacune des trois variables – inférieur ou égal à r . En pratique on prend souvent r égal à 1.

L'espace d'approximation par éléments finis $\mathbb{Q}^1$ est donc donné par l'expression suivante :

$$\mathbb{U}_h = \{\widehat{u}_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \forall \mathcal{Q} \in \Xi_h, \widehat{u}_h|_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{Q}^1(\mathcal{Q})\} \subset H_0^1(\Omega). \quad (3.70)$$

Quant au domaine auxiliaire ω , qualifié de local, sa forme dépend surtout de celle de sa frontière intérieure γ ($\gamma = \partial B$). En effet, le choix de la frontière extérieure γ' étant « libre », il est donc judicieux de la choisir de même forme que γ . En pratique, les trous considérés sont souvent de forme sphérique. Il suffit donc de construire un maillage surfacique de γ . En effet, à partir de celui-ci, on peut construire les différentes couches du maillage volumique de ω en prenant les images du maillage de γ par des homothéties adéquates. Ce qui simplifie beaucoup le maillage de ω . On donnera plus de détails sur la construction de ce maillage dans la section 3.3. Pour l'heure, on note par $\Lambda_{h'}$ l'ensemble des hexaèdres modifiés $\widetilde{\mathcal{Q}}$ (non droits) dont le « diamètre » est caractérisé par un paramètre de discrétisation h' et qui sont censés discrétiser le domaine ω . L'espace d'approximation par éléments finis $\mathbb{Q}^1$ des fonctions de $H_\gamma^1(\omega)$ est donné par :

$$\mathbb{V}_{h'} = \{v_{h'} \in \mathcal{C}(\overline{\omega}), \forall \widetilde{\mathcal{Q}} \in \Lambda_{h'}, v_{h'}|_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \in \mathbb{Q}^1(\widetilde{\mathcal{Q}})\} \subset H_\gamma^1(\omega). \quad (3.71)$$

La procédure de résolution du problème $\mathbf{II}_D$ se fait par un processus de point fixe dont l'itération k est donnée par l'algorithme 3.1.

boucle

Étape 1 : relaxation.

Calculer $\widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_{h'}}$, l'interpolé de $\widehat{u}_h^{k-1}$ sur $\gamma'_{h'}$, et poser

$$\kappa_{h'}^k = \theta \kappa_{h'}^{k-1} + (1 - \theta) \widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_{h'}}, \quad (3.72)$$

où $\gamma'_{h'} \subset \Lambda_{h'}$ est une approximation de la surface γ' .

Étape 2 : résolution locale.

Calculer $v_{h'}^k \in \mathbb{V}_{h'}$, la solution de

$$\begin{cases} \alpha \int_{\omega} v_{h'}^k w + \int_{\omega} \nabla v_{h'}^k \cdot \nabla w = \int_{\omega} f w, & \forall w \in \mathbb{V}_{h'} \quad w|_{\gamma'_{h'}} = 0, \\ v_{h'}^k|_{\gamma'_{h'}} = \kappa_{h'}^k. \end{cases} \quad (3.73)$$

Étape 3. Calculer

$$\xi_{h'}^k = \frac{\partial v_{h'}^k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\gamma_{h'}}. \quad (3.74)$$

Étape 4 : résolution globale.

Calculer $\widehat{u}_h^k \in \mathbb{U}_h$, la solution de

$$\alpha \int_{\Omega} \widehat{u}_h^k w + \int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_h^k \cdot \nabla w = \int_{\Omega} \bar{f} w + \int_{\gamma_{h'}} \xi_{h'}^k w \quad \forall w \in \mathbb{U}_h. \quad (3.75)$$

Avec $\gamma_{h'} \subset \Lambda_{h'}$ est une approximation de la surface γ .

fin boucle

ALGORITHME 3.1: F.B.M. Formulation multi-domaines.

3.3 Méthodes de résolution et implémentation

3.3.1 Problème global

Comme on l'a décrit dans la section précédente, le domaine global Ω est choisi de forme parallélépipédique dans le but d'utiliser des solveurs rapides. Le maillage considéré est une grille cartésienne. Ce maillage, en hexaèdres, est construit par tensorisation ; ce qui revient à ne considérer que des maillages unidimensionnels de trois côtés parallèles aux axes.

Le côté parallèle à l'axe des x est subdivisé (de manière uniforme ou non) en $(n_x + 1)$ intervalles, ce qui revient à considérer $(n_x + 2)$ points dans cette direction. De même, on prend $(n_y + 2)$ (respectivement $(n_z + 2)$) points sur le côté parallèle à l'axe des y (respectivement z). Voir figure 3.3.

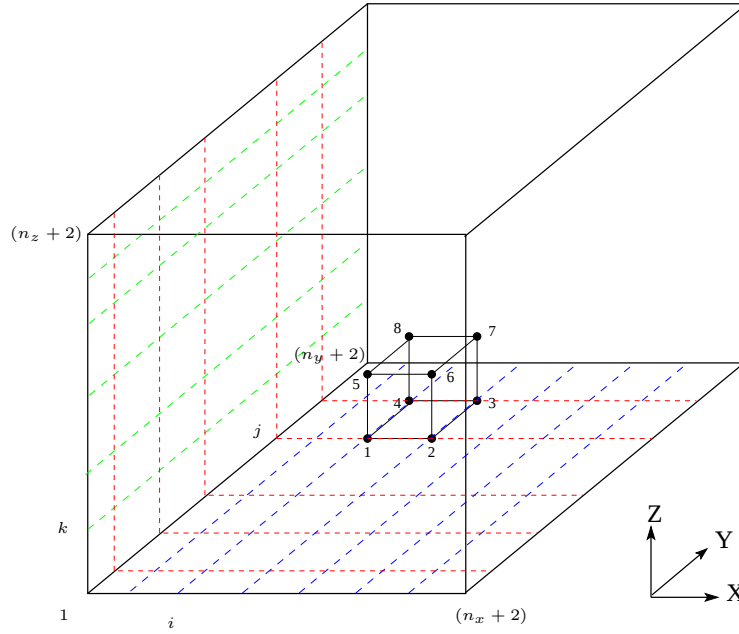


FIG. 3.3 – Maillage global.

Le maillage tensoriel ainsi construit, noté par la grille Ξ_h , est constitué de $(n_x + 2)(n_y + 2)(n_z + 2)$ points et $(n_x + 1)(n_y + 1)(n_z + 1)$ éléments (hexaèdres). Le pas de discrétisation dans la direction des x est noté par h_x , et celui dans la direction des y (respectivement z) est noté par h_y (respectivement h_z). Notons que ces paramètres de discrétisation peuvent varier en espace.

On s'intéresse à présent à la résolution numérique du problème global qui apparaît dans la quatrième étape de l'algorithme 3.1 et dans la troisième étape de l'algorithme 3.3 sous cette forme : calculer $\hat{u}_h^k \in \mathbb{U}_h$, la solution de

$$\alpha \int_{\Omega} \hat{u}_h^k w + \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h^k \cdot \nabla w = \int_{\Omega} \bar{f} w + \int_{\gamma_{h'}} \xi_{h'}^k w \quad \forall w \in \mathbb{U}_h. \quad (3.76)$$

Pour alléger les notations, on s'intéresse ici au cas où l'on considère des conditions de DIRICHLET homogènes au bord du domaine Ω . Les points de la grille Ξ_h situés sur Γ (représenté dans la figure 3.4 par le trait discontinu) ne sont donc pas des degrés de liberté. On ne considère donc que les sommets de Ξ_h situés à l'intérieur de Ω (voir figure 3.4). C'est-à-dire $N = n_x n_y n_z$ degrés de liberté. Le seul terme « non standard » dans le problème (3.76) est $\int_{\gamma_{h'}} \xi_{h'}^k w$, puisqu'on intègre sur une surface (γ) qui n'est pas « prise en charge » par le maillage Ξ_h . On donnera plus de précisions sur ce terme dans la section suivante.

Dans ce qui suit, on suppose qu'on a pu tenir compte de ce terme dans l'assemblage du second membre du problème (3.76). On a ainsi un vecteur de $\mathbb{R}^N$ qu'on note par $\mathcal{F}$.

Le système linéaire issu de la discrétisation du problème (3.76) s'écrit alors sous la forme $\mathcal{A}u = \mathcal{F}$, où $\mathcal{A}$ est la matrice $N \times N$, symétrique, définie positive et définie par $\mathcal{A} = A + \alpha M$, où A est la matrice de rigidité et M la matrice de masse. Les coefficients de la matrice de rigidité et ceux de la matrice de masse sont définis par les expressions suivantes : pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j, \quad m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j,$$

où, pour $1 \leq i \leq N$, φ_i est la fonction de base associée au $i^{\text{ème}}$ sommet de Ξ_h . Ces fonctions forment une base de l'espace $\mathbb{U}_h$. Voir l'annexe B page 148 pour l'expression explicite de ces fonctions.

Dans notre cas, discrétisation par éléments finis Q^1 basés sur la grille Ξ_h , on vérifie que la matrice $\mathcal{A}$ est séparable et se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = A_x \otimes M_y \otimes M_z + M_x \otimes A_y \otimes M_z + M_x \otimes M_y \otimes A_z + \alpha M_x \otimes M_y \otimes M_z, \quad (3.77)$$

où, A_x , A_y et A_z désignent respectivement des matrices $n_x \times n_x$, $n_y \times n_y$ et $n_z \times n_z$ symétriques, tridiagonales et définies positives. Elles sont les matrices de rigidité associées aux maillages monodimensionnels des axes des x , des y et des z . De même, M_x , M_y et M_z sont les matrices de masse correspondant aux maillages monodimensionnels des axes des x , des y et des z . Elles sont respectivement des matrices $n_x \times n_x$, $n_y \times n_y$ et $n_z \times n_z$ symétriques, tridiagonales et définies positives. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel de matrices, définie par : pour tous entiers strictement positifs m , n , k et l . Pour toutes matrices $R = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ et $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$R \otimes S := \begin{pmatrix} s_{11}R & \dots & s_{1n}R \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{m1}R & \dots & s_{mn}R \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{km,ln}(\mathbb{R}). \quad (3.78)$$

Remarque 3.4 On vérifie facilement que dans le cas d'une discrétisation uniforme dans

chacune des trois directions, les matrices A_x , A_y et A_z sont définies par :

$$A_x = \frac{1}{h_x} \text{tridiag}\{-1, 2, -1\} \quad , \quad M_x = \frac{h_x}{6} \text{tridiag}\{1, 4, 1\}, \quad (3.79)$$

$$A_y = \frac{1}{h_y} \text{tridiag}\{-1, 2, -1\} \quad , \quad M_y = \frac{h_y}{6} \text{tridiag}\{1, 4, 1\}, \quad (3.80)$$

$$A_z = \frac{1}{h_z} \text{tridiag}\{-1, 2, -1\} \quad , \quad M_z = \frac{h_z}{6} \text{tridiag}\{1, 4, 1\}. \quad (3.81)$$

Dans le cas d'une discrétisation non uniforme, paramétrée par les suites $(h_{x,j})_{1 \leq j \leq n_x-1}$, $(h_{y,j})_{1 \leq j \leq n_y-1}$ et $(h_{z,j})_{1 \leq j \leq n_z-1}$, ces matrices sont données par :

$$A_x = \text{tridiag}\left\{-\frac{1}{h_{x,j}}, \frac{h_{x,j} + h_{x,j+1}}{h_{x,j}h_{x,j+1}}, -\frac{1}{h_{x,j+1}}\right\}, \quad (3.82)$$

$$M_x = \frac{1}{6} \text{tridiag}\{h_{x,j}, 2(h_{x,j} + h_{x,j+1}), h_{x,j+1}\}, \quad (3.83)$$

$$A_y = \text{tridiag}\left\{-\frac{1}{h_{y,j}}, \frac{h_{y,j} + h_{y,j+1}}{h_{y,j}h_{y,j+1}}, -\frac{1}{h_{y,j+1}}\right\}, \quad (3.84)$$

$$M_y = \frac{1}{6} \text{tridiag}\{h_{y,j}, 2(h_{y,j} + h_{y,j+1}), h_{y,j+1}\}, \quad (3.85)$$

$$A_z = \text{tridiag}\left\{-\frac{1}{h_{z,j}}, \frac{h_{z,j} + h_{z,j+1}}{h_{z,j}h_{z,j+1}}, -\frac{1}{h_{z,j+1}}\right\}, \quad (3.86)$$

$$M_z = \frac{1}{6} \text{tridiag}\{h_{z,j}, 2(h_{z,j} + h_{z,j+1}), h_{z,j+1}\}. \quad (3.87)$$

En utilisant la décomposition (3.77), le système algébrique issu de la discrétisation du problème (3.76) s'écrit sous une forme tridiagonale par blocs donnée par cette équation :

$$\begin{pmatrix} D_1 & C_2 & . & . & . & . \\ C_2 & D_2 & C_3 & . & . & . \\ . & \ddots & \ddots & \ddots & . & . \\ . & . & C_i & D_i & C_{i+1} & . \\ . & . & . & \ddots & \ddots & C_{n_z} \\ . & . & . & . & C_{n_z} & D_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n_z} \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

où, pour $1 \leq i \leq n_z$, u_i et f_i sont respectivement les $i^{\text{èmes}}$ blocs de longueurs $n_x n_y$ de u et $\mathcal{F}$. Un bloc d'indice i correspond aux noeuds du plan $z = (i-1)h_z$. C_i et D_i sont les matrices $n_x n_y \times n_x n_y$ définies par :

$$C_i = (a_z^{i,i+1} + \alpha m_z^{i,i+1}) M_x \otimes M_y + m_z^{i,i+1} (A_x \otimes M_y + M_x \otimes A_y), \quad (3.89)$$

$$D_i = (a_z^{i,i} + \alpha m_z^{i,i}) M_x \otimes M_y + m_z^{i,i} (A_x \otimes M_y + M_x \otimes A_y). \quad (3.90)$$

Remarque 3.5 Lorsqu'il s'agit de discrétisations uniformes dans chacune des trois directions, on a :

$$a_z^{i,i+1} = -\frac{1}{h_z}, \quad a_z^{i,i} = \frac{2}{h_z}, \quad m_z^{i,i+1} = \frac{h_z}{6}, \quad m_z^{i,i} = \frac{2}{3}h_z. \quad (3.91)$$

Et par suite toutes les matrices C_i , $1 \leq i \leq n_z$ sont égales et elles valent

$$C = \left(-\frac{1}{h_z} + \alpha \frac{h_z}{6}\right) M_x \otimes M_y + \frac{h_z}{6} (A_x \otimes M_y + M_x \otimes A_y). \quad (3.92)$$

De même, les matrices D_i , $1 \leq i \leq n_z$ valent

$$D = \left(\frac{2}{h_z} + \alpha \frac{2}{3} h_z\right) M_x \otimes M_y + \frac{2}{3} h_z (A_x \otimes M_y + M_x \otimes A_y). \quad (3.93)$$

Pour résoudre le système linéaire (3.88), on utilise une variante de la méthode PSCR (*Partial Solution Variant of the Cyclic Reduction*). Il s'agit d'une méthode rapide, développée par l'équipe de Y. KUZNETSOV. On cite en particulier les travaux de T. ROSSI et J. TOIVANEN [68, 67]. Elle est dédiée à la résolution directe de systèmes linéaires en utilisant des techniques de séparation de variables. Sa complexité est de l'ordre de $\mathcal{O}(N \log N)$. Cette méthode est basée sur des techniques de projection, de résolution partielle et de séparation de variables introduites dans A.A. ABAKUMOV *et al.* [1], Y. KUZNETSOV *et al.* [43, 45] et P.S. VASSILEVSKI [80].

Pour appliquer la méthode PSCR à notre système algébrique (3.88), on suit le même cheminement que celui dans [67]. L'objectif est de ramener la résolution du système (3.88), de taille $N \times N$ ($N = n_x n_y n_z$), en la résolution de systèmes de tailles réduits. Plus précisément, la première étape consiste à réécrire le système (3.88) de sorte à ce que l'on puisse découpler les blocs d'indices pairs et ceux d'indices impairs. On se ramène donc à n_z problèmes de taille $n_x n_y \times n_x n_y$. La deuxième étape consiste à répéter le même processus pour calculer les blocs u_i , de longueur $n_x n_y$ en résolvant des problèmes de taille $n_x \times n_x$. Pour ce faire, on suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $n_z = 2^k - 1$. On a également besoin du lemme suivant :

Lemme 3.10 *Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n_z\}$, les matrices C_i et D_j commutent.*

Preuve. En utilisant les définitions des matrices A_t et $M_{t'}$, $t, t' \in \{x, y, z\}$, données par les équations (3.79)–(3.81), ou bien par les équations (3.82)–(3.87) dans le cas non uniforme, on vérifie facilement que A_t et $M_{t'}$ commutent. Le résultat en découle immédiatement en utilisant les expressions des matrices C_i et D_j données par les équations (3.89) et (3.90). $\square$

On considère trois équations successives du système (3.88). On pose $u_0 = u_{n_z+1} = 0$, pour $i = 2, 4, \dots, n_z - 1$, on a :

$$C_{i-1}u_{i-2} + D_{i-1}u_{i-1} + C_i u_i = \mathcal{F}_{i-1}, \quad (3.94)$$

$$C_i u_{i-1} + D_i u_i + C_{i+1} u_{i+1} = \mathcal{F}_i, \quad (3.95)$$

$$C_{i+1} u_i + D_{i+1} u_{i+1} + C_{i+2} u_{i+2} = \mathcal{F}_{i+1}. \quad (3.96)$$

Afin d'éliminer les blocs d'indices impairs des équations (3.94)–(3.96), on multiplie (3.94) par $-C_i D_{i-1}^{-1}$ et (3.96) par $-C_{i+1} D_{i+1}^{-1}$ puis on fait la somme avec l'équation (3.95). On obtient : pour $i = 2, 4, \dots, n_z - 1$,

$$\begin{aligned} -C_i C_{i-1} D_{i-1}^{-1} u_{i-2} + (D_i - C_i^2 D_{i-1}^{-1} - C_{i+1}^2 D_{i+1}^{-1}) u_i - \\ C_{i+1} C_{i+2} D_{i+1}^{-1} u_{i+2} = \mathcal{F}_i - C_i D_{i-1}^{-1} \mathcal{F}_{i-1} - C_{i+1} D_{i+1}^{-1} \mathcal{F}_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

On a ainsi obtenu un système réduit de $2^{k-1} - 1$ équations dont les inconnues sont les blocs u_i d'indices pairs. Une fois ce système résolu, les blocs u_j , d'indices impairs, sont obtenus en résolvant le système diagonal par blocs suivant :

$$D_j u_j = \mathcal{F}_j - C_j u_{j-1} - C_{j+1} u_{j+1}, \quad \text{pour } j = 1, 3, \dots, n_z - 2, n_z. \quad (3.98)$$

Le processus d'élimination qui nous a conduit au système réduit (3.97) est répété $(k - 1)$ fois jusqu'à ce qu'on aboutisse à une seule équation dont l'inconnue est le bloc du milieu, celui d'indice pair $\frac{n_z+1}{2} = 2^{k-1}$. Plus précisément, soit r un entier vérifiant $0 \leq r \leq k - 1$. À présent, l'indice $i = 1, \dots, 2^{k-r} - 1$. Notons par $C_{i \cdot 2^r}^{(0)} = C_{i \cdot 2^r}$, $D_{i \cdot 2^r}^{(0)} = D_{i \cdot 2^r}$ et $\mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(0)} = \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}$. Après r éliminations de type (3.97), on se ramène à un système réduit dont les inconnues sont les $2^{k-r} - 1$ blocs (chacun est de longueur $n_x n_y$) d'indices $1 \cdot 2^r, 2 \cdot 2^r, 3 \cdot 2^r, \dots, (2^{k-r} - 1) \cdot 2^r = n_z - 2^r + 1$. Ce système est donné par :

$$\begin{pmatrix} D_{1 \cdot 2^r}^{(r)} & C_{2 \cdot 2^r}^{(r)} & & & \\ C_{2 \cdot 2^r}^{(r)} & D_{2 \cdot 2^r}^{(r)} & C_{3 \cdot 2^r}^{(r)} & & \\ & C_{3 \cdot 2^r}^{(r)} & D_{3 \cdot 2^r}^{(r)} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & C_{(2^{k-r}-1) \cdot 2^r}^{(r)} \\ & & & C_{(2^{k-r}-1) \cdot 2^r}^{(r)} & D_{n_z-2^r+1}^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1 \cdot 2^r} \\ u_{2 \cdot 2^r} \\ u_{3 \cdot 2^r} \\ \vdots \\ u_{n_z-2^r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1 \cdot 2^r}^{(r)} \\ \mathcal{F}_{2 \cdot 2^r}^{(r)} \\ \mathcal{F}_{3 \cdot 2^r}^{(r)} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n_z-2^r+1}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

où, pour $r = 1, \dots, k - 1$ et $i = 1, \dots, 2^{k-r} - 1$,

$$D_{i \cdot 2^r}^{(r)} = D_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} - \left(C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} \right)^2 \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^{-1} - \left(C_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^2 \left(D_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^{-1}, \quad (3.100)$$

$$C_{i \cdot 2^r}^{(r)} = -C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} C_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^{-1}, \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(r)} &= \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} - C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^{-1} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \\ &\quad - C_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)} \right)^{-1} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Finalement, après $(k - 1)$ éliminations, on aboutit à une seule équation dont l'inconnue est le bloc du milieu $u_{2^{k-1}} = u_{\frac{n_z+1}{2}}$. Il s'agit de l'équation :

$$\boxed{D_{2^{k-1}}^{(k-1)} u_{2^{k-1}} = \mathcal{F}_{2^{k-1}}^{(k-1)}}. \quad (3.103)$$

Les autres blocs, d'indices pairs et impairs, sont calculés en résolvant des systèmes réduits diagonaux par blocs en faisant r éliminations avec $r = k - 2, \dots, 0$. Ce système à

2^{k-r-1} blocs d'inconnues s'écrit sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} D_{1 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} & & & & \\ & D_{2 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} & & & \\ & & D_{3 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{n_z-2^r+1}^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1 \cdot 2^{r+1}-2^r} \\ u_{2 \cdot 2^{r+1}-2^r} \\ u_{3 \cdot 2^{r+1}-2^r} \\ \vdots \\ u_{n_z-2^r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} \\ g_{2 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} \\ g_{3 \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} \\ \vdots \\ g_{n_z-2^r+1}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

où, pour $j = 1, \dots, 2^{k-r-1}$,

$$g_{j \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} = \mathcal{F}_{j \cdot 2^{r+1}-2^r}^{(r)} - C_{(j-1) \cdot 2^{r+1}}^{(r)} u_{(j-1) \cdot 2^{r+1}} - C_{j \cdot 2^{r+1}}^{(r)} u_{j \cdot 2^{r+1}}. \quad (3.105)$$

Remarque 3.6 La procédure de résolution qu'on vient de décrire consiste à résoudre le problème de départ, à $N \times N$ ($N = n_x n_y n_z$) degrés de liberté, en diagonalisant (par blocs) la matrice sous-jacente. Il s'agit d'une décomposition par blocs de taille $n_x n_y$.

Notons qu'à l'issue de cette diagonalisation, les matrices D_i et C_i ont toujours une structure tensorielle (cf. (3.89) et (3.90)), ce qui suggère de répéter la même procédure pour ramener la résolution d'un système à $n_x n_y \times n_x n_y$ degrés de liberté en la résolution de systèmes réduits de taille $n_x \times n_x$. Dans les deux cas (passage d'un problème à $n_x n_y n_z \times n_x n_y n_z$ degrés de liberté à des systèmes de taille $n_x n_y \times n_x n_y$, et passage d'un problème à $n_x n_y \times n_x n_y$ degrés de liberté à des systèmes de taille $n_x \times n_x$), la diagonalisation de la matrice sous-jacente est donnée par l'algorithme 3.2.

Les seules différences résident dans la définition des matrices C_i et D_i et dans l'écriture des dimensions sous la forme d'une puissance de 2.

Dans le premier cas, C_i et D_i sont données par les équations (3.89) et (3.90) et l'entier k , supérieur ou égal à 2, est défini tel que $n_z = 2^k - 1$.

Dans le deuxième cas, k désigne l'entier supérieur ou égal à 2 tel que $n_y = 2^k - 1$. Les matrices C_i et D_i , faisant apparaître uniquement A_x et M_x , sont définies à partir des équations (3.89) et (3.90), et en utilisant la définition du produit tensoriel donné par (3.78).

À titre d'exemple, cette procédure est schématisée par les figures 3.4 et 3.5 dans le cas d'une discrétisation uniforme dans chacune des trois directions. On suppose que $n_x = n_y = n_z = 15 = 2^4 - 1$, ce qui revient à prendre $k = 4$ pour les trois paramètres de discrétisation. La première procédure de diagonalisation nous ramène à n_z systèmes réduits dont les inconnues sont les blocs représentés dans la figure 3.4 par les quinze plans perpendiculaires à l'axe des z . Comme $k = 4$, il s'agit de quatre étapes de résolution : la première est dédiée au calcul du bloc du milieu (le plan d'indice 1 dans la figure 3.4), lors de la deuxième étape ce sont les deux blocs représentés par les plans d'indice 2 qui sont calculés, la troisième étape consiste à calculer les quatre blocs qui représentent les plans d'indice 3 et lors de la quatrième étape on calcule les blocs d'indices impairs, représentés par les plans d'indice 4.

$u_0 = u_{n+1} = 0$.

pour $r = 1, \dots, k-1$, **faire**

pour $i = 1, \dots, 2^{k-r} - 1$, **faire**

 Calculer

$C_{i \cdot 2^r}^{(0)} = C_{i \cdot 2^r}$, $D_{i \cdot 2^r}^{(0)} = D_{i \cdot 2^r}$ et $\mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(0)} = \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}$.

$$D_{i \cdot 2^r}^{(r)} = D_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} - \left(C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)}\right)^2 \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^{-1} - \left(C_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^2 \left(D_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^{-1},$$

$$C_{i \cdot 2^r}^{(r)} = -C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} C_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(r)} = & \mathcal{F}_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} - C_{i \cdot 2^r}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^{-1} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r - 2^{r-1}}^{(r-1)} \\ & - C_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)} \left(D_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)}\right)^{-1} \mathcal{F}_{i \cdot 2^r + 2^{r-1}}^{(r-1)}. \end{aligned}$$

fin pour

fin pour

Résoudre $D_{2^{k-1}}^{(k-1)} u_{2^{k-1}} = \mathcal{F}_{2^{k-1}}^{(k-1)}$.

pour $r = k-2, \dots, 0$, **faire**

pour $j = 1, \dots, 2^{k-r-1}$, **faire**

 Calculer $g_{j \cdot 2^{r+1} - 2^r}^{(r)} = \mathcal{F}_{j \cdot 2^{r+1} - 2^r}^{(r)} - C_{(j-1) \cdot 2^{r+1}}^{(r)} u_{(j-1) \cdot 2^{r+1}} - C_{j \cdot 2^{r+1}}^{(r)} u_{j \cdot 2^{r+1}}$.

 Résoudre $D_{j \cdot 2^{r+1} - 2^r}^{(r)} u_{j \cdot 2^{r+1} - 2^r} = g_{j \cdot 2^{r+1} - 2^r}^{(r)}$.

fin pour

fin pour

ALGORITHME 3.2: Diagonalisation par blocs.

Le calcul de chacun des blocs susmentionnés se fait par diagonalisation afin de se ramener à des blocs unidimensionnels. De même, puisque $n_y = 15 = 2^4 - 1$, là encore il s'agit de 4 étapes de résolution : dans la première on calcule le bloc du milieu, représenté par la ligne d'indice 1 dans la figure 3.5, lors de la deuxième étape ce sont les deux blocs représentés par les lignes d'indice 2, la troisième étape est consacrée au calcul des blocs représentant les quatre lignes d'indice 3 et lors de la quatrième étape ce sont les blocs d'indices pairs qui sont calculés. Ils sont représentés par les lignes d'indice 4.

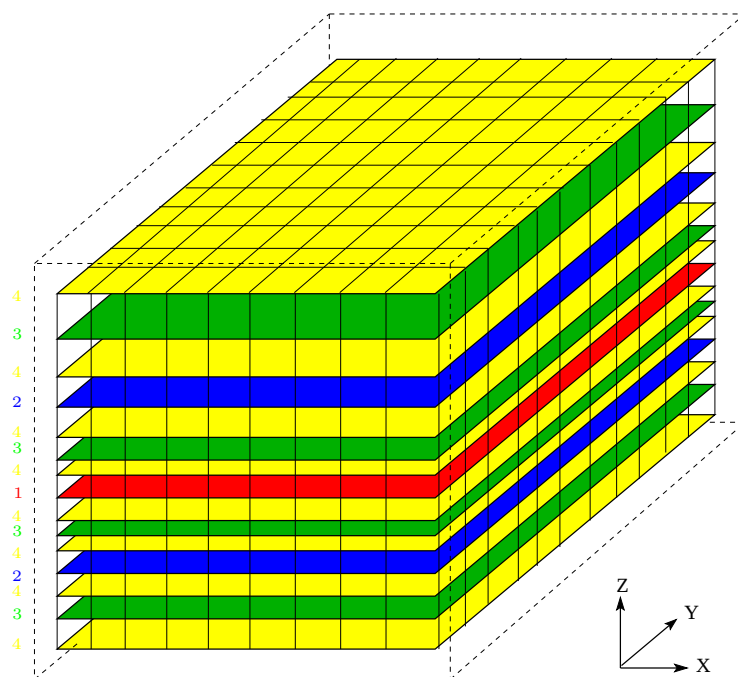
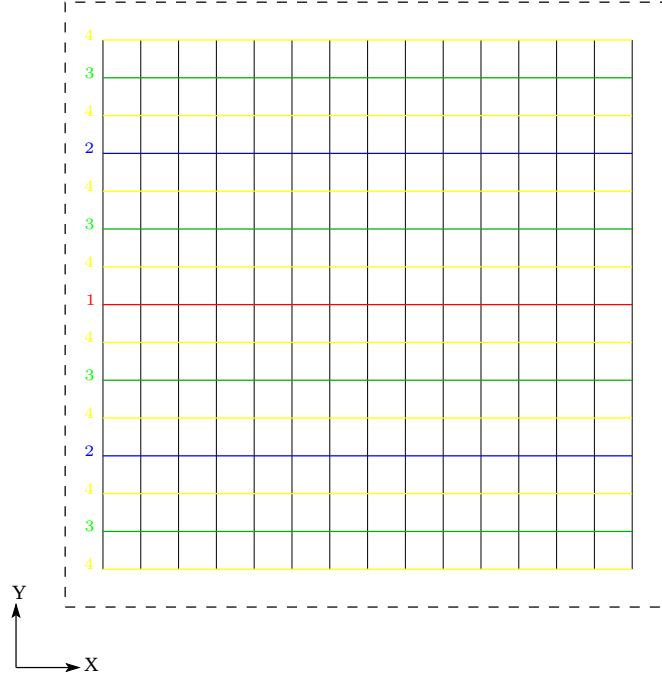


FIG. 3.4 – Exemple de la décomposition par blocs pour $k = 4$.

On trouvera plus de détails sur le calcul des différents termes qui apparaissent dans l'algorithme 3.2, notamment le calcul des seconds membres et l'inversion des matrices D_i , dans [68] et [67]. Le solveur qu'on utilise pour la résolution des systèmes linéaires de type (3.77) a été développé par T. ROSSI et J. TOIVANEN de l'université de Jyväskylä (Finlande). Pour avoir une idée sur la rapidité du solveur, on a mesuré le temps de calcul effectif pour résoudre un Laplacien sur le cube $] - 1, 1[^3$ avec 129 points de discrétisation dans chacune des trois directions (un peu plus de deux millions de degrés de liberté) est 15.66 secondes CPU. ⁶

⁶Le calcul a été fait sur *Hydre*, le cluster du Laboratoire Jacques-Louis LIONS.


 FIG. 3.5 – Dispositions des sous-blocs du plan (x, y) .

3.3.2 Problème local

Telle qu'elle apparaît dans une itération de l'algorithme 3.1, la discrétisation du problème local par éléments finis Q^1 consiste à calculer $v_{h'} \in \mathbb{V}_{h'}$, la solution de :

$$\begin{cases} \alpha \int_{\omega} v_{h'} w + \int_{\omega} \nabla v_{h'} \cdot \nabla w = \int_{\omega} f w, & \forall w \in \mathbb{V}_{h'} \quad w|_{\gamma'_{h'}} = 0, \\ v_{h'}|_{\gamma'_{h'}} = \kappa_{h'}. \end{cases} \quad (3.106)$$

où, l'espace de discrétisation $\mathbb{V}_{h'}$ est défini par :

$$\mathbb{V}_{h'} = \{v_{h'} \in \mathcal{C}(\overline{\omega}), \forall \tilde{\mathcal{Q}} \in \Lambda_{h'}, v_{h'}|_{\tilde{\mathcal{Q}}} \in \mathbb{Q}^1(\tilde{\mathcal{Q}})\} \subset H^1_{\gamma}(\omega). \quad (3.107)$$

Cette discrétisation par éléments finis est classique, ce qui explique la diversité des méthodes dédiées à la résolution du système linéaire sous-jacent. Le choix qui nous semble naturel est d'utiliser une méthode directe de type **CHOLESKY**, ou, **LU**. En effet, dans notre cas, le domaine ω est une couche sphérique (mince) autour d'une particule rigide. En outre, bien qu'il puisse être mobile, le domaine ω garde toujours la même forme et le même nombre de degrés de liberté. L'idée consiste donc à calculer la décomposition **LU** de la matrice de rigidité et/ou celle de la matrice de masse dès le début, avant même de procéder aux itérations de l'algorithme de point fixe. Cette technique reste encore utile dans le cas de plusieurs particules identiques. Un seul couple de matrices (rigidité et masse) est assemblé pour tous les domaines de type ω attachés à ces particules.

Pour construire un maillage en hexaèdres du domaine ω , on a juste besoin d'un maillage en quadrangles de la surface γ . À partir de ce dernier, plusieurs couches sont construites

à l'aide d'homothéties de même centre (celui de γ s'il s'agit d'une sphère) et de rapports différents. Un hexaèdre de ce maillage est donc défini par deux quadrangles appartenant à deux couches successives, dont l'un est l'image de l'autre par l'homothétie correspondante.

Lorsque γ est une sphère, une manière simple de construire son maillage en quadrangles consiste à considérer un maillage de la surface du cube inscrit dans la sphère et de le projeter sur γ . La figure 3.6 montre un exemple du maillage d'une sphère, construit à partir de celui du cube de la figure 3.7.

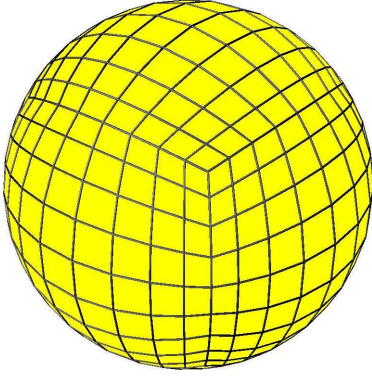


FIG. 3.6 – Projection sur la surface γ .

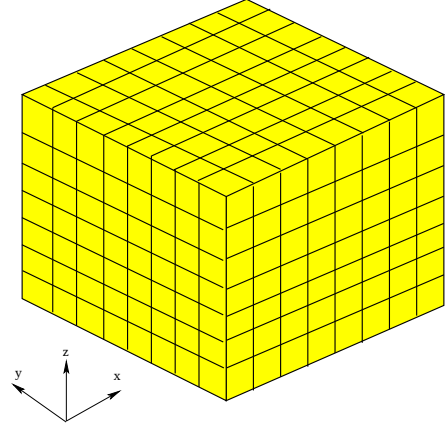


FIG. 3.7 – Maillage initial ; surface d'un cube.

L'objet de la section suivante est de présenter d'autres méthodes, rapides, pouvant être utilisées dans la résolution du problème local. Celles-ci n'ont pas été implémentées dans le cadre de la thèse. On a plutôt choisit de remplacer la résolution locale par un calcul plus simple, basé sur une approximation de la dérivée normale. Cette approche, ainsi que son implémentation, sont présentées dans la section « approche simplifiée » page (65).

Résolution locale rapide

Comme dans le cas du problème global, il est aussi naturel de songer à l'utilisation des techniques de résolution rapide pour le problème local. Bien qu'elle soit simple, la forme du domaine ω n'est pas adaptée aux techniques classiques de résolution rapide. Néanmoins, ces derniers années, il y a eu quelques travaux dans lesquels on propose des algorithmes rapides dédiés à la résolution des équations de type POISSON dans des géométries sphériques. On se réfère en particulier à J. SHEN [73] et M.C. LAI *et al.* [47, 46] et à leurs renvois bibliographiques.

Afin de présenter ces méthodes, on s'intéresse dans cette section à la résolution du problème local modèle défini par :

$$\begin{cases} \alpha v - \Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (3.108)$$

Rappelons que ω est une couche sphérique telle que $\partial\omega = \gamma \cup \gamma'$. Dans ce cas, γ et γ' sont choisies telles que γ soit une sphère de rayon R et γ' la sphère de même centre que celui de γ et de rayon $(R + \varepsilon)$ avec ε un réel strictement positif.

En utilisant la transformation : $(x, y, z) \in \omega \mapsto (r, \psi, \phi) \in]R, R + \varepsilon[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, telle que

$$\begin{cases} x &= r \sin \psi \cos \phi, \\ y &= r \sin \psi \sin \phi, \\ z &= r \cos \psi, \end{cases} \quad (3.109)$$

le problème (3.108) s'écrit, en coordonnées sphériques, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha v - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = f, \\ v(R, \psi, \phi) = v(R + \varepsilon, \psi, \phi) = 0. \end{cases} \quad (3.110)$$

Une manière de calculer v , la solution du problème (3.110), est de la remplacer par son développement en harmoniques sphériques. On note par Y_ℓ^m l'harmonique sphérique d'indice $(\ell, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, tel que $|m| \leq \ell$. Elle est définie par :

$$Y_\ell^m(\psi, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \psi) e^{im\phi}, \quad (3.111)$$

où P_ℓ^m désigne le polynôme de LEGENDRE associé ⁷.

Les développements de v et f en harmoniques sphériques sont donnés par les expressions suivantes :

$$v(r, \psi, \phi) = \sum_{\substack{\ell=0 \\ |m| \leq \ell}}^{\infty} v_{\ell m}(r) Y_\ell^m(\psi, \phi), \quad f(r, \psi, \phi) = \sum_{\substack{\ell=0 \\ |m| \leq \ell}}^{\infty} f_{\ell m}(r) Y_\ell^m(\psi, \phi). \quad (3.112)$$

En multipliant (3.110) par r^2 et en utilisant le fait que l'harmonique sphérique Y_ℓ^m est solution de :

$$-\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \psi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 Y_\ell^m}{\partial \phi^2} = \ell(\ell + 1) Y_\ell^m, \quad (3.113)$$

on a :

$$\begin{cases} \alpha r^2 v_{\ell m} - \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv_{\ell m}}{dr} \right) + \ell(\ell + 1) v_{\ell m} = r^2 f_{\ell m}, & 0 \leq |m| \leq \ell < \infty, \\ v_{\ell m}(R) = v_{\ell m}(R + \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.114)$$

On s'est donc ramené à des équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont les fonctions radiales $v_{\ell m}$. Ces équations peuvent être discrétisées en utilisant des méthodes spectrales par exemple. Voir J. SHEN [73] pour la discrétisation des problèmes (3.114) par différents types de méthodes spectrales. Contrairement aux coordonnées cartésiennes, il n'existe pas d'algorithmes rapides de type FFT adaptés aux géométries sphériques. Quitte à développer des techniques pour accélérer le calcul, l'utilisation des harmoniques sphériques est certainement le choix naturel pour résoudre des problèmes de type POISSON

⁷ $P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell$.

dans des géométrie sphériques. Dans [56], M.J. MOHLENKAMP propose un algorithme rapide dédié au calcul par développement en harmoniques sphériques. Il s'agit d'une technique de séparation des variables et l'utilisation de FFT pour la variable ϕ .

Toujours dans le même contexte, mais sans utiliser les harmoniques sphériques, J. SHEN [73] et M.C. LAI *et al.* [46] proposent des méthodes rapides adaptées à la résolution de problèmes de type (3.108) en se basant sur un développement en séries de FOURIER des fonctions v et f par rapport à la variable ϕ . Tout en utilisant FFT, le problème ainsi obtenu et dont les coefficients de FOURIER sont solutions est discrétisé soit par la méthode des différence finies [46], soit par une méthode spectrale [73].

Approche simplifiée (F.B.M- ε)

Rappelons que le fait de ramener le problème initialement posé dans le domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$ en un problème défini dans le domaine Ω en son ensemble introduit un saut de la dérivée normale de la solution à travers la surface γ , le bord du trou B . Le problème local $(\mathbf{II}_D - \mathbf{a})$ a été introduit dans le but d'approcher ce saut. Au lieu de résoudre ce problème par l'une des méthodes présentées dans la section précédente, on pourra remplacer la résolution locale dans ω (c'est-à-dire l'étape 2. de l'algorithme de la section 3.2.2) par un calcul plus simple tel qu'un développement asymptotique de $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$. Une manière assez simple de le faire est la suivante :

On place la frontière artificielle γ' tout près de γ . Par exemple dans le cas où B est une boule de rayon R , on prend γ' une sphère de même centre que B et de rayon $R + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll R$ (voir figure 3.8).

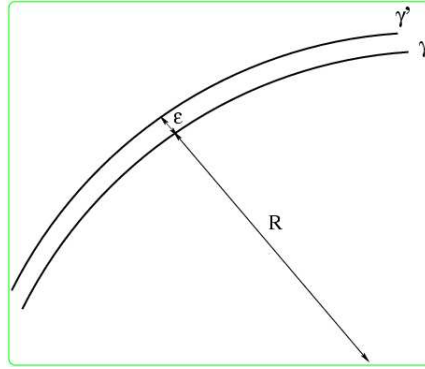


FIG. 3.8 – Approche simplifiée.

Dans un premier temps, on s'intéresse surtout aux variations radiales de la solution. La restriction que l'on considère est de supposer v radiale, ce qui nous permet de résoudre explicitement le problème local. En effet, celui-ci devient un problème simple – unidimensionnel – et ce, en réécrivant le problème $(\mathbf{II}_D - \mathbf{a})$ en coordonnées sphériques et en ne gardant que la partie radiale du Laplacien. On se ramène donc à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \alpha v - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv}{dr} \right) = f & \text{pour } r \in]R, R + \varepsilon[, \\ v(R) = 0, \quad v(R + \varepsilon) = \widehat{u}(R + \varepsilon), \end{cases} \quad (3.115)$$

auquel on peut chercher une solution approchée en utilisant des techniques classiques de résolution numérique des équations différentielles ordinaires, ou bien le résoudre explicitement. Par exemple, dans le cas $\alpha = 0$, la solution du problème (3.115) est donnée par l'expression suivante :

$$v = (1 - \frac{R}{r})(1 + \frac{R}{\varepsilon}) \left[\widehat{u}|_{\gamma'} - \int_R^{R+\varepsilon} t f(t) dt \right] - \frac{1}{r} \int_R^r t^2 f(t) dt + \int_R^r t f(t) dt + \frac{1}{\varepsilon} (1 - \frac{R}{r}) \int_R^{R+\varepsilon} t^2 f(t) dt. \quad (3.116)$$

Ainsi, on peut facilement calculer $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\gamma'}$ et l'« injecter » dans le second membre du problème global. Il est facile de vérifier que, dans ce cas, $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\gamma'}$ est donné par cette expression :

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\gamma'} = -(1 + \frac{\varepsilon}{R}) \frac{\widehat{u}|_{\gamma'}}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left[(1 + \frac{\varepsilon}{R}) \int_R^{R+\varepsilon} t f(t) dt - \frac{1}{R} \int_R^{R+\varepsilon} t^2 f(t) dt \right]. \quad (3.117)$$

Plus précisément, dans le cas de l'équation de LAPLACE ($\alpha = 0$), et lorsque le second membre f est constant dans ω (notons que, dans ce cadre, la frontière artificielle γ' est placée tout près de γ), l'algorithme 3.1 du paragraphe 3.2.2 peut être remplacé par l'algorithme 3.3

boucle

Étape 1 : relaxation.

Calculer $\widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_{h'}}$, l'interpolé de $\widehat{u}_h^{k-1}$ sur $\gamma'_{h'}$, et poser

$$\kappa_{h'}^k = \theta \kappa_{h'}^{k-1} + (1 - \theta) \widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_{h'}}. \quad (3.118)$$

Étape 2. Calculer

$$\xi_{h'}^k = -(1 + \frac{\varepsilon}{R}) \frac{\kappa_{h'}^k}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} (1 + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{R}) f. \quad (3.119)$$

Étape 3 : résolution globale.

Calculer $\widehat{u}_h^k \in \mathbb{U}_h$, la solution de

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_h^k \cdot \nabla w = \int_{\Omega} \bar{f} w + \int_{\gamma_{h'}} \xi_{h'}^k w \quad \forall w \in \mathbb{U}_h. \quad (3.120)$$

fin boucle

ALGORITHME 3.3: F.B.M- ε . Approche simplifiée.

Remarque 3.7 Dans le cas où l'on s'intéresse à des solutions radiales, remplacer l'algorithme initial par celui de l'approche simplifiée n'introduit aucune erreur supplémentaire,

puisque la résolution est exacte en v . Mais d'une manière générale, il n'y a aucune raison pour que v soit radiale, et par suite en résolvant le problème par ce dernier algorithme, on introduit une nouvelle erreur qui, a priori, dépend de ε et de la régularité de la solution. L'étude mathématique de cet algorithme, notamment la convergence et les estimations des erreurs, ne sont pas traitées ici mais comme le montreront les tests numériques, les premiers résultats sont satisfaisants.

Le maillage de la surface γ qu'on utilise pour la mise en œuvre de l'algorithme 3.3 est semblable à celui donné par la figure 3.6. La seule différence concerne le calcul des aires des éléments. En effet, pour minimiser l'erreur due à l'intégration numérique lorsqu'on utilise une formule de quadrature à un seul point (le centre de la maille), les aires des éléments sont calculées d'une manière exacte en tenant compte de leur forme sphérique. Rappelons que l'aire d'un quadrangle sphérique $\mathcal{Q}$, notée $|\mathcal{Q}|$, est donnée par la formule suivante :

$$|\mathcal{Q}| = R^2 \left(\sum_{i=1}^4 \theta_i - 2\pi \right), \quad (3.121)$$

où R désigne le rayon de la sphère et θ_i , $i = 1, \dots, 4$, les quatre angles sphériques, exprimés en radian, du quadrangle $\mathcal{Q}$. Voir l'annexe C pour plus de détails.

Dans l'algorithme 3.3, le seul terme non standard est $\int_{\gamma_{h'}} \xi_{h'}^k w$, puisqu'il fait intervenir deux fonctions qui vivent sur des maillages différents. En outre, il s'agit de l'assemblage d'une quantité de type masse, calculée sur le maillage de γ , et dont l'action intervient au niveau du second membre du problème global.

La fonction test w étant définie sur le maillage global, on l'écrit donc dans la base des éléments finis Q^1 . Parmi les fonctions de cette base, seuls les éléments dont les supports intersectent la surface γ sont concernés. Soit φ_i une telle fonction, il suffit donc de calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}_s} \xi_{h'}^k \varphi_i$, où $\mathcal{C}_s$ désigne un quadrangle sphérique du maillage de γ . Il est donc nécessaire d'évaluer les fonctions φ_i aux points de quadrature associés à $\mathcal{C}_s$. Pour ce faire, on a besoin de localiser ces points dans le maillage global. Rappelons qu'un hexaèdre $\mathcal{Q}$ du maillage global, de sommets a_i , $i = 1, \dots, 8$, est identifié par ses deux points diagonaux a_1 et a_7 tels que $x_{a_1} < x_{a_7}$, $y_{a_1} < y_{a_7}$ et $z_{a_1} < z_{a_7}$ (voir figure 3.3). La localisation d'un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ dans le maillage global est donc immédiate en calculant les trois entiers i_P , j_P et k_P suivant cette formule :

$$(i_P, j_P, k_P) = \left(E\left(\frac{x_P}{h_x}\right) + 1, E\left(\frac{y_P}{h_y}\right) + 1, E\left(\frac{z_P}{h_z}\right) + 1 \right), \quad (3.122)$$

où, E désigne la partie entière. Ainsi, l'hexaèdre auquel appartient le point P est celui dont le sommet a_1 correspond au triplet (i_P, j_P, k_P) . Une manière très simple pour approcher $\int_{\mathcal{C}_s} \xi_{h'}^k \varphi_i$ est d'utiliser cette formule de quadrature :

$$\int_{\mathcal{C}_s} \xi_{h'}^k \varphi_i \simeq |\mathcal{C}_s| \xi_{h'}^k(c) \varphi_i(c), \quad (3.123)$$

où c désigne le centre de la maille $\mathcal{C}_s$. Voir l'annexe A pour d'autres formules de quadrature plus précises.

3.4 Tests numériques

3.4.1 Le Laplacien dans un domaine perforé. Un nombre « assez grand » de particules.

On présente ici deux tests numériques dont l'objectif est de montrer qu'avec la méthode de la frontière élargie F.B.M., et en utilisant le solveur rapide décrit dans la section 3.3.1, on peut traiter le cas où l'on a un nombre important de particules tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

Dans ces deux tests numériques le domaine de calcul Ω est le cube $] -1, 1[\times] -1, 1[\times] -1, 1[$. On s'intéresse à la résolution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ u = 0 & \text{sur } \partial(\Omega \setminus \overline{B}) = \Gamma \cup \gamma \end{cases} \quad (3.124)$$

où $\Gamma = \partial\Omega$, $\gamma = \partial B$ et B est une collection de 163 boules, de même rayon $R = 0.06$, disposées d'une manière aléatoire tout en imposant le fait qu'elles ne s'intersectent pas. La méthode de résolution est l'approche simplifiée de la méthode de la frontière élargie (cf. paragraphe 3.3.2), avec $\theta = 0.98$ et $\varepsilon = \frac{R}{10}$. Dans la figure 3.9 on présente sur la partie $] -1, 0.5[\times] -1, 0.5[\times] -1, 0[$ du domaine Ω la solution calculée u .

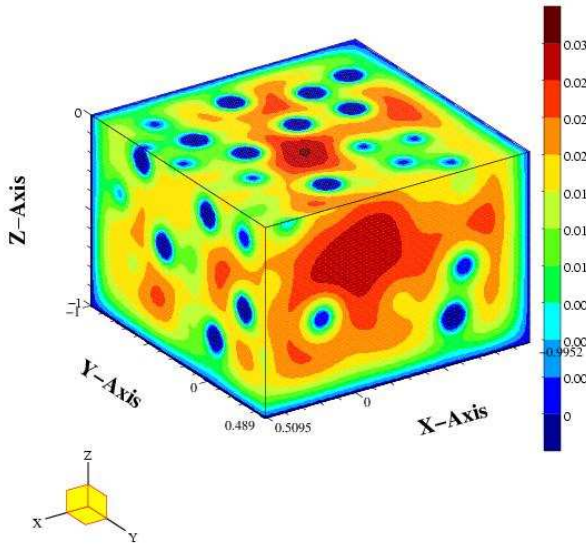


FIG. 3.9 – La solution calculée.

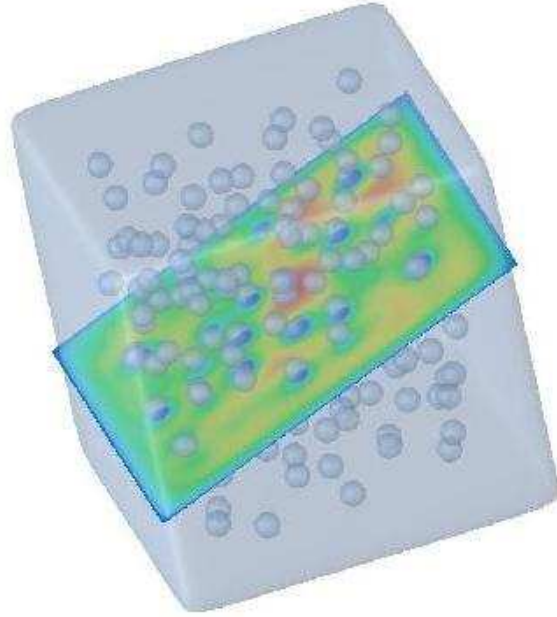


FIG. 3.10 – Isosurface $u = 0$.

La figure 3.10 présente l'isosurface $u = 0$. Puisqu'on a pris des conditions de DIRICHLET homogènes sur la frontière Γ de Ω et sur la frontière de B (réunion des boules), on peut constater qu'avec cette isosurface, on a pu reconstruire le domaine perforé.

Dans la deuxième expérience, on refait le même test numérique mais avec 343 particules disposées d'une manière structurée. Le résultat est représenté par les figure 3.11 et 3.12.

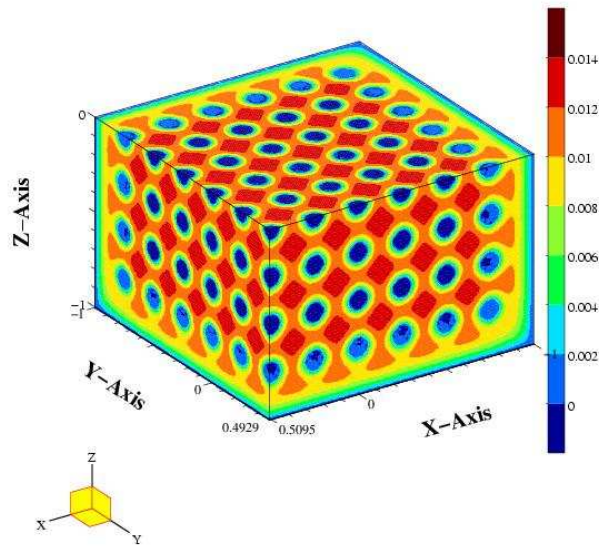


FIG. 3.11 – La solution calculée dans le cas de 343 particules.

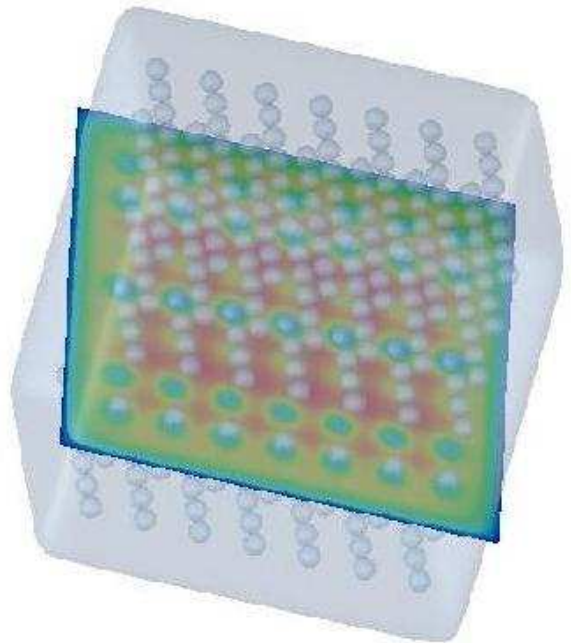


FIG. 3.12 – Isosurface $u = 0$.

Chapitre 4

Estimation de l'erreur de discrétisation par la F.B.M.

Sommaire

4.1	Rappel de quelques notations	72
4.2	Estimation d'erreur	73
4.3	Validations numériques	76
4.3.1	Test numérique dans le cadre d'une résolution locale exacte	77
4.3.2	Test numérique dans le cadre d'une approximation de $\frac{\partial v}{\partial n}\Big _{\gamma}$	77

4.1 Rappel de quelques notations

On introduit $\Omega^\star$ comme étant le sous-domaine de $\Omega \setminus \overline{B}$ défini par $\Omega^\star = \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega})$. Sa frontière $\partial\Omega^\star$ est $\Gamma \cup \gamma'$ (cf. figure 4.1).

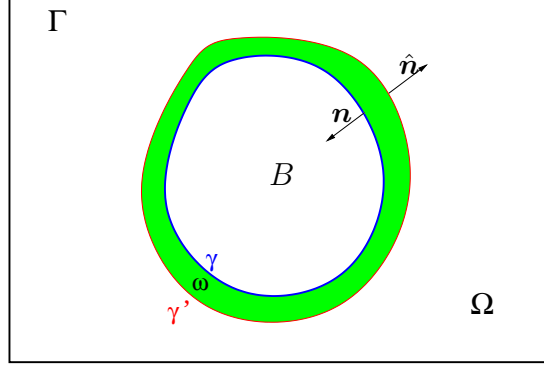


FIG. 4.1 – Configuration géométrique.

On rappelle aussi que :

- $\mathbb{U}_h \subset H_0^1(\Omega)$ est l'espace d'approximation par éléments finis d'ordre 1 (Q^1 ou éventuellement P^1) du problème global.
- $(\hat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ est la solution du problème continu :

$$\mathbb{I}_D : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v|_{\gamma'} = \hat{u}|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : -\Delta \hat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

- $(u^\star, v^\star) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ est la solution du problème auxiliaire :

$$\mathbb{I}_D - \mathbf{A} : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} -\Delta v^\star = f & \text{dans } \omega, \\ v^\star|_{\gamma'} = \pi_h u^\star|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : -\Delta u^\star = \bar{f} + \frac{\partial v^\star}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

- $(\hat{u}_h, v^\star) \in \mathbb{U}_h \times H_\gamma^1(\omega)$ est la solution du problème semi-discret :

$$\mathbb{I}_D - \mathbf{S} : \begin{cases} \mathbf{a} : \begin{cases} -\Delta v^\star = f & \text{dans } \omega, \\ v^\star|_{\gamma'} = \hat{u}_h|_{\gamma'}, \end{cases} \\ \mathbf{b} : \int_\Omega \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla w_h = \int_\Omega \bar{f} w_h + \int_\gamma \frac{\partial v^\star}{\partial \mathbf{n}} w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \end{cases} \quad (4.3)$$

Les opérateurs $\mathbf{D}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^\star$ et $\mathbf{T}_h$ sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_\gamma^1(\omega) \\ \hat{u} &\longmapsto \mathbf{D}\hat{u}, \text{ solution de } (\mathbb{I}_D - \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} : H_\gamma^1(\omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ v &\longmapsto \mathbf{N}v, \text{ solution de } (\mathbf{I}_D - \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{D}, \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{T}\boldsymbol{\pi}_h \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_h = \boldsymbol{\pi}_h \mathbf{T}. \quad (4.6)$$

4.2 Estimation d'erreur

L'objectif de cette section est de montrer que, localement (dans $\Omega^* := \Omega \setminus (B \cup \overline{\omega})$), la F.B.M. est d'ordre optimal (au sens de la méthode des éléments finis classiques), et ce, en établissant une estimation de l'erreur $\|\widehat{u} - \widehat{u}_h\|_{1,\Omega^*}$. Notons que le domaine Ω^* est proche de $\Omega \setminus \overline{B}$ tant que le choix de γ' (et donc de ω) est libre. On rappelle aussi que, dans un premier temps, on suppose que la résolution locale est faite d'une manière exacte. Ainsi, l'estimation de l'erreur qu'on établira ne tiendra pas compte de l'erreur due à la discrétisation du problème local.

Les résultats présentés dans cette section font l'objet d'une collaboration avec S. BERTOLUZZA [6, 7, 8]. L'idée principale est basée sur des techniques d'estimations intérieures en utilisant le théorème de NITSCHKE et SCHATZ (théorème 3.1 page 42). Pour y parvenir, la stratégie consiste à passer par une étape intermédiaire dans laquelle on utilise la solution auxiliaire u^* introduite dans le chapitre précédent.

Soit $(u^*, v^*) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$ l'unique solution du problème auxiliaire $(\mathbf{I}_D - \mathbf{A})$. Soit $(\widehat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(\omega)$, telle que $v = \widehat{u}|_\omega$, la solution du problème continu $\mathbf{I}_D$. Avant d'arriver au résultat final, on a besoin d'établir ce résultat intermédiaire :

Proposition 4.1 *Si $\widehat{u} \in H^\ell(\Omega \setminus \overline{B})$, avec $1 < \ell \leq 2$, alors il existe une constante C , telle que l'on ait cette inégalité :*

$$\|\widehat{u} - u^*\|_{1,\Omega} \leq C \left(h^{\ell-1} \|\widehat{u}\|_{\ell,\Omega \setminus \overline{B}} + \|\widehat{u} - \boldsymbol{\pi}_h \widehat{u}\|_{0,\Omega} \right). \quad (4.7)$$

Preuve. Rappelons que, par définition, u^* et $\widehat{u}$ sont respectivement solution des problèmes :

$$-\Delta u^* = \overline{f} + \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma, \quad -\Delta \widehat{u} = \overline{f} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \delta_\gamma. \quad (4.8)$$

Ce qui implique en particulier :

$$\widehat{u} - u^* = \mathbf{N}(v - v^*). \quad (4.9)$$

D'autre part, $(v - v^*)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta(v - v^*) &= 0 & \text{dans } \omega, \\ v - v^* &= \widehat{u} - \boldsymbol{\pi}_h u^* & \text{sur } \gamma'. \end{cases} \quad (4.10)$$

C'est-à-dire : $v - v^* = \mathbf{D}(\widehat{u} - \boldsymbol{\pi}_h u^*)$, et par suite

$$\widehat{u} - u^* = \mathbf{N}\mathbf{D}(\widehat{u} - \boldsymbol{\pi}_h u^*) \quad (4.11)$$

$$= \mathbf{T}\widehat{u} - \mathbf{T}\boldsymbol{\pi}_h u^* \quad (4.12)$$

$$= \mathbf{T}\widehat{u} - \mathbf{T}^* u^*. \quad (4.13)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u} - u^*, \widehat{u} - u^* \rangle_{1,\Omega} &= \langle \widehat{u} - u^*, \mathbf{ND}\widehat{u} - \mathbf{ND}\pi_h u^* \rangle_{1,\Omega} \\ &= \langle \widehat{u} - u^*, \mathbf{ND}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}) \rangle_{1,\Omega} + \langle \widehat{u} - u^*, \mathbf{ND}\pi_h(\widehat{u} - u^*) \rangle_{1,\Omega}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Or, en utilisant le lemme 3.5 page 47 (sachant que $\mathbf{T}^* := \mathbf{ND}\pi_h$), on a

$$\langle \widehat{u} - u^*, \mathbf{T}^*(\widehat{u} - u^*) \rangle_{1,\Omega} \leq C^* h^2 |\widehat{u} - u^*|_{1,\Omega}^2. \quad (4.15)$$

On a alors :

$$\langle \widehat{u} - u^*, \widehat{u} - u^* \rangle_{1,\Omega} \leq |\widehat{u} - u^*|_{1,\Omega} |\mathbf{ND}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u})|_{1,\Omega} + C^* h^2 |\widehat{u} - u^*|_{1,\Omega}^2. \quad (4.16)$$

D'où,

$$(1 - C^* h^2) |\widehat{u} - u^*|_{1,\Omega} \leq |\mathbf{ND}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u})|_{1,\Omega}. \quad (4.17)$$

Comme $\mathbf{N}$ est continu sur $H_\gamma^1(\omega)$, il existe une constante C telle que :

$$|\mathbf{ND}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u})|_{1,\Omega} \leq C |\mathbf{D}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u})|_{1,\omega}. \quad (4.18)$$

De même, par construction de l'opérateur $\mathbf{D}$, il vient :

$$|\mathbf{D}(\widehat{u} - \pi_h \widehat{u})|_{1,\omega} \leq C |\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}|_{\frac{1}{2},\gamma'}. \quad (4.19)$$

Or, en remarquant que γ' est une composante connexe de $\partial\Omega^*$ ($\partial\Omega^* = \gamma' \cup \Gamma$), et en utilisant le premier théorème de trace, on a :

$$|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}|_{\frac{1}{2},\gamma'} \leq C |\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}|_{1,\Omega^*}. \quad (4.20)$$

Finalement, en utilisant les inégalités (4.17)-(4.20), on a :

$$(1 - C^* h^2) |\widehat{u} - u^*|_{1,\Omega} \leq C |\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}|_{1,\Omega^*}. \quad (4.21)$$

Et en appliquant le théorème de NITSCHKE et SCHATZ (théorème 3.1 page 42), avec $\Omega_0 = \Omega^*$ et $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{B}$, on a :

$$\begin{aligned}|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}|_{1,\Omega^*} &\lesssim h^{\ell-1} \|\widehat{u}\|_{\ell,\Omega \setminus \overline{B}} + \|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} \\ &\lesssim h^{\ell-1} \|\widehat{u}\|_{\ell,\Omega \setminus \overline{B}} + \|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}\|_{0,\Omega}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Ce qui achève la preuve (en tenant compte du fait que l'inégalité (4.21) est valable pour tout h assez petit). $\square$

L'objectif du théorème suivant est d'établir l'erreur entre $\widehat{u} \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème continu $(\mathbf{II}_D - \mathbf{b})$ et $\widehat{u}_h \in \mathbb{U}_h$, celle du problème discret $((\mathbf{II}_D - \mathbf{S}) - \mathbf{b})$. Rappelons que $\widehat{u}_h$ est telle que le couple $(\widehat{u}_h, v^*)$ est solution du problème $(\mathbf{II}_D - \mathbf{S})$.

Théorème 4.2 *On suppose que $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$. Il existe alors une constante C , telle que l'on ait :*

$$\|\widehat{u} - \widehat{u}_h\|_{1,\Omega^*} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}}. \quad (4.23)$$

Preuve. D'abord, en revenant aux définitions de $\widehat{u}$ et $\widehat{u}_h$, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla(\widehat{u} - \widehat{u}_h) \cdot \nabla w_h = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial v^*}{\partial \mathbf{n}} \right) w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{U}_h. \quad (4.24)$$

Il en découle que pour tout $w_h \in \mathbb{U}_h$ telle que $w_h = 0$ dans $\overline{B}$, on a :

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla(\widehat{u} - \widehat{u}_h) \cdot \nabla w_h = 0. \quad (4.25)$$

On peut alors appliquer le théorème de NITSCHKE et SCHATZ à $(\widehat{u} - \widehat{u}_h)$, avec $\Omega_0 = \Omega^*$ et $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{B}$. On a donc :

$$\|\widehat{u} - \widehat{u}_h\|_{1,\Omega^*} \lesssim h \|\widehat{u}\|_{2,\Omega \setminus \overline{B}} + \|\widehat{u} - \widehat{u}_h\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}}. \quad (4.26)$$

Or, d'une part,

$$\|\widehat{u}\|_{2,\Omega \setminus \overline{B}} \lesssim \|f\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}}, \quad (4.27)$$

et d'autre part,

$$\|\widehat{u} - \widehat{u}_h\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} \leq \|\widehat{u} - u^*\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} + \|u^* - \widehat{u}_h\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}}. \quad (4.28)$$

Comme,

$$\|\widehat{u} - u^*\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} \leq \|\widehat{u} - u^*\|_{1,\Omega}, \quad (4.29)$$

en utilisant le résultat de la proposition 4.1, on a :

$$\|\widehat{u} - u^*\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} \leq \|\widehat{u} - u^*\|_{1,\Omega} \lesssim h \|\widehat{u}\|_{2,\Omega \setminus \overline{B}} + \|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}\|_{0,\Omega}. \quad (4.30)$$

Par ailleurs, le théorème 3.3 page 43 nous donne :

$$\|\widehat{u} - \pi_h \widehat{u}\|_{0,\Omega} \lesssim h \|\widehat{u}\|_{1,\Omega}. \quad (4.31)$$

De même, en appliquant le théorème 3.3 page 43 (sachant que $\widehat{u}_h = \pi_h u^*$), on a :

$$\|u^* - \widehat{u}_h\|_{0,\Omega} \lesssim h \|u^*\|_{1,\Omega}. \quad (4.32)$$

Ainsi, en utilisant (4.30) et (4.31), on a :

$$\|\widehat{u} - u^*\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}} \lesssim h \|\widehat{u}\|_{2,\Omega \setminus \overline{B}} + h \|\widehat{u}\|_{1,\Omega}. \quad (4.33)$$

Finalement, en remarquant que $\|\widehat{u}\|_{2,\Omega \setminus \overline{B}}$, $\|\widehat{u}\|_{1,\Omega}$ et $\|u^*\|_{1,\Omega}$ peuvent être majorées (à une constante multiplicative près) par $\|f\|_{0,\Omega \setminus \overline{B}}$, le résultat découle des inégalités (4.26), (4.28), (4.32) et (4.33). $\square$

4.3 Validations numériques

L'objectif de ce paragraphe est l'illustration numérique du résultat de la section 4.2 qui montre que la F.B.M. est localement d'ordre optimal. On se met dans le cadre du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ u = 0 & \text{sur } \gamma, \\ u = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.34)$$

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, résoudre ce problème par F.B.M. revient à le remplacer par une suite de résolutions locales et globales. Pour être en conformité avec le résultat théorique de l'estimation de l'erreur de discrétisation du problème global, on suppose que les résolutions locales sont faites d'une manière exacte, ce qui revient à remplacer le problème (4.34) par le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial n} \delta_\gamma & \text{dans } \Omega, \\ \hat{u} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.35)$$

où $\bar{f}$ désigne toujours le prolongement de f par 0 dans B , et v la solution du problème local suivant :

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \omega, \\ v = 0 & \text{sur } \gamma, \\ v = \hat{u} & \text{sur } \gamma'. \end{cases} \quad (4.36)$$

Dans ce cas particulier, puisqu'on suppose que l'on résout d'une manière exacte le problème local (4.36), il suffit de remplacer dans (4.35) $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_\gamma$ par son expression en prenant v égale à la restriction de la solution analytique $\hat{u}$ sur ω .

On note par $\hat{e} = \hat{u} - \hat{u}_h$ l'erreur entre la solution approchée $\hat{u}_h$ et la solution exacte $\hat{u}$ du problème (4.35). On s'intéressera à la norme $L^2(\Omega)$ et à la semi-norme $H^1(\Omega)$ de $\hat{e}$ (qualifiés d'erreurs globales). On introduit $\tilde{\Omega}$ un sous domaine de $\Omega \setminus \overline{B}$ sur lequel on calcule l'erreur locale en norme $L^2(\tilde{\Omega})$ et en semi-norme $H^1(\tilde{\Omega})$. Dans les tests numériques on a pris $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \overline{\tilde{B}}$, où $\tilde{B}$ est une boule de même centre que B mais de rayon supérieur.

Numériquement ces erreurs sont calculées en décomposant les intégrales en la somme des intégrales sur les mailles $\mathcal{Q}$ du maillage Ξ_h . Par exemple

$$|\hat{e}|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

$$= \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Xi_h} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.38)$$

Afin d'éviter les phénomènes de « super-convergence » souvent rencontrés lors des résolutions numériques par éléments finis Q^1 sur un maillage cartésien, et qui provient du fait que l'on estime, en général, non plus l'erreur telle qu'elle est définie ci-dessus, mais la

norme de la différence entre la solution approchée et l'interpolée de la solution exacte, une intégrale sur une maille $\mathcal{Q}$ du sous-domaine est approchée par une formule de quadrature de GAUSS-LEGENDRE à 27 points (exacte pour les polynômes de degré 5 par rapport à chacune des trois variables). Voir l'annexe A section A pour plus de détails.

Pour le calcul du gradient de la solution approchée, on utilise la base des fonctions Q^1 . En effet, en notant par φ_i la fonction de base associée au $i^{\text{ème}}$ sommet du maillage, on a $\hat{u}_h = \sum_i \hat{u}_h^i \varphi_i$ et donc $\nabla \hat{u}_h = \sum_i \hat{u}_h^i \nabla \varphi_i$.

4.3.1 Test numérique dans le cadre d'une résolution locale exacte

Ω est le cube $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$ et B est la boule de centre $o = (0, 0, 0)$ et de rayon $R = \frac{1}{4}$ (sa frontière est notée γ). f et g sont choisies de sorte que la solution du problème (4.35) est :

$$\hat{u} = \sin(\beta(r^2 - R^2)), \quad \text{avec } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ et } \beta = 2\pi.$$

Comme on suppose qu'on résout d'une manière exacte le problème local (4.36), il suffit de remplacer dans (4.35) $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\gamma$ par son expression analytique. Soit, dans ce cas :

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\gamma = -2\beta R. \quad (4.39)$$

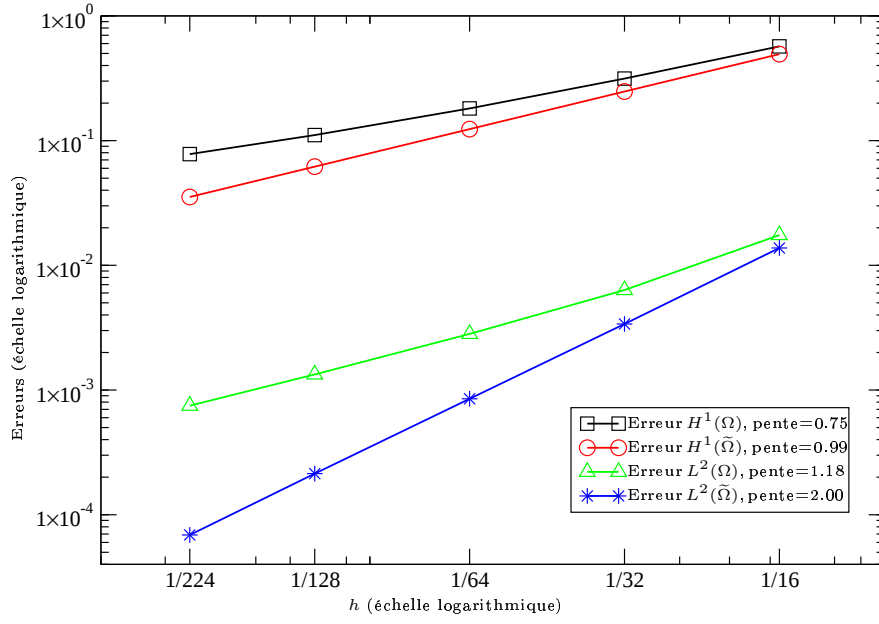
$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \overline{B}$ où $\tilde{B}$ est la boule de centre $o = (0, 0, 0)$ et de rayon $R' = 0.3$.

Dans les courbes de la figure 4.2(a) on présente les erreurs globales $|\hat{e}|_{1,\Omega}$ et $\|\hat{e}\|_{0,\Omega}$ et les erreurs locales $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$ et $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$ dans $\tilde{\Omega}$ pour différentes valeurs de h ($h \in \{\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{224}\}$).

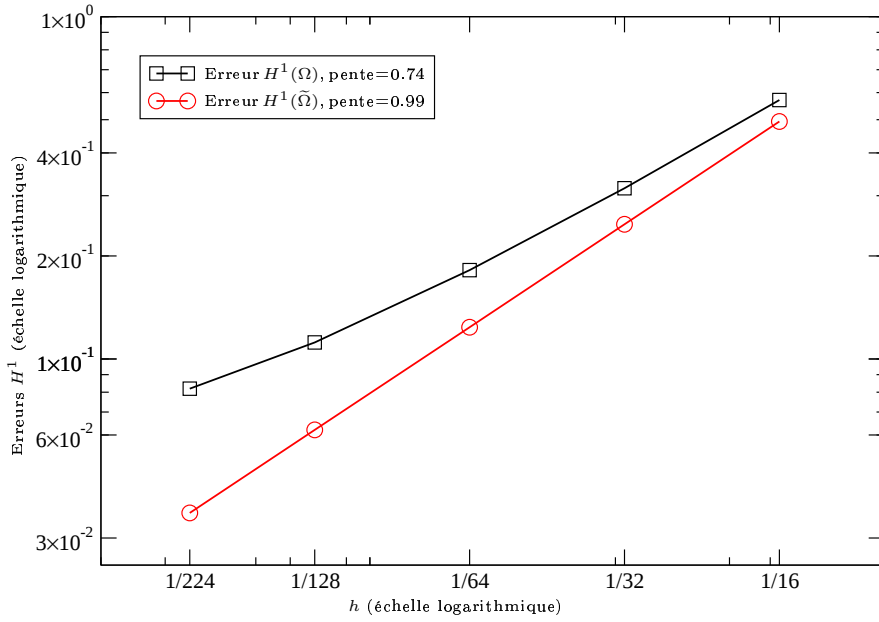
Ces courbes montrent qu'on retrouve les résultats théoriques, à savoir que localement on garde l'ordre des éléments finis classiques. En effet, ayant utilisé des éléments Q^1 , on s'attend à ce que la norme L^2 de l'erreur se comporte comme $\mathcal{O}(h^2)$ et que la norme H^1 se comporte comme $\mathcal{O}(h)$. Ce qui est illustré par les pentes des différentes courbes de la figure 4.2(a).

4.3.2 Test numérique dans le cadre d'une approximation de $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\gamma$

On refait le même test que précédemment mais au lieu d'« injecter » la dérivée normale exacte de v , on l'approche par le biais de l'algorithme du point fixe (de la formulation simplifiée) en ajustant ε pour chaque valeur de h . Notons que pour qu'il ne pollue pas l'erreur, ε doit être assez petit (on l'a pris de l'ordre de h^2) et par suite le paramètre de relaxation doit être très proche de 1. Ce qui ralentit la convergence de l'algorithme de point fixe. On remarque qu'on retrouve les mêmes résultats de la section précédente (cf. figure 4.2(b)).



(a) Cas d'une résolution locale exacte.



(b) Cas d'une résolution locale approchée.

FIG. 4.2 – Erreurs locales et globales ; conditions de DIRICHLET homogènes sur γ .

Chapitre 5

Cas des conditions de Neumann au bord du trou

Sommaire

5.1	Algorithme	80
5.2	Implémentation	82
5.3	Tests numériques	84
5.4	Validation numérique	88

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution des problèmes elliptiques dans des domaines perforés en prenant des conditions de type NEUMANN au bord du « trou ». Plus précisément on se met dans le cadre du problème modèle $\mathbf{I}_N$ introduit dans le chapitre 1. À savoir, étant données $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ et α une constante positive ou nulle, on cherche à résoudre le problème suivant : trouver $u \in H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B})$, telle que

$$\mathbf{I}_N : \begin{cases} \alpha u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

où l'on garde les mêmes données géométriques que celles du cas des conditions de DIRICHLET, représentées par la figure 5.1.

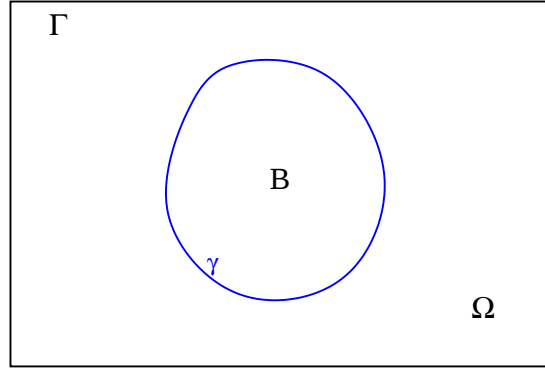


FIG. 5.1 – Donnée géométrique.

Rappelons que $H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B})$ est l'espace défini par cette expression :

$$H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B}) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{B}), \quad u|_\Gamma = 0\}. \quad (5.2)$$

Bien évidemment, les fonctions de cet espace ne sont pas nécessairement nulles sur γ .

L'objectif est toujours d'essayer de ramener la résolution du problème initialement posé dans le domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$ en une résolution dans tout le domaine Ω (dans lequel on dispose d'un maillage cartésien).

5.1 Algorithme

Pour $\alpha = 0$, la formulation variationnelle naturelle du problème (5.1) est : trouver $u \in H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B})$, telle que

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega \setminus \overline{B}} f w, \quad \forall w \in H^1_\Gamma(\Omega \setminus \overline{B}). \quad (5.3)$$

On propose l'algorithme de résolution suivant :

$u^0 \in H_0^1(\Omega)$ donnée.

boucle

$u^n \in H_0^1(\Omega)$ étant connue, trouver $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla w = \int_B \nabla u^n \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \bar{f} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \quad (5.4)$$

où $\bar{f}$ est le prolongement de f par 0 dans B .

fin boucle

ALGORITHME 5.1: Conditions de NEUMANN au bord du trou.

Il est clair que les problèmes (5.3) et (5.4) sont bien posés. Dans ce qui suit on va établir le lien entre les solutions des problèmes (5.4) et la solution du problème initial. Soit $\tilde{u}$ un prolongement quelconque de u (solution du problème (5.3)) dans $H_0^1(\Omega)$, on a alors le résultat suivant :

Lemme 5.1 *Si $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$ est la solution du problème (5.3), alors tout prolongement $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ de u vérifie :*

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w = \int_B \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \bar{f} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Preuve. La restriction d'une fonction de $H_0^1(\Omega)$ à $\Omega \setminus \bar{B}$ étant dans $H_{\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$, on a par construction :

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w = \int_B \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla u \cdot \nabla w, \quad (5.6)$$

d'où le résultat, puisque u est solution de (5.3). $\square$

Le schéma donné par l'équation (5.4) est un processus itératif de point fixe qui converge vers la solution de (5.3). En effet,

Proposition 5.2 *La suite $(u^n|_{\Omega \setminus \bar{B}})_n$ converge fortement vers u (la solution de (5.3)) dans $H_{\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$.*

Preuve. En faisant la différence des deux équations (5.5) et (5.4) puis en prenant $(u^{n+1} - \tilde{u})$ comme fonction test, on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla(u^{n+1} - \tilde{u})|^2 = \int_B \nabla(u^n - \tilde{u}) \cdot \nabla(u^{n+1} - \tilde{u}). \quad (5.7)$$

Ce qui implique, en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,\Omega}^2 \leq |u^n - \tilde{u}|_{1,B} |u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,B}, \quad (5.8)$$

et par suite :

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,\Omega \setminus \bar{B}}^2 + |u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,B}^2 \leq |u^n - \tilde{u}|_{1,B} |u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,B}, \quad (5.9)$$

ce qui implique en particulier :

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_{1,B} \leq |u^n - \tilde{u}|_{1,B}. \quad (5.10)$$

Ainsi, la suite positive $\xi_n = |u^n - \tilde{u}|_{1,B}$ est décroissante donc convergente. D'où le résultat en passant à la limite dans (5.9). $\square$

5.2 Implémentation

Dans l'algorithme 5.1, le seul terme non standard est : $\int_B \nabla u^n \cdot \nabla w$, puisque les fonctions u^n et w sont définies dans Ω et donc sur le maillage global, alors que ce dernier n'est pas adapté à la géométrie de B .

Pour minimiser cette erreur, de nature géométrique, et sans « esquinter » la structure cartésienne du maillage (nécessaire pour utiliser le solveur PSCR), on propose de faire un raffinement locale de Ξ . Notons que ce raffinement est utilisé seulement pour l'assemblage de $\int_B \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j$, où φ^i et φ^j désignent des fonctions de base associées au maillage global. La procédure consiste à décomposer l'intégrale sur B en la somme des intégrales sur les hexaèdres dont l'intersection avec B est non vide :

$$\int_B \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j \simeq \sum_{\substack{\mathcal{Q} \in \Xi_h \\ \mathcal{Q} \cap B \neq \emptyset}} \int_{\mathcal{Q}} \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j. \quad (5.11)$$

Une fois les hexaèdres intersectant B repérés, on choisit un niveau de raffinement ; le premier niveau consiste à diviser $\mathcal{Q}$ en $8 = 2^{3 \cdot 1}$ éléments et, d'une manière générale, au niveau $\ell \geq 0$, $\mathcal{Q}$ est divisé en $2^{3\ell}$ éléments. Voir figure 5.2 pour le premier et le deuxième niveau.

À son tour, $\int_{\mathcal{Q}} \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j$ est décomposée en la somme des intégrales sur les sous-cubes $\mathcal{Q}_r$. Ainsi, on a :

$$\int_B \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j \simeq \sum_{\substack{\mathcal{Q} \in \Xi_h \\ \mathcal{Q} \cap B \neq \emptyset}} \sum_{r=1}^{2^{3\ell}} \int_{\mathcal{Q}_r} \epsilon(r) \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j. \quad (5.12)$$

où

$$\epsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{Q}_r \cap B \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Chaque intégrale sur $\mathcal{Q}_r$ est calculée en utilisant des formules de quadrature. En pratique, on utilise les formules de quadratures de GAUSS-LEGENDRE présentées dans l'annexe A.

Remarque 5.1 *Afin d'optimiser la procédure de raffinement local qu'on vient de décrire, on peut penser à ne considérer que les éléments $\mathcal{Q}$ qui intersectent $\gamma = \partial B$. Ceci peut être fait en utilisant des algorithmes de type octree par exemple. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, à savoir la possibilité de considérer un nombre assez grand de particules, ces dernières souvent sont de petite taille et par suite raffiner les éléments intersectant γ au lieu de ceux intersectant B n'apporte pas un gain considérable.*

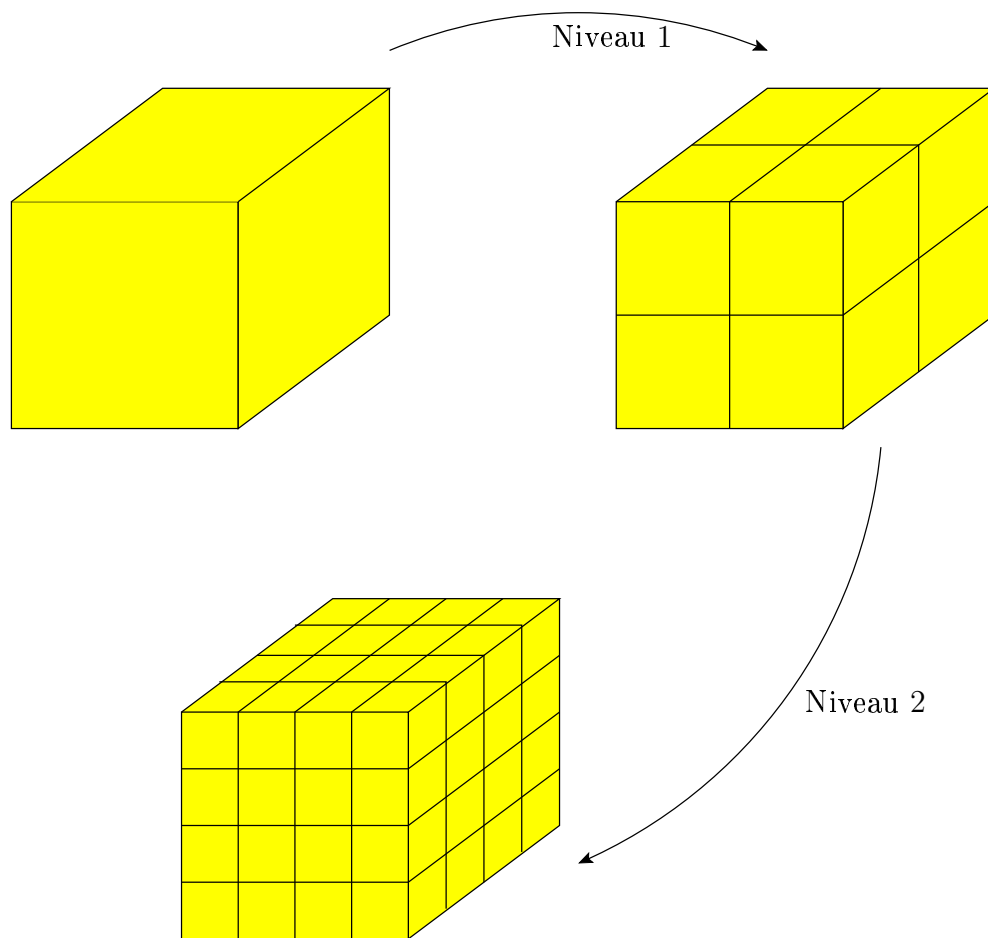


FIG. 5.2 – Raffinement local.

5.3 Tests numériques

On présente un test numérique simple qui consiste à prendre Ω le cube $] - 1, 1[^3$ et B la boule centrée à l'origine et de rayon $R = 0.4$. On cherche à approximer la solution du problème suivant :

$$\mathbf{I}_N \left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u & = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ u & = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & = 0 & \text{sur } \gamma. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Les données f et g sont choisies de sorte que $\frac{1}{2}(y + 1)$ soit la solution analytique du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u & = f & \text{dans } \Omega, \\ u & = g & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (5.15)$$

En l'absence de l'obstacle (problème (5.15)), sur chaque plan (x, y) les isovaleurs de la solution seraient des lignes parallèles à l'axe des x . Dans notre cas (problème (5.14)), la présence de l'obstacle modifie ces lignes pour qu'elles soient normales à γ . Le champ de vecteurs constitué par le gradient d'une telle solution devrait donc contourner l'obstacle.

Dans la figure 5.3, on présente sur le plan de coupe $z = 0$ les isovaleurs de la solution calculée. Le gradient de cette dernière est présenté dans la figure 5.4.

On refait le même test numérique mais au lieu d'une seule boule, B est la réunion de cinq sphères situées dans le plan $z = 0$. Les isovaleurs et le gradient de la solution calculée sont présentés par la figure 5.5.

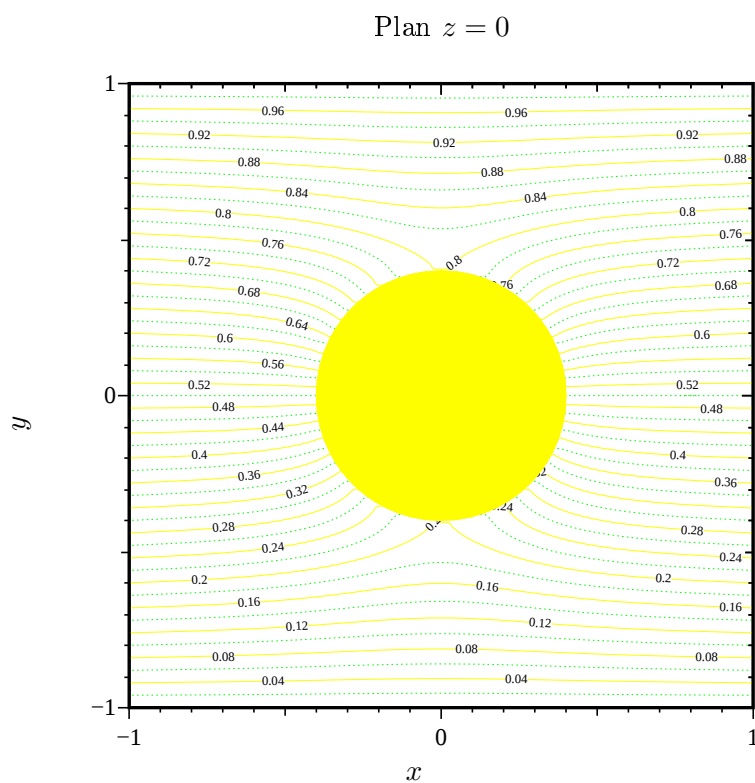
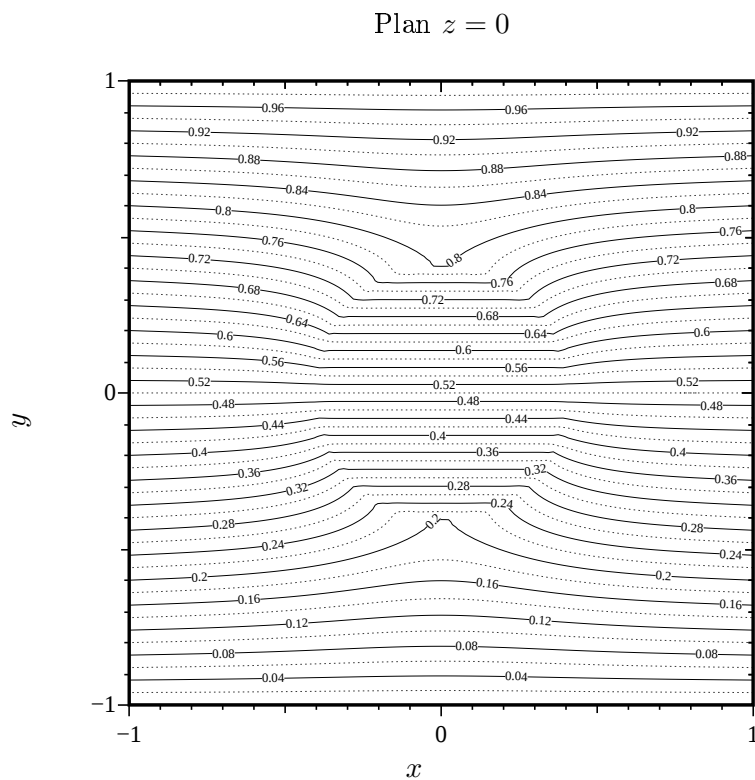


FIG. 5.3 – Isovaleurs de la solution ; conditions de NEUMANN homogènes sur γ . 85

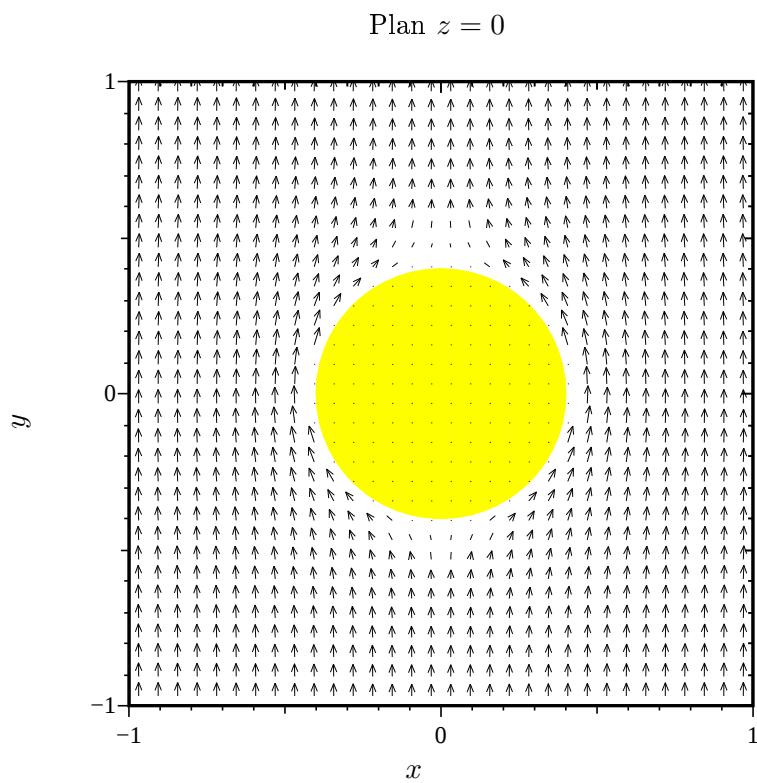
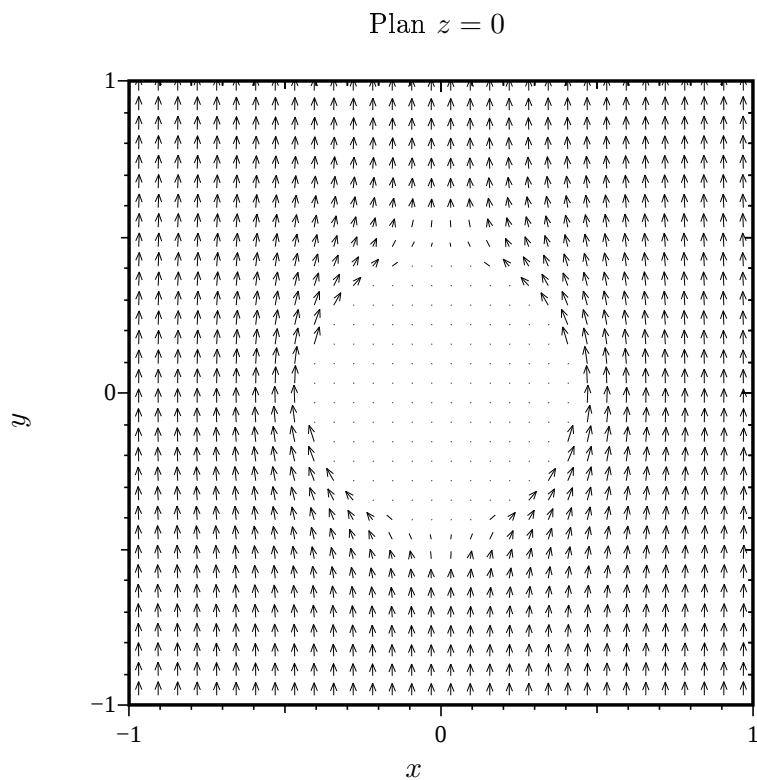


FIG. 5.4 – Gradient de la solution.

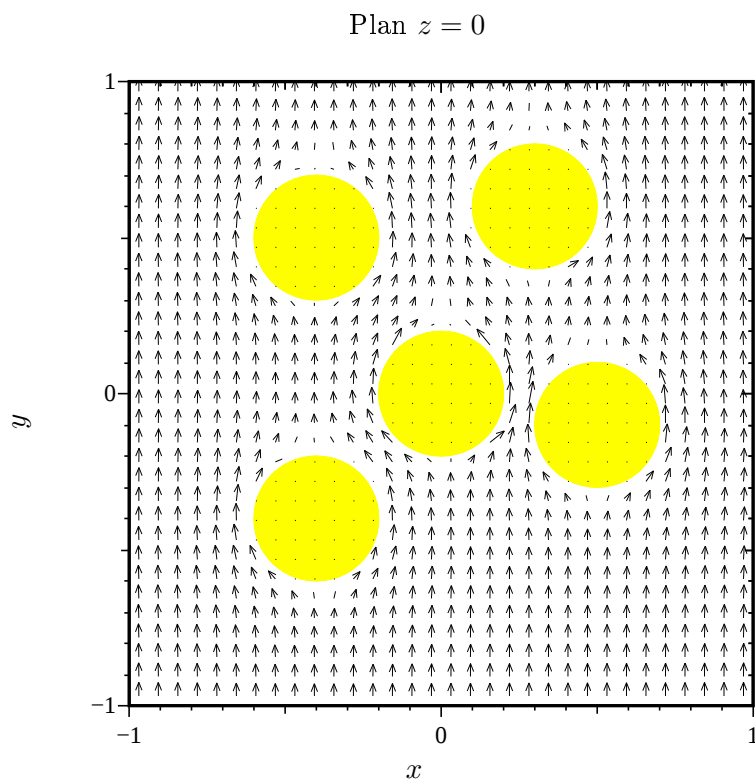
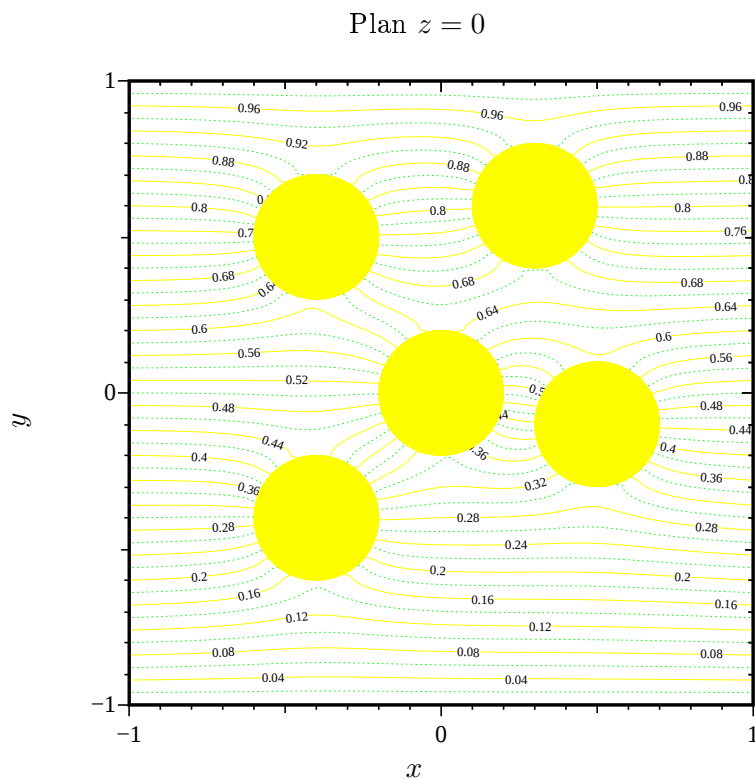


FIG. 5.5 – Isovaleurs et gradient de la solution ; cas de 5 trous.

5.4 Validation numérique

On garde toujours la même configuration géométrique et les mêmes données numériques que celles de la section 4.3 page 76, mais cette fois on cherche à approcher $u = \cos(\beta(r^2 - R^2))$ en tant que solution du problème $\mathbf{I}_N$:

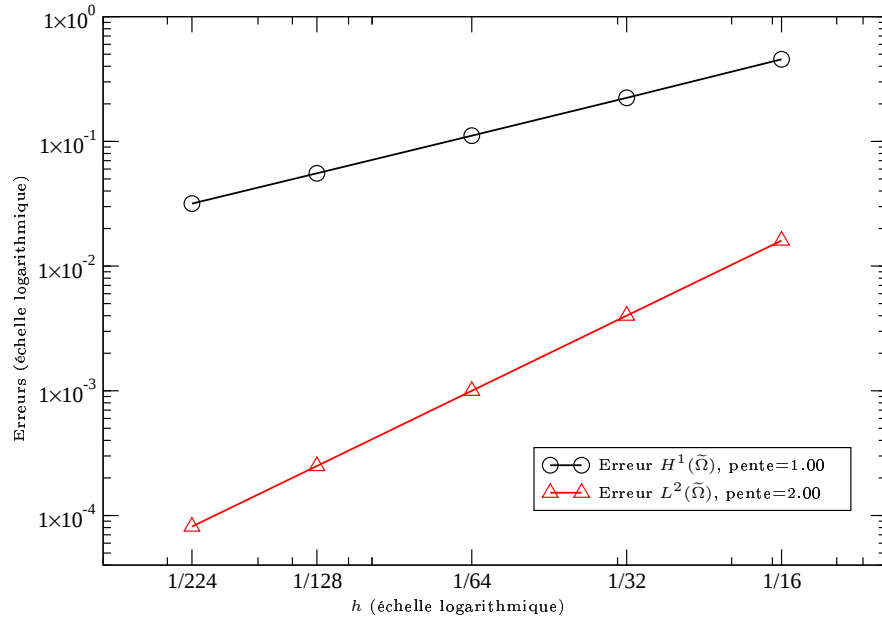
$$\mathbf{I}_N \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \gamma \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Dans les courbes de la figure 5.6(a), on présente les erreurs locales $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$ et $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$ dans $\tilde{\Omega}$ pour différentes valeurs de h ($h \in \{\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{224}\}$). Les erreurs globales ne sont pas présentées parce qu'elles coïncident exactement avec celles dans $\tilde{\Omega}$.

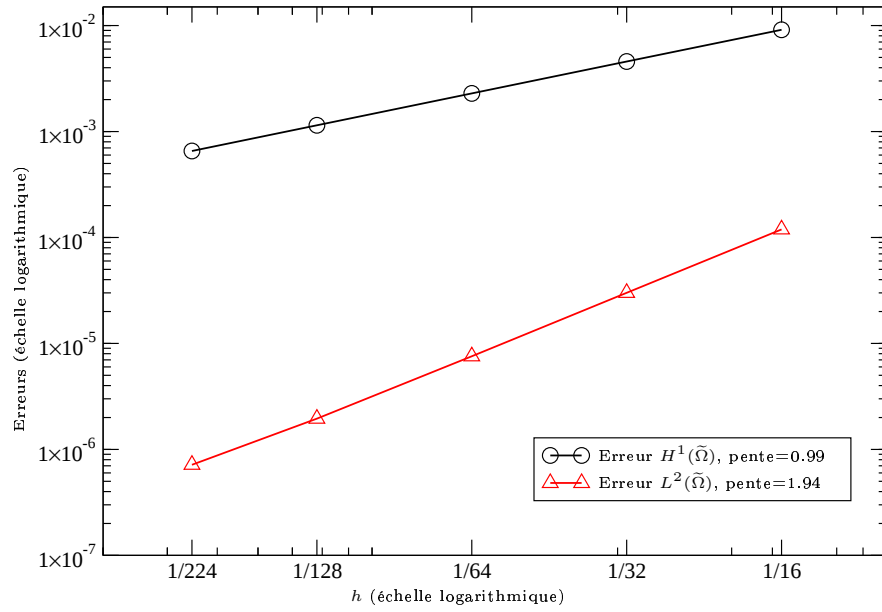
L'objectif du prochain test est de montrer qu'on peut capter les éventuelles oscillations de la solution sur la surface γ . Pour y parvenir, on considère la fonction

$$u(r, \psi, \varphi) = \frac{1}{4}(r^2 - 2R^2)r^2 \sin^2 \psi \cos 2\varphi, \quad (5.17)$$

solution du problème $\mathbf{I}_N$. Ici le triplet (r, ψ, φ) désigne les coordonnées sphériques. Les erreurs locales $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$ et $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$ dans $\tilde{\Omega}$ pour différentes valeurs de h , sont présentées dans les courbes de la figure 5.6(b). Notons que dans ce cas on n'a même pas cherché à calculer les erreurs globales puisqu'on ne dispose pas d'un prolongement harmonique explicite de la solution à l'intérieure de la boule.



(a) Cas d'une solution radiale.

(b) Cas d'une solution qui oscille sur γ .FIG. 5.6 – Erreurs locales ; conditions de NEUMANN homogènes sur γ .

Deuxième partie

Vers les écoulements fluide-particules

Chapitre 6

Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Sommaire

6.1	Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles incompressibles	94
6.2	Discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes .	94
6.2.1	La méthode des caractéristiques	95
6.2.2	Les méthodes de projection	96
6.3	Discrétisation en espace des équations de Navier-Stokes .	98
6.4	Un modèle pour l'interaction fluide-particule	99
6.5	conclusion / perspectives	102

6.1 Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles incompressibles

On se place dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, noté Ω , dans lequel il y a mélange de fluide et de particules rigides. Soit B la réunion de celles-ci. Ainsi, le domaine occupé par le fluide est le domaine perforé $\Omega \setminus \overline{B}$, noté aussi Ω_f . Un exemple représentatif de ce domaine est donné par la figure 6.1. Notons que lorsque les particules sont mobiles, il en

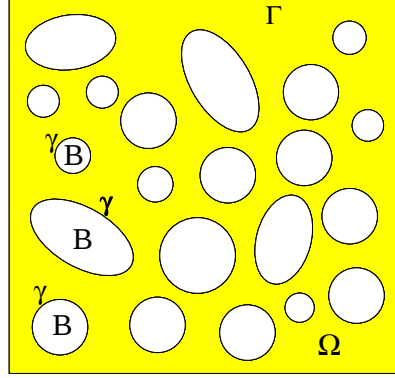


FIG. 6.1 – Exemple représentatif de la géométrie d'un domaine perforé.

est de même pour le domaine occupé par le fluide. Ce qui justifie la notation $\Omega_f(t)$ pour désigner le domaine occupé par le fluide à l'instant t .

On considère un fluide incompressible newtonien régi par les équations de Navier-Stokes instationnaires :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = f \text{ dans } \Omega_f(t), \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_f(t), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega_f(t), \quad (6.3)$$

$$+ \text{Conditions aux limites adéquates sur } \partial \Omega_f(t), \quad (6.4)$$

où, $\mathbf{u}$ et p sont respectivement le champ des vitesses et la pression, ν est la viscosité du fluide et f un champ de forces extérieures (le champ de gravité par exemple). L'équation (6.1) représente la conservation des moments tandis que l'équation (6.2) est la contrainte d'incompressibilité assurant la conservation de la masse.

6.2 Discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes

On s'intéresse dans cette section à l'approximation des solutions des équations de NAVIER-STOKES sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. On introduit une partition de l'intervalle de temps : $t^n = n\delta t$ pour $0 \leq n \leq n^*$ où $\delta t = \frac{T}{n^*}$ est le pas correspondant.

6.2.1 La méthode des caractéristiques

Parmi les difficultés inhérentes à la résolution des équations de NAVIER-STOKES est la prise en compte du terme non linéaire : $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Afin de surmonter cette difficulté, on a choisi de discrétiser ce terme par la méthode des caractéristiques (voir O. PIRONNEAU [62] et E. SÜLI [75]) ; il s'agit d'un traitement lagrangien de la dérivée totale :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (6.5)$$

appelée également dérivée particulière.

Plus précisément, la trajectoire d'une particule fluide dans un écoulement ayant une vitesse $\mathbf{u}(t, \cdot)$ et se trouvant à la position $\mathbf{x}$ au temps s est notée $\chi(t, s; \mathbf{x})$ (Voir la figure 6.2).

χ ainsi définie est donc solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d\chi(t, s; \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{u}(t, \chi(t, s; \mathbf{x})), & t \in [0, s], \\ \chi(s, s; \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (6.6)$$

On note $\chi^{n+1,n}(\mathbf{x}) = \chi(t^{n+1}, t^n; \mathbf{x})$. On utilise l'approximation suivante pour la dérivée totale en temps :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t^{n+1}, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t^n, \chi^{n+1,n}(\mathbf{x}))}{\delta t} \quad (6.7)$$

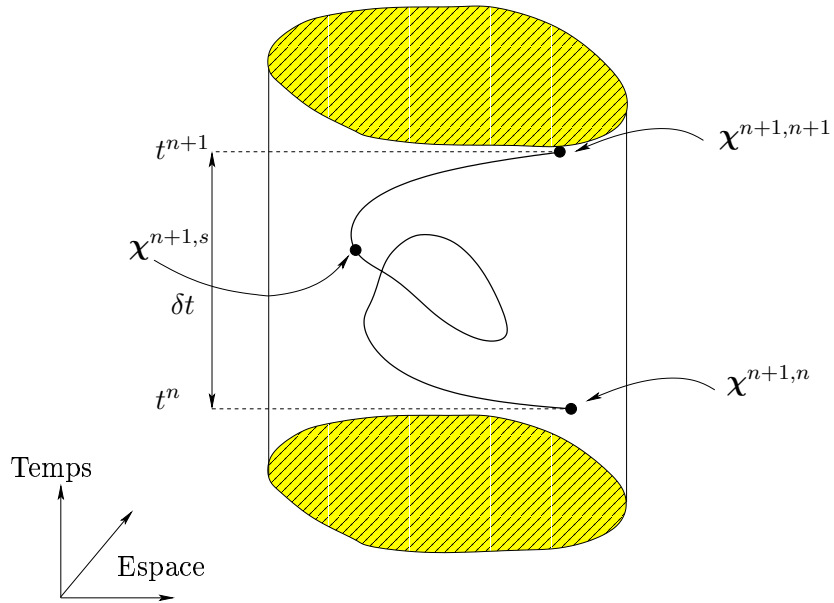


FIG. 6.2 – Ligne caractéristique.

6.2.2 Les méthodes de projection

Une des principales difficultés liées à la résolution des équations de NAVIER-STOKES est le couplage entre les inconnues $\mathbf{u}$ et p par la contrainte d'incompressibilité. Les méthodes de projection introduites par A.J. CHORIN [12, 13] et R. TEMAM [77] pour approcher numériquement les solutions des équations de NAVIER-STOKES instationnaires sont largement utilisées pour leur simplicité et leur efficacité. Cette classe de méthodes permet de découpler les approximations de la vitesse et de la pression à chaque pas de temps, évitant ainsi les difficultés inhérentes à la résolution du problème de STOKES.

Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler le calcul de la vitesse et celui de la pression, en résolvant dans un premier temps un problème de convection-diffusion telle que la vitesse résultante n'est pas à divergence nulle, puis, dans un deuxième temps, celle-ci est projetée sur un espace de fonctions à divergence nulle afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité. L'analyse de ces méthodes est donnée dans R. TEMAM [78].

Dès leur introduction par A.J. CHORIN et R. TEMAM, les méthodes de projection ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Toutes les approches sous-jacentes peuvent être classées en deux catégories : celles basées sur des techniques de correction de la pression et celles basées sur des techniques de correction de la vitesse.

On cite par exemple le schéma en $\mathcal{O}(\delta t^2)$ pour la vitesse en norme $\mathbf{L}^2$ introduit dans J.-L. GUERMOND [32] et J. SHEN [72], la nouvelle variante basée sur une correction de la vitesse introduite dans J.-L. GUERMOND et J. SHEN [34], permettant une convergence en $\mathcal{O}(\delta t^2)$ sur la vitesse en norme $\mathbf{L}^2$ et une convergence en $\mathcal{O}(\delta t^{\frac{3}{2}})$ sur la vitesse en norme $\mathbf{H}^1$ et la pression en norme L^2 , et enfin le schéma introduit dans J.-L. GUERMOND et J. SHEN [33], qui outre le fait qu'il soit en $\mathcal{O}(\delta t^2)$ pour la pression, est également d'ordre 2 pour la vorticité.

Dans le cadre de ce manuscrit, nous nous limiterons aux variantes qui ont      impl  ment    es dans la th    , en l'occurrence le schéma de projection introduit par Y. ACHDOU et J.-L. GUERMOND dans [2] et le schéma de *splitting* introduit dans J.-L. GUERMOND et J. SHEN [33].

Schéma de projection / Lagrange-Galerkin

Pour la discrétisation en temps des équations de NAVIER-STOKES on a choisi d'utiliser un schéma de projection Lagrange-Galerkin. Cette famille de schémas a été analys    e dans Y. ACHDOU et J.-L. GUERMOND [2]. Un des avantages majeurs de cette approche est de traiter le terme convectif de manière explicite et de garder les opérateurs symétriques et invariants en temps. L'id    e est de combiner la méthode des éléments finis avec la méthode des caractéristiques pr  sent    e dans la section 6.2.1.

L'id    e principale commune à tous les schémas de projection est de découpler les effets visqueux du fluide de l'incompressibilité de l'écoulement, ils sont ainsi bas    s sur une stratégie de « prédiction-correction ».

On introduit donc deux suites $(\mathbf{u}^n)$ et $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ pour la vitesse et une suite (p^n) pour la pression telle que à chaque pas de temps :

- $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ soit une « prédiction » du champ de vitesse, vérifiant les conditions aux limites mais pas nécessairement la contrainte de divergence nulle,
- $(\mathbf{u}^n)$ soit une « correction » de $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ à divergence nulle, mais ne vérifie pas forcément les conditions aux limites,
- (p^n) s'ajuste en fonction de $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ et apporte la correction nécessaire ; on note que calculer $(\mathbf{u}^n)$ revient à calculer (p^n) .

On introduit les espaces $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega_f)$ et $M_h \subset L^2(\Omega_f)/\mathbb{R}$ comme étant des approximations discrètes par éléments finis de $\mathbf{H}^1(\Omega_f)$ et $L^2(\Omega_f)/\mathbb{R}$ basées sur une triangulation du domaine Ω_f . On introduit aussi $\mathbf{Y}_h$ l'espace défini par $\mathbf{Y}_h = \mathbf{X}_h + \nabla M_h$. Notons que comme les fonctions de l'espace M_h sont continues, polynômiales par morceaux, celui-ci est donc inclus dans $H^1(\Omega_f)$, et par suite $\mathbf{Y}_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega_f)$. On définit les deux suites $(\tilde{\mathbf{u}}_h^n)_{0 \leq n \leq n^*} \subset \mathbf{X}_h$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_h^n)_{0 \leq n \leq n^*} \subset \mathbf{Y}_h$. Le schéma discret de projection/Lagrange-Galerkin est donc le suivant : trouver $(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbf{Y}_h \times M_h$, tel que :

$$\text{Prédiction} \quad \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n \circ \chi_h^{n+1,n}}{\delta t}, \mathbf{v}_h \right) + \nu (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + \\ & (\mathcal{B}_h^T(2p_h^n - p_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) = (f^{n+1}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h. \end{aligned} \right. \quad (6.8)$$

$$\text{Projection} \quad \left[\begin{aligned} & \left(\nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \nabla q_h \right) = \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h)}{\delta t}, \quad \forall q_h \in M_h, \\ & \mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \delta t \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \end{aligned} \right. \quad (6.9)$$

où $\mathcal{B}_h$ est l'opérateur de divergence discret de $\mathbf{X}_h$ dans M_h et est défini par

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h, \quad (\mathcal{B}_h \mathbf{v}_h, q_h) = \int_{\Omega_f} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h = (\mathbf{v}_h, \mathcal{B}_h^T q_h). \quad (6.10)$$

Une nouvelle classe de schémas de *splitting*

Il s'agit de schémas qui ont été récemment introduits par J.-L. GUERMOND [33]. On se limite dans cette présentation au schéma d'ordre 1. Voir [33] pour plus de détails, notamment sur la variante d'ordre 2.

L'idée de base est d'intégrer l'équation des moments (6.1) en prenant des gradients comme fonctions test, et en utilisant :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \nabla q \right) = -(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, q) = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega_f). \quad (6.11)$$

Ainsi, il vient :

$$\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega_f} (f + \nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \nabla q, \quad \forall q \in H^1(\Omega_f). \quad (6.12)$$

Afin de simplifier la présentation, on suppose dans cette section qu'on a pu approximer le terme non linéaire (par la méthode des caractéristiques ou par une autre technique). On introduit $g^{n+1} = f(t^{n+1}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})^{n+1}$. Le schéma considéré est donc le suivant :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = g^{n+1}, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega_f}^{n+1} = 0, \quad (6.13)$$

$$(\nabla p^n, \nabla q) = (g^{n+1} + \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}, \nabla q), \quad \forall q \in H^1(\Omega_f). \quad (6.14)$$

Dans cette formulation, on est amené à calculer $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$ qui peut ne pas être bien défini dans le cadre de la méthode des éléments finis. Une solution alternative pour éviter ce problème consiste à réécrire les équations (6.13)-(6.14) sous la forme suivante :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = g^{n+1}, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega_f}^{n+1} = 0, \quad (6.15)$$

$$(\nabla(p^{n+1} - p^n), \nabla q) = \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t}, \nabla q \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega_f). \quad (6.16)$$

Notons que le schéma défini par les équations (6.15)-(6.16) ne correspond pas à une méthode de projection à proprement parler, puisque la vitesse $\mathbf{u}^{n+1}$ n'est pas à divergence nulle.

Comme dans les schémas de correction de la vitesse et de correction de la pression, l'ordre du schéma (6.15)-(6.16) peut être amélioré en remplaçant $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$ par $-\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1}$ (en utilisant l'identité $\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1}$), ce qui donne :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = g^{n+1}, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega_f}^{n+1} = 0, \quad (6.17)$$

$$(\nabla(p^{n+1} - p^n), \nabla q) = (g^{n+1} - \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1}, \nabla q), \quad \forall q \in H^1(\Omega_f). \quad (6.18)$$

Le fait de ne pas tenir compte du $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$ dans l'expression de $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$ permet un contrôle, *a priori*, de la divergence de la vitesse. Afin d'éviter de calculer explicitement le terme $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1}$, on montre (voir [33]) que le schéma (6.17)-(6.18) est aussi équivalent à :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = g^{n+1}, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega_f}^{n+1} = 0, \quad (6.19)$$

$$(\nabla \psi^{n+1}, \nabla q) = \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t}, \nabla q \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega_f), \quad (6.20)$$

$$p^{n+1} = \psi^{n+1} + p^n - \nu \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \quad (6.21)$$

Un des avantages de ce schéma est que la pression n'est plus contrainte à des conditions de NEUMANN homogènes artificielles. Ce schéma est d'ordre 1 pour la vitesse, la pression et la vorticité (cf. [33]). On trouve aussi dans [33] une variante d'ordre 2.

6.3 Discrétisation en espace des équations de Navier-Stokes

Comme décrit dans la section précédente, la discrétisation en temps des équations de NAVIER-STOKES par un schéma de projection combiné avec la méthode des caractéristiques nous conduit, à chaque pas de temps, à deux problèmes découplés : un problème

de type HELMHOLTZ vérifié par le champ de vitesse $\mathbf{u}$, (6.8) ou (6.19), et un problème de type POISSON vérifié par la pression p , (6.9) ou (6.20). Ainsi, on s'est ramené dans le cadre des problèmes elliptiques dans des domaines perforés. On pourra ainsi utiliser les méthodes développées dans la première partie de ce manuscrit. Le problème en vitesse sera donc discrétisé par la F.B.M. et le problème en pression par le schéma de prise en compte des conditions de NEUMANN introduit dans le chapitre 5. Dans tous les calculs que nous présenterons dans le chapitre 7, on a utilisé des éléments finis de type $8Q^1/Q^1$, c'est-à-dire une grille pour la vitesse deux fois plus fine que celle pour la pression (voir figure 6.3).

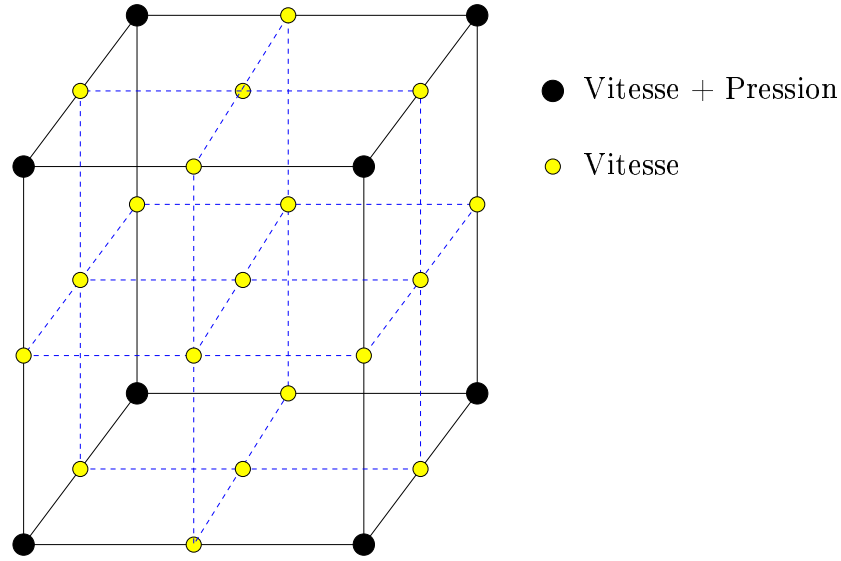


FIG. 6.3 – Grille vitesse/pression ($8Q^1/Q^1$).

À ce stade, on a introduit et implémenté des outils permettant la simulation des écoulements fluides tridimensionnels dans un domaine contenant des obstacles. En outre, on a aussi considéré le cas où le mouvement des particules est imposé (voir chapitre 7). Cependant, il reste à traiter la prise en compte du mouvement induit par les forces hydrodynamiques exercées sur les particules.

L'objet de la section suivante est de développer des outils permettant la prise en compte de tels mouvements. L'implémentation d'un module correspondant à la partie interaction fluide-particule n'est pas encore faite et elle fait l'objet de nos perspectives à très court terme.

6.4 Un modèle pour l'interaction fluide-particule

Le modèle d'interaction fluide-particule sur lequel on se base pour pouvoir tenir compte des mouvements des particules dans un fluide est inspiré de celui utilisé dans B. MAURY [52] et R. GLOWINSKI [58]. Dans [52], l'auteur propose une méthode basée sur une approche ALE (Arbitraire Euler-Lagrange) permettant la simulation directe d'écoulements particulaire en 2D où un grand nombre de particules peut être considéré, de l'ordre de

5000. Dans [58], l'auteur propose une méthode de domaines fictifs permettant la simulation d'écoulements fluide-particules en trois dimensions d'espace. Le nombre de particules mises en jeu est de l'ordre de 1024.

On se place dans une situation aussi simple que possible. On considère le mélange d'un fluide visqueux et de N particules indéformables et de forme sphérique. On suppose de plus qu'aucun contact ne se produit entre deux particules, ou entre une particule et la paroi.

Dans ce paragraphe on ne suppose plus que les particules sont fixes mais peuvent être en mouvement sous l'action de la force hydrodynamique exercée par le fluide, et éventuellement celle exercée par un champ de forces extérieures (le champ de gravité $\mathbf{g}$ par exemple).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, de frontière Γ , rempli par un mélange fluide-particules. Il s'agit d'un fluide incompressible de densité ρ , et de N particules rigides $B_1, \dots, B_N$; $\mathbf{n}$ désigne toujours un vecteur unitaire normal à la frontière du domaine Ω_f occupé par le fluide. Par ailleurs, on note par $\hat{\mathbf{n}}$ un vecteur unitaire normal à la surface γ_i de la particule B_i . Notons que $\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{n}}$ sur γ_i . À l'instant t donné, le domaine occupé par le fluide est le suivant :

$$\Omega_f(t) = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_i}(t). \quad (6.22)$$

Voir la figure 6.4 pour un exemple du domaine Ω_f dans le cas bidimensionnel.

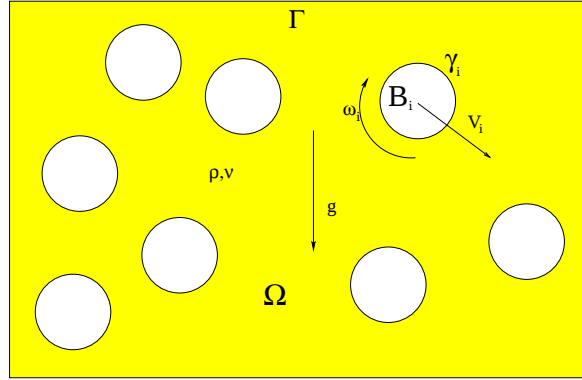


FIG. 6.4 – Notations (cas bidimensionnel).

L'écoulement du fluide est régi par les équations de NAVIERS-STOKES qu'on peut écrire sous cette forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_f(t), \quad (6.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_f(t), \quad (6.24)$$

où $\mathbf{u}$ désigne le champ des vitesses du fluide, et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes. Pour un fluide newtonien de viscosité ν , ce tenseur est donné par cette équation :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + 2\nu\mathbb{D}[\mathbf{u}], \quad (6.25)$$

où,

$$\mathbb{D}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) \quad (6.26)$$

désigne le tenseur des taux de déformation, p la pression du fluide et $\mathbf{I}$ le tenseur identité. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, on note par m_i la masse de la $i^{\text{ème}}$ particule B_i , $\mathbf{V}_i$ la vitesse de translation de son centre de masse $\mathbf{G}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$ son vecteur vitesse de rotation instantanée, et $\mathbf{J}_i$ son tenseur d'inertie en $\mathbf{G}_i$. Le système (6.23)-(6.24) doit être complété par des conditions initiales et des conditions au bord adéquates. Nous citons en particulier les conditions qu'on a choisi de poser sur les interfaces fluide-particules $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$. Il s'agit des conditions d'adhérence (ou non-glissement) du fluide aux surfaces $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$;

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{x} - \mathbf{G}_i), \quad \forall \mathbf{x} \in \gamma_i(t). \quad (6.27)$$

Le mouvement de particules rigides, imperméables et immergées dans un fluide newtonien est modélisé par la deuxième loi de NEWTON. Ce mouvement est régi par les équations (vectorielles) de NEWTON-EULER :

$$m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = m_i \mathbf{g} - \int_{\gamma_i(t)} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{J}_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i = - \int_{\gamma_i(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{G}_i) \times \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.29)$$

où les vitesses V_i et $\boldsymbol{\omega}_i$ des particules B_i sont données par les équations cinématiques suivantes :

$$\frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \mathbf{V}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.30)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.31)$$

Dans l'équation (6.31), le vecteur tridimensionnel $\boldsymbol{\Theta}_i$ est celui dont les composantes sont les trois angles d'EULER qui permettent de définir la position angulaire d'un solide dans l'espace (voir figure 6.5).

$$\boldsymbol{\Theta}_i = (\phi_i, \beta_i, \psi_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (6.32)$$

Les angles ϕ_i , β_i et ψ_i sont respectivement connus sous les noms suivants : angle de « précession », angle de « nutation », et angle de « rotation propre ». L'angle β_i prend les valeurs de 0 à π et les angles ϕ_i et ψ_i de 0 à 2π . Voir l'annexe C, section C.1 pour plus de détails sur les angles d'EULER.

Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, l'expression de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_i$ dans le repère d'inertie (noté par (x', y', z') dans la figure 6.5) lié à la $i^{\text{ème}}$ particule est :

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_i \sin \beta_i \sin \psi_i + \dot{\beta}_i \cos \psi_i \\ \dot{\phi}_i \sin \beta_i \cos \psi_i - \dot{\beta}_i \sin \psi_i \\ \dot{\phi}_i \cos \beta_i + \dot{\psi}_i \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

où $\dot{\phi}_i = \frac{d\phi_i}{dt}$, $\dot{\beta}_i = \frac{d\beta_i}{dt}$, et $\dot{\psi}_i = \frac{d\psi_i}{dt}$.

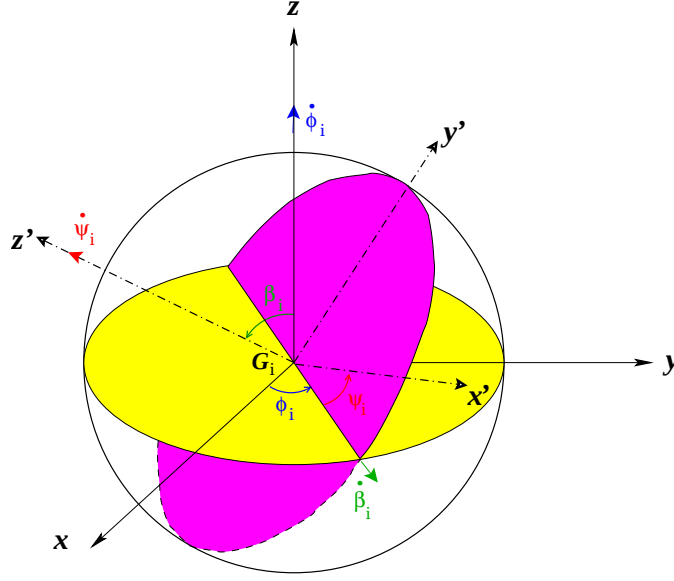


FIG. 6.5 – Position angulaire d'un solide dans l'espace.

6.5 conclusion / perspectives

Le modèle décrit dans la section précédente nous permet de tenir compte de la force exercée par le fluide sur les particules, et ainsi, la prise en considération du mouvement induit. Il suffit alors d'estimer les termes suivants, à savoir la force hydrodynamique, donnée par :

$$\mathbf{F}_i = - \int_{\gamma_i(t)} \sigma \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.34)$$

et le couple de torsion défini par :

$$\mathbf{T}_i = - \int_{\gamma_i(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{G}_i) \times \sigma \hat{\mathbf{n}}. \quad (6.35)$$

Chapitre 7

Simulations numériques

Sommaire

7.1	Convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules fixes	104
7.2	Convection-diffusion de la chaleur autour de deux boules en mouvement	106
7.3	Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique . .	109
7.4	Écoulement autour d'une sphère	122
7.5	Écoulement dans un canal contenant deux obstacles sphériques	129
7.6	Écoulement autour d'un nombre important de boules fixes	136

En vue de montrer la possibilité de simuler des écoulements tridimensionnels « complexes » avec la F.B.M., ce chapitre est dédié aux simulations numériques de certains écoulements classiques.

On commence par la simulation numérique de la convection-diffusion de la chaleur, autour de particules (fixes et mobiles), par un champ de vitesse potentiel. Ce modèle est à la fois simple et représentatif de certaines difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre des équations de NAVIER-STOKES tridimensionnelles. Les avantages que l'on peut avoir en utilisant, dans un premier temps, ce modèle sont d'abord le fait d'avoir des équations aux dérivées partielles scalaires et ensuite la possibilité de choisir un champ de vitesse potentiel (ce qui nous permet d'avoir en plus des EDP linéaires). Notons que ce modèle est aussi utilisé dans différents contextes physiques. Il est censé modéliser les fluides dits « parfaits ».

Dans la deuxième simulation, on s'intéresse aux équations de NAVIER-STOKES. On commence par un test classique d'écoulement complexe, la cavité entraînée, auquel on ajoute une complexité supplémentaire qui consiste à mettre un obstacle au centre de la cavité afin de voir son effet sur le tourbillon principal et éventuellement les tourbillons mineurs.

Afin de valider le code de calcul, on s'intéresse dans la troisième simulation au *benchmark* de l'écoulement autour d'une sphère. On présente ainsi quelques simulations avec différents nombres de REYNOLDS.

On finit ce chapitre par quelques simulations numériques d'écoulements autour de plusieurs inclusions solides.

7.1 Convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules fixes

On se place dans un parallélépipède Ω de $\mathbb{R}^3$ dans lequel se trouve un amas de particules rigides et fixes. Ces particules peuvent être vues comme des grains dans la boîte Ω . Sur cinq des faces de Ω , on maintient une température égale à 1 et sur la sixième face on prend des conditions de NEUMANN homogènes. Sur les surfaces des particules, la température est maintenue égale à 0. La chaleur est convectée par un champ de vitesse potentiel solution du problème (7.1). En l'absence des particules « rafraîchissantes », la boîte Ω finit par avoir une température constante égale à 1. Par contre, comme on peut le vérifier sur la figure 7.1, la présence de ces particules permet de maintenir une zone « fraîche » dans un voisinage de l'agglomération de particules.

On a pris comme domaine Ω le parallélépipède $] - 3, 3[\times] - 3, 3[\times] - 6, 6[$, B comme étant la réunion de neuf boules de rayon commun $R = 0.4$. La vitesse de convection v est

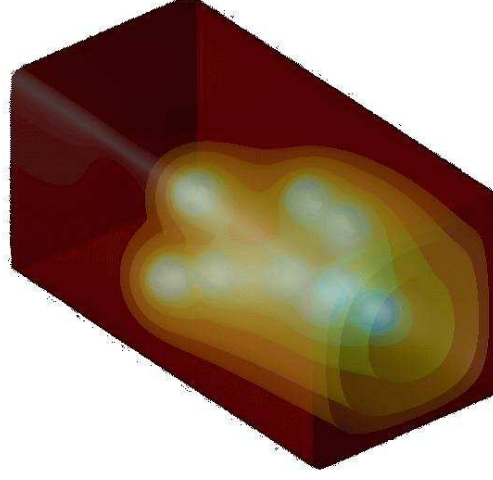


FIG. 7.1 – Convection-diffusion de la chaleur autour d'un amas de particules fixes.

égale à $\nabla\varphi$, où φ est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\mathbf{n}}} = 0 & \text{sur } \gamma = \bigcup_i \gamma_i, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus (z = z_{min}, z = z_{max}), \\ \varphi = 1 & \text{sur } (z = z_{min}, z = z_{max}), \end{array} \right. \quad (7.1)$$

où $\mathbf{n}$ (respectivement $\hat{\mathbf{n}}$) désigne un vecteur unitaire normale à la surface Γ (respectivement γ). Quant à la température u , elle est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \nabla\varphi \cdot \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B}, \\ u = 0 & \text{sur } \bigcup_i \gamma_i, \\ u = 1 & \text{sur } \Gamma \setminus (z = z_{min}), \\ \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } (z = z_{min}). \end{array} \right. \quad (7.2)$$

La conductivité ν est égale à 3.10^{-2} et le pas de temps δt est égal à 2.10^{-1} . Les résolutions des deux problèmes (7.1) et (7.2) sont faites par la F.B.M. sur un maillage

cartésien de $33 \times 33 \times 65$ points. Une itération en temps coûte en moyenne 5 secondes CPU (notons que pour une itération en temps on fait une dizaine d'itérations de l'algorithme du point fixe pour le problème en φ et une quarantaine d'itérations pour le problème en u). Ce calcul a été fait sur *Hydre*⁸. Dans la figure 7.1 sont représentées quelques isosurfaces de la température après avoir atteint l'état stationnaire.

7.2 Convection-diffusion de la chaleur autour de deux boules en mouvement

L'objectif de cette simulation numérique est de montrer que la F.B.M. est aussi bien adaptée au cas des domaines mobiles. On se place dans le même cadre que celui de la simulation précédente et au lieu de considérer un amas de particules fixes on se donne deux boules rigides en mouvement. Les trajectoires des deux particules sont imposées à l'avance, et sont choisies de sorte qu'on puisse éviter tout contact éventuel entre les deux boules. Le cas des chocs entre les particules n'est pas traité dans cette thèse.

Comme la température aux surfaces des particules est toujours maintenue égale à 0 et celle à la frontière Γ vaut toujours 1, on s'attend à avoir une « traînée » de zones « fraîches » qui suivent les boules en leurs mouvements.

On a gardé les mêmes données géométriques pour le domaine Ω , à savoir le parallélépipède $] - 3, 3[\times] - 3, 3[\times] - 6, 6[$. Quant au domaine B , il est la réunion des deux boules B_1 et B_2 dont les centres respectifs sont initialement (à $t = 0$) situés en $\mathbf{a} = (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1)$ et $\mathbf{b} = (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -1)$. Les deux boules ont le même rayon R égal à 0.4. La trajectoire de la boule B_1 est définie par ces équations :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + 2 \cos(t), \\ y(t) = y_0 + 2 \sin(t), \\ z(t) = z_0 + \frac{9}{2} \sin\left(\frac{t}{10}\right). \end{cases} \quad (7.3)$$

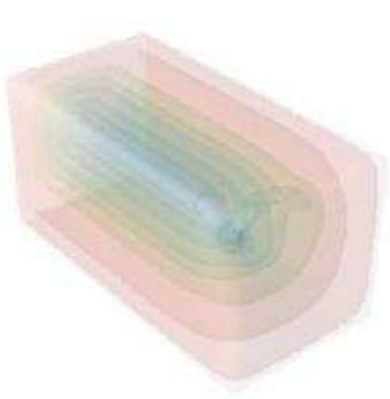
Celle de la boule B_2 est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \sin(t), \\ y(t) = y_0 + \frac{1}{2} \cos(t), \\ z(t) = z_0 - \frac{9}{2} \sin\left(\frac{3t}{10}\right). \end{cases} \quad (7.4)$$

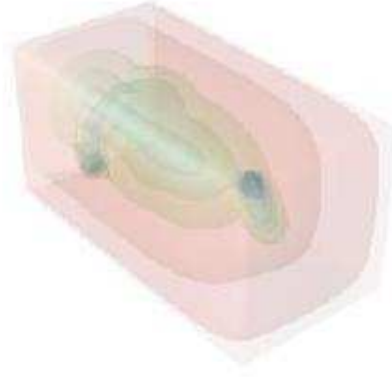
La vitesse de convection v est toujours le champ potentiel donné par φ , solution du problème (7.1). La température u est aussi solution du même problème (7.2).

⁸Le cluster du Laboratoire Jacques-Louis LIONS.

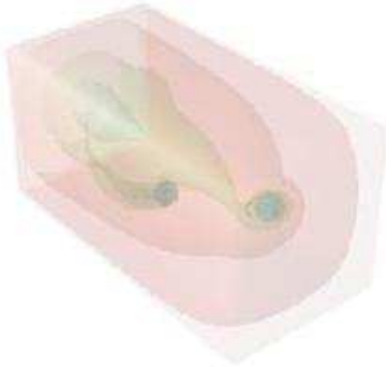
Dans les figures 7.2 et 7.3 on présente l'évolution en temps de la température sous forme d'isosurfaces. On remarque l'apparition des zones « fraîches » qui suivent les boules dans leur mouvement.



(a) Isosurfaces de la température, $t = 20s$.



(b) Isosurfaces de la température, $t = 40s$.

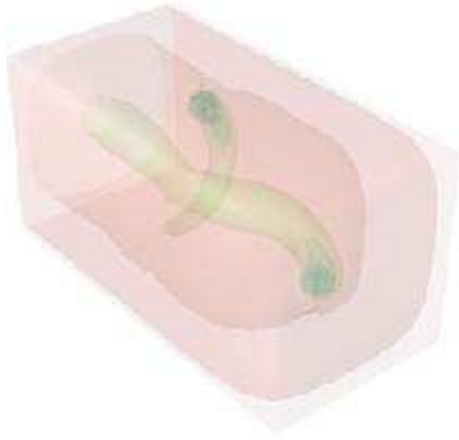


(c) Isosurfaces de la température, $t = 60s$.

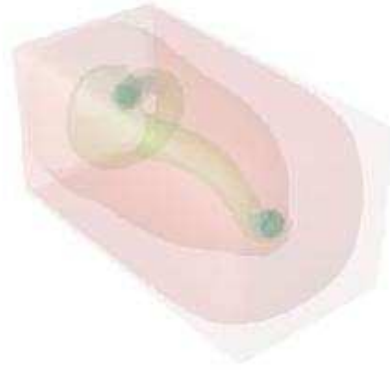


(d) Isosurfaces de la température, $t = 80s$.

FIG. 7.2 – Évolution de la température au cours du temps.



(a) Isosurfaces de la température, $t = 100s$.



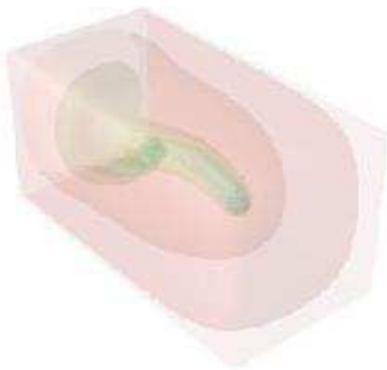
(b) Isosurfaces de la température, $t = 120s$.



(c) Isosurfaces de la température, $t = 140s$.



(d) Isosurfaces de la température, $t = 160s$.



(e) Isosurfaces de la température, $t = 180s$.



(f) Isosurfaces de la température, $t = 200s$.

FIG. 7.3 – Évolution de la température au cours du temps.

7.3 Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique

Dans un premier temps, on se place dans le cube $\Omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$ (sans obstacle) et l'on considère la cavité entraînée par une paroi se déplaçant à vitesse constante $\mathbf{u} = (1, 0, 0)^T$ en $z = \frac{1}{2}$. La paroi supérieure crée un fort tourbillon central et des tourbillons mineurs dans les coins inférieurs de la cavité ainsi que dans le coin supérieur gauche (voir figure 7.4). Outre les tourbillons mentionnés précédemment, appelés de TAYLOR, il apparaît pour des nombres de REYNOLDS élevés des tourbillons dits de TAYLOR-GÖRTLER. Voir C. PRUD'HOMME [65] par exemple pour des simulations numériques de la cavité entraînée faisant apparaître ces différents tourbillons.

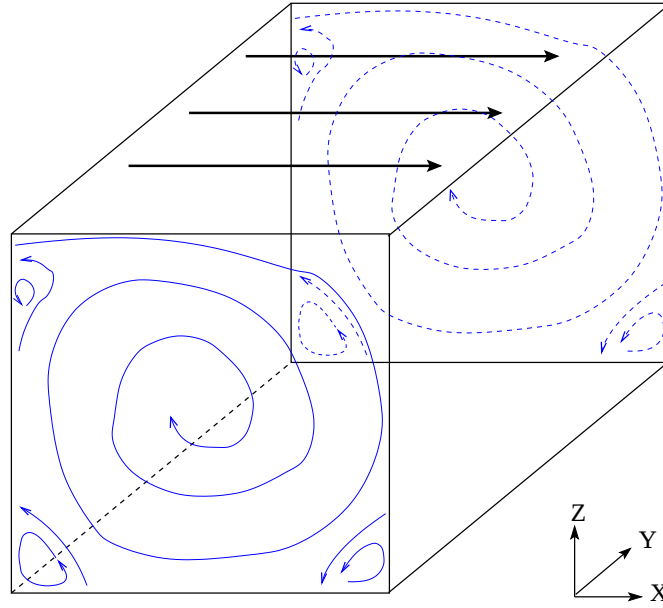


FIG. 7.4 – Cavité entraînée.

Le nombre de REYNOLDS est calculé de la manière suivante :

$$Re = \frac{\overline{U}a}{\nu}, \quad (7.5)$$

où $\overline{U}$ et a sont respectivement la vitesse moyenne et une longueur caractéristique de l'écoulement.

Dans ce qui suit on présente deux simulations numériques de la cavité entraînée : la première, classique et sans obstacle, et la seconde correspondant à la même expérience, en gardant les mêmes paramètres, et en y ajoutant un obstacle sphérique.

Initialement le fluide est au repos, c'est-à-dire $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Le fluide circule dans le domaine Ω_f ($\Omega_f = \Omega$ pour le cas classique et $\Omega_f = \Omega \setminus \overline{B}$ pour le cas avec un obstacle sphérique B). Cependant, dans les deux cas, le calcul se fait dans le cube Ω tout entier. En effet, pour la cavité entraînée en présence d'un obstacle, et en utilisant la F.B.M., on se ramène au domaine Ω tout entier.

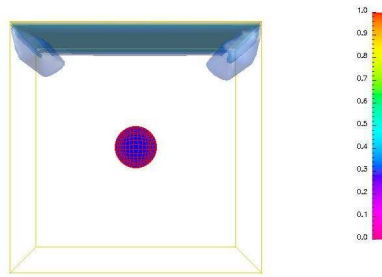
On suppose que le fluide « colle » aux parois du cube. Ceci se traduit par des conditions de DIRICHLET sur la vitesse. Plus précisément, pour la première composante de la vitesse, on impose des conditions non homogènes (égales à 1) sur la paroi $z = \frac{1}{2}$ et des conditions homogènes sur les autres faces. Pour les deux autres composantes du champ de vitesse, on considère des conditions de DIRICHLET homogènes sur tout le bord du cube Ω .

Pour le cas de la cavité en présence d'un obstacle, on impose également des conditions de DIRICHLET homogènes sur la sphère. Ces dernières sont prises en compte par la F.B.M. comme décrit dans les chapitres précédents.

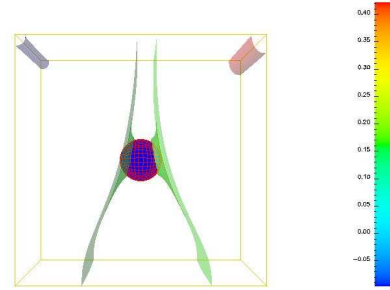
On a utilisé le schéma de projection Lagrange/Galerkin décrit dans le chapitre 6 page 96. On se ramène ainsi à la résolution d'un problème de POISSON avec des conditions de NEUMANN homogènes sur la pression. Les paramètres des deux simulations sont les suivants : pas de temps $\delta t = 2.10^{-2}$ et viscosité $\nu = 2.10^{-3}$. Le maillage de Ω comporte $65 \times 65 \times 65$ sommets.

Dans les figures 7.5 page 111, 7.6 page 112 et 7.7 page 113, on présente les résultats de la simulation de la cavité entraînée en présence d'un obstacle ; dans la colonne de gauche, quelques isosurfaces de la norme euclidienne de la vitesse à des instants différents. Dans la colonne de droite, on présente quelques isobares. Les figures 7.8 page 114, 7.9 page 115 et 7.10 page 116, présentent le champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$ et des *zooms* autour de l'obstacle sur le même plan de coupe. Ensuite, pour la figure suivante, 7.11 page 117, on fait un *zoom* sur le coin inférieur de droite du plan de coupe pour présenter le tourbillon de TAYLOR. Enfin, dans la figure 7.12 page 118, sont représentées, sous différents angles de vues, quelques lignes de courant caractérisant l'écoulement.

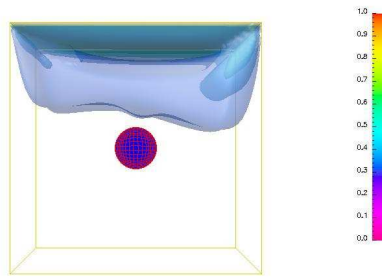
Afin de valider le code, on présente dans les figures 7.13 page 119, 7.14 page 120 et 7.15 page 121 le champ de vitesse correspondant à la cavité entraînée sans l'obstacle.



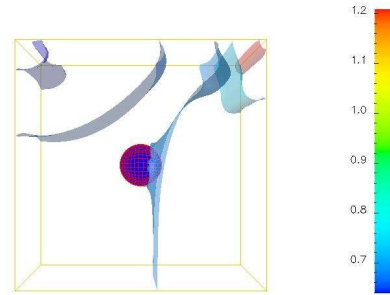
(a) Isosurfaces de la vitesse, $t = 0.2s$.



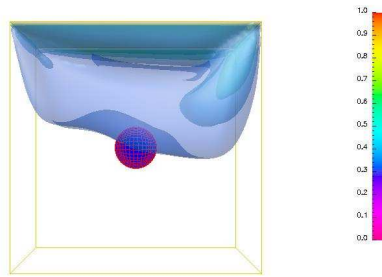
(b) Isobares, $t = 0.2s$.



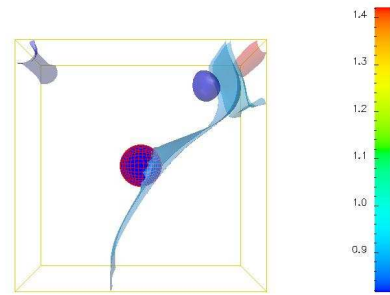
(c) Isosurfaces de la vitesse, $t = 1s$.



(d) Isobares, $t = 1s$.

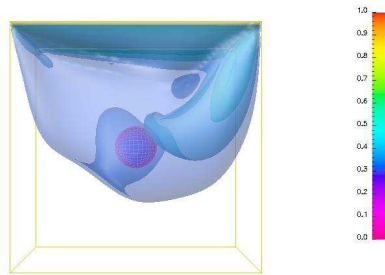


(e) Isosurfaces de la vitesse, $t = 2s$.

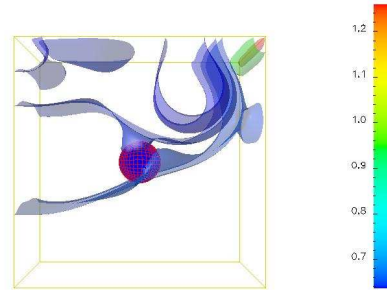


(f) Isobares, $t = 2s$.

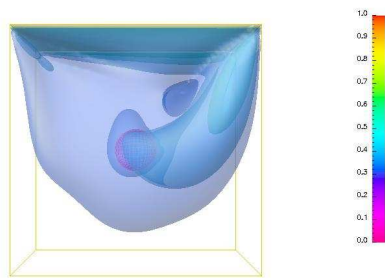
FIG. 7.5 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.



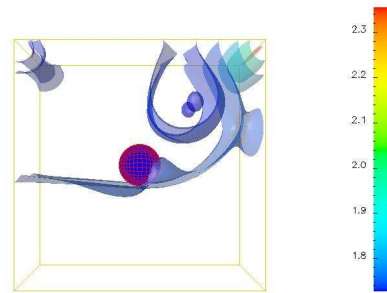
(a) Isosurfaces de la vitesse, $t = 4s$.



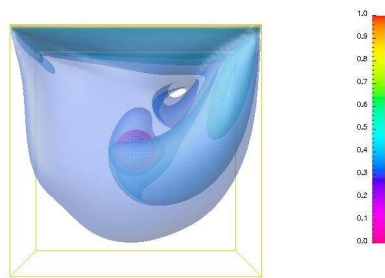
(b) Isobares, $t = 4s$.



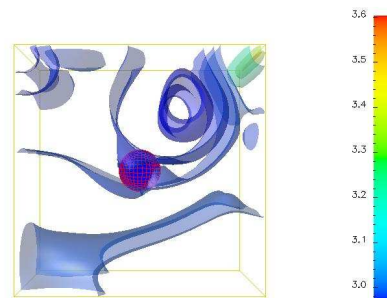
(c) Isosurfaces de la vitesse, $t = 6s$.



(d) Isobares, $t = 6s$.

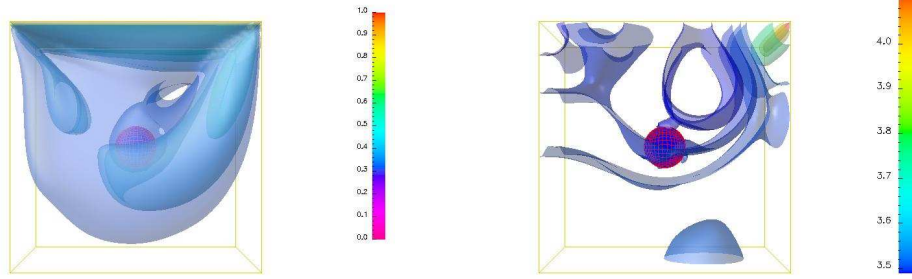


(e) Isosurfaces de la vitesse, $t = 8s$.



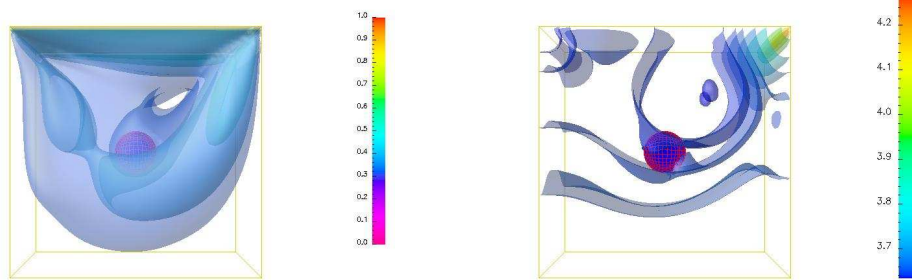
(f) Isobares, $t = 8s$.

FIG. 7.6 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.



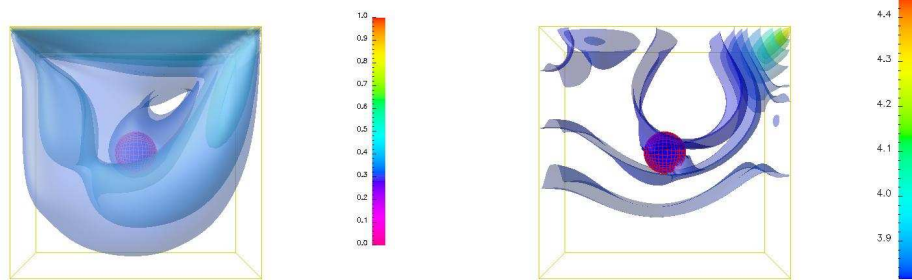
(a) Isosurfaces de la vitesse, $t = 10s$.

(b) Isobares, $t = 10s$.



(c) Isosurfaces de la vitesse, $t = 12s$.

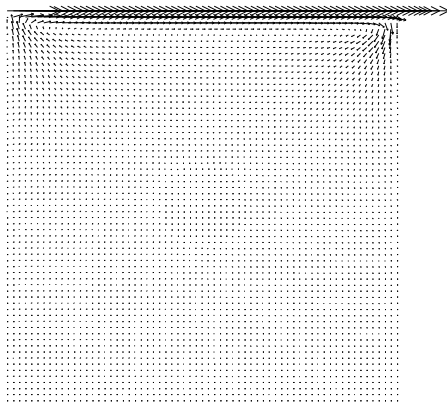
(d) Isobares, $t = 12s$.



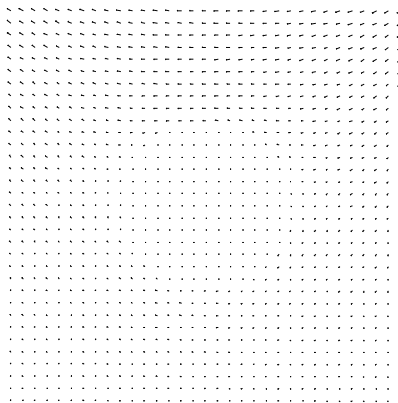
(e) Isosurfaces de la vitesse, $t = 20s$.

(f) Isobares, $t = 20s$.

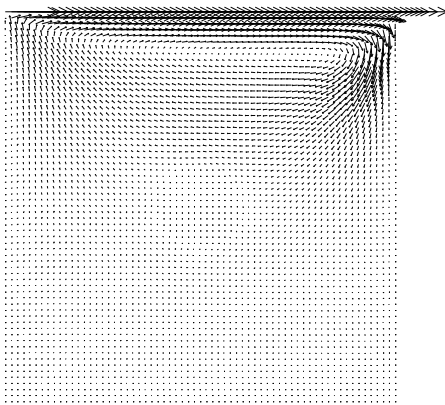
FIG. 7.7 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique.



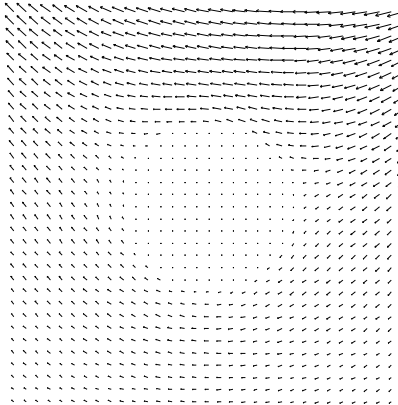
(a) Champ de vitesse, $t = 0.2s$.



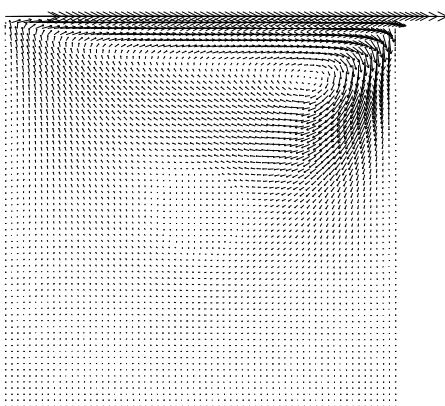
(b) *Zoom* central, $t = 0.2s$.



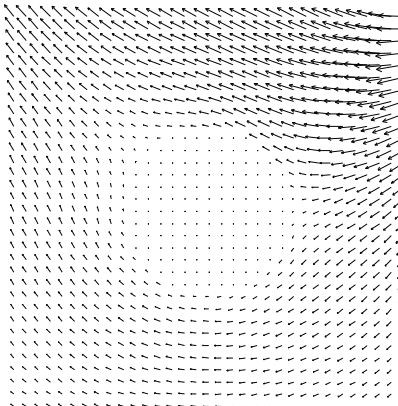
(c) Champ de vitesse, $t = 1s$.



(d) *Zoom* central, $t = 1s$.

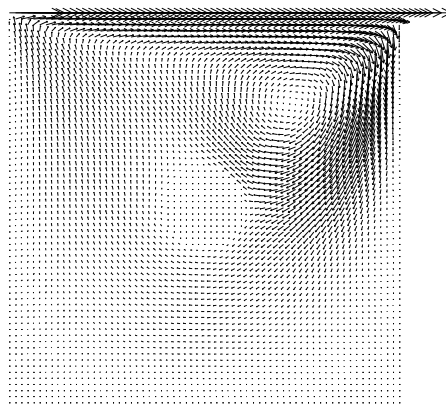


(e) Champ de vitesse, $t = 2s$.

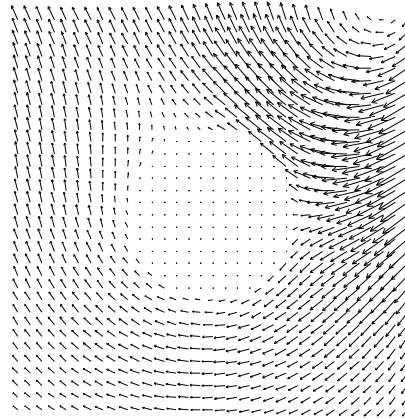


(f) *Zoom* central, $t = 2s$.

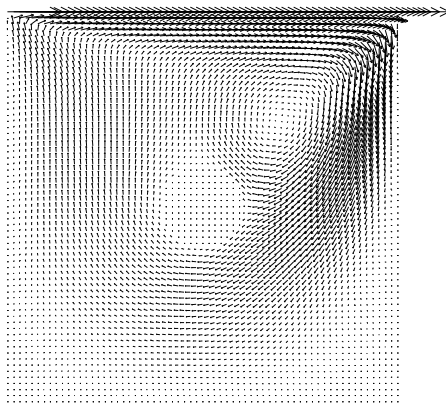
FIG. 7.8 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.



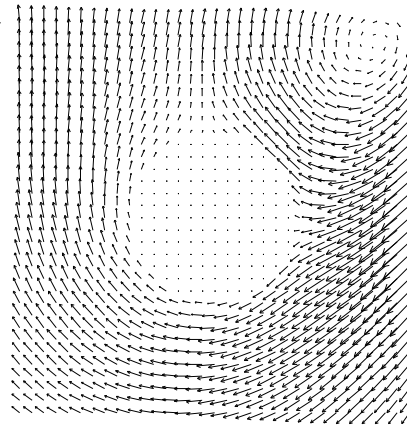
(a) Champ de vitesse, $t = 4s$.



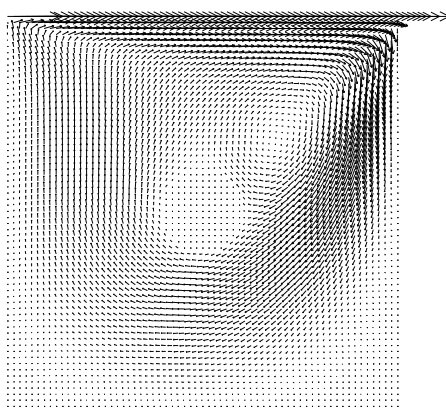
(b) *Zoom* central, $t = 4s$.



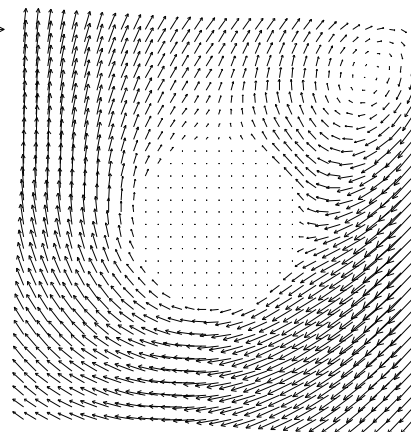
(c) Champ de vitesse, $t = 6s$.



(d) *Zoom* central, $t = 6s$.

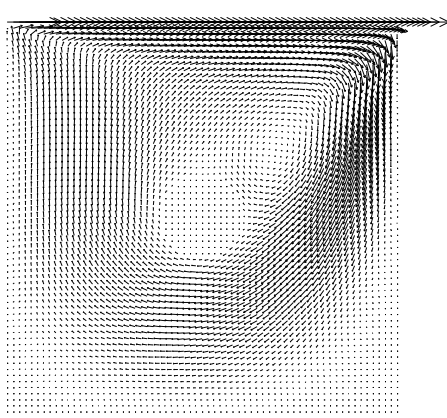


(e) Champ de vitesse, $t = 8s$.

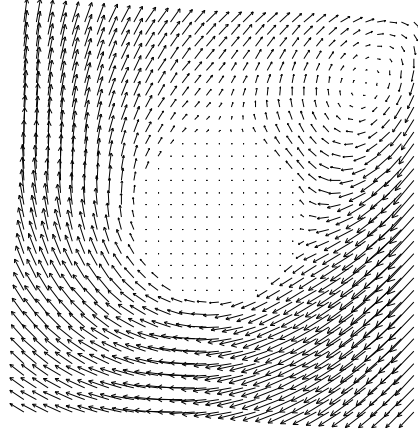


(f) *Zoom* central, $t = 8s$.

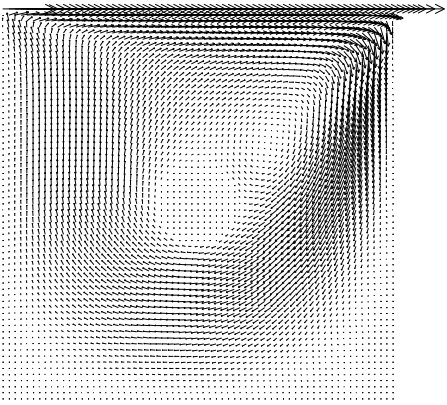
FIG. 7.9 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.



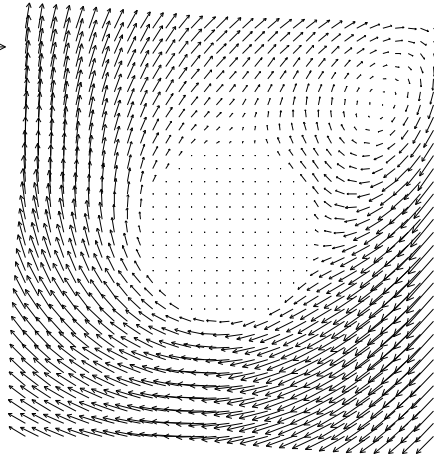
(a) Champ de vitesse, $t = 10s$.



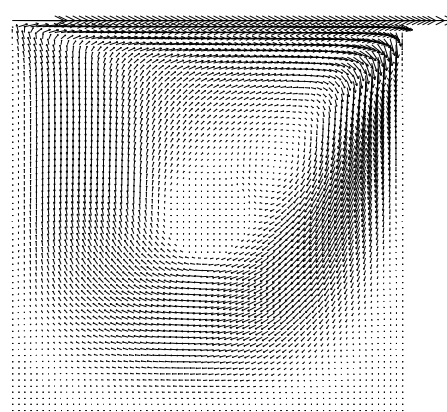
(b) *Zoom* central, $t = 10s$.



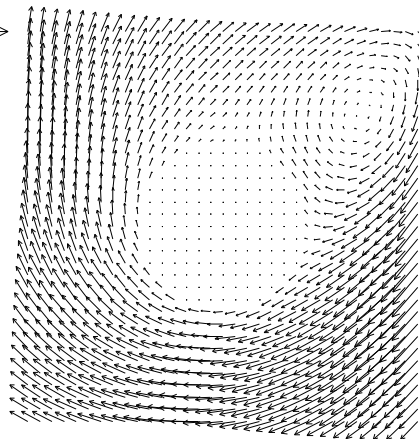
(c) Champ de vitesse, $t = 12s$.



(d) *Zoom* central, $t = 12s$.



(e) Champ de vitesse, $t = 20s$.



(f) *Zoom* central, $t = 20s$.

FIG. 7.10 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.

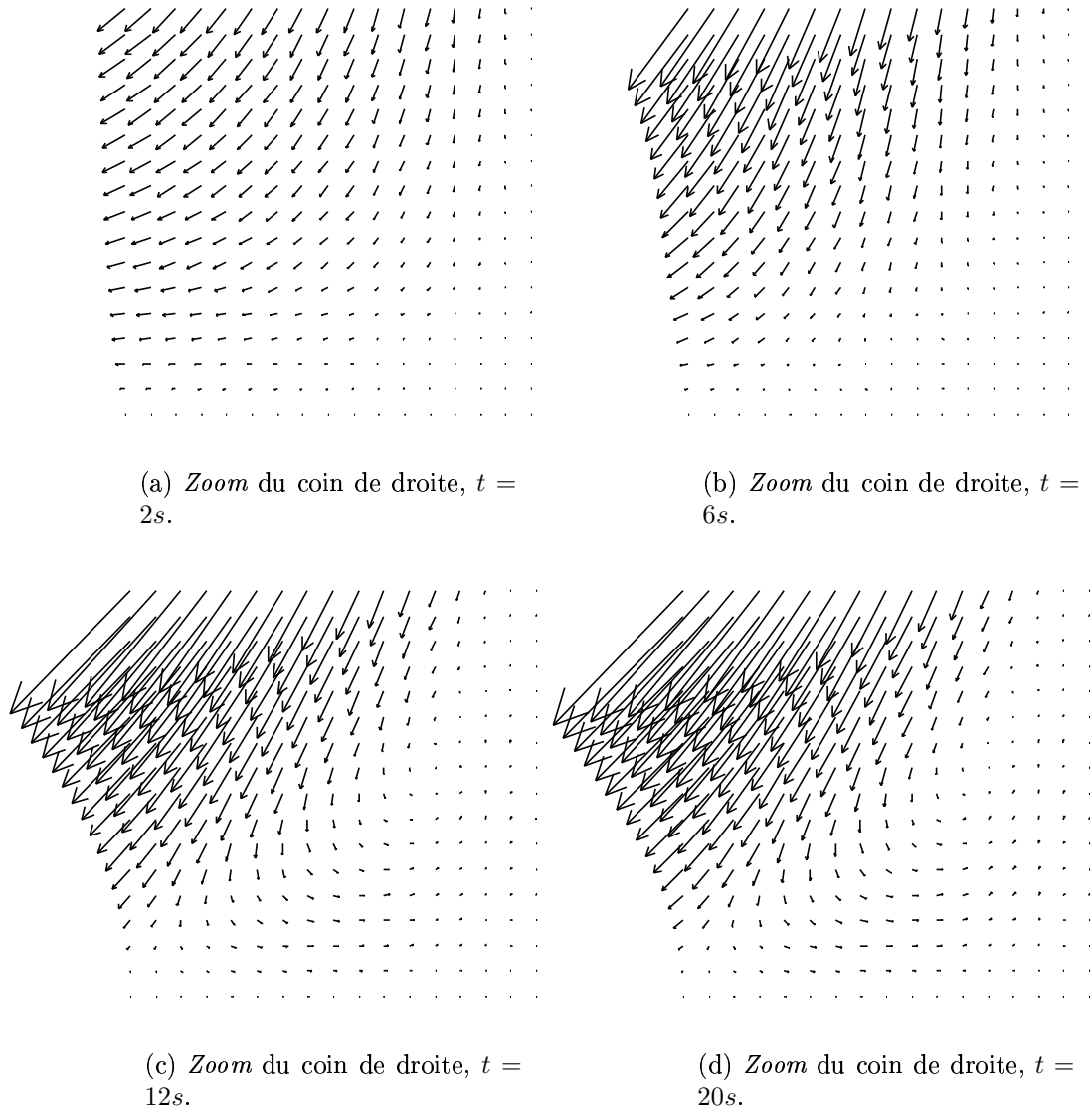
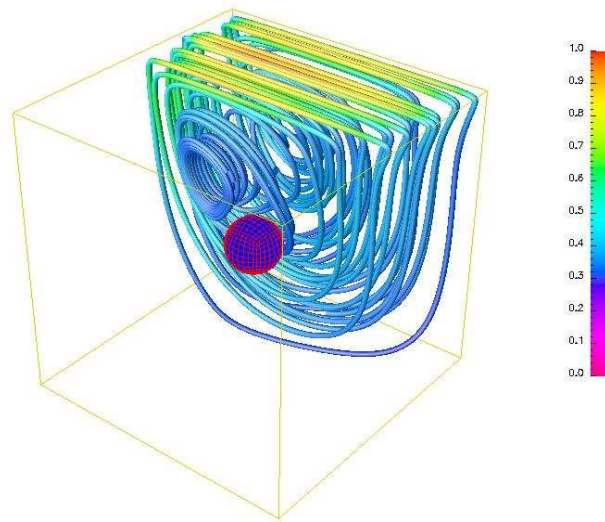
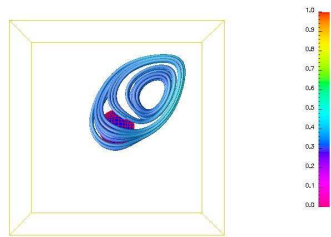


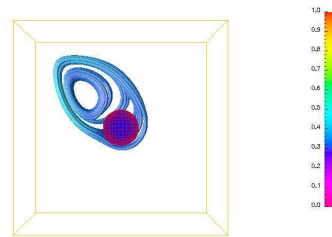
FIG. 7.11 – Tourbillon de TAYLOR du coin inférieur droite ; plan de coupe $y = 0$.



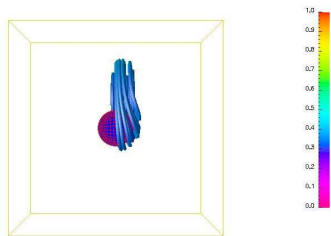
(a) Vue de dessus de certaines lignes de courant.



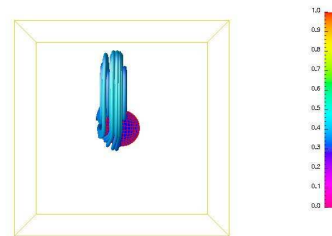
(b) Vue de face de certaines lignes proches de l'obstacle.



(c) Vue de derrière de certaines lignes proches de l'obstacle.

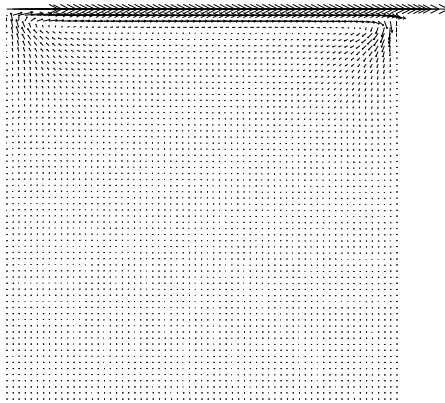


(d) Vue de gauche de certaines lignes proches de l'obstacle.

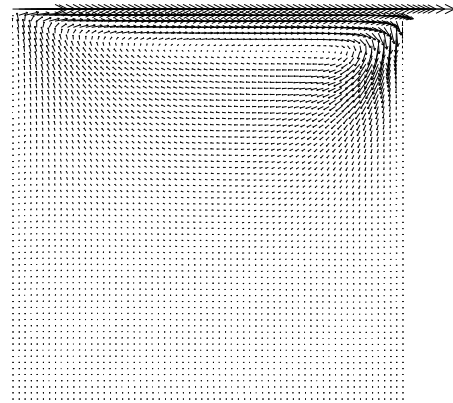


(e) Vue de droite de certaines lignes proches de l'obstacle.

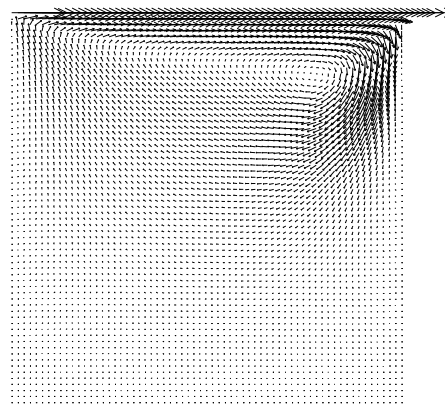
FIG. 7.12 – Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique ; lignes de courant.



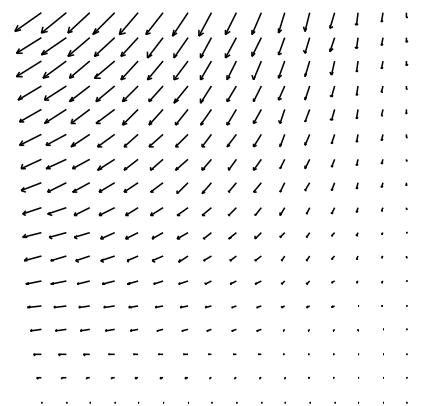
(a) Champ de vitesse, $t = 0.2s$.



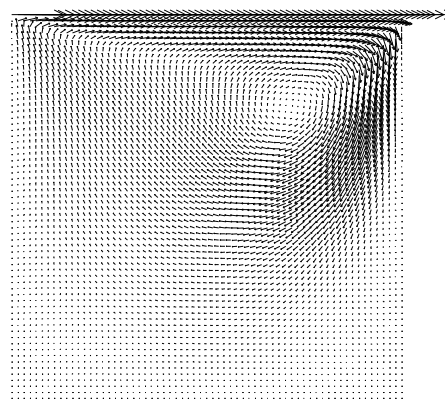
(b) Champ de vitesse, $t = 1s$.



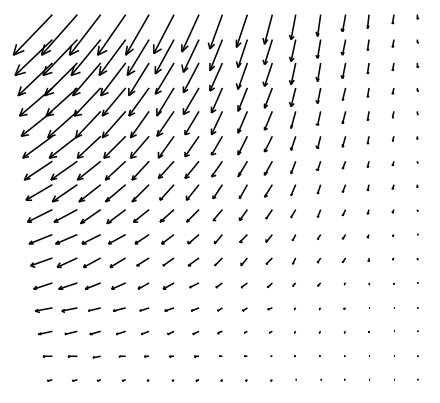
(c) Champ de vitesse, $t = 2s$.



(d) *Zoom* du coin de droite, $t = 2s$.

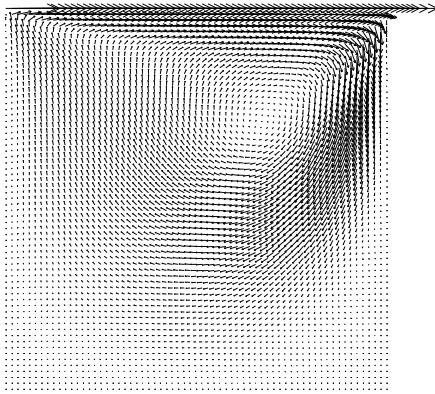


(e) Champ de vitesse, $t = 4s$.

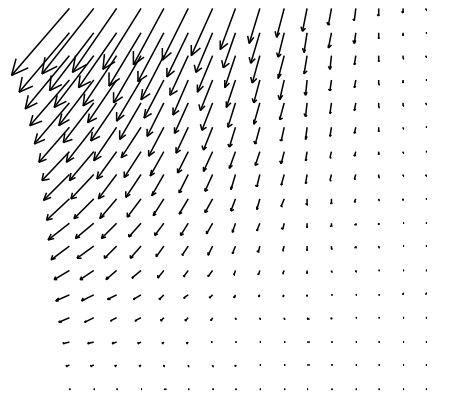


(f) *Zoom* du coin de droite, $t = 4s$.

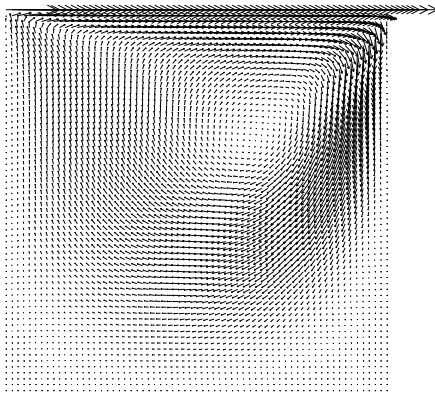
FIG. 7.13 – Cavité entrain e; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.



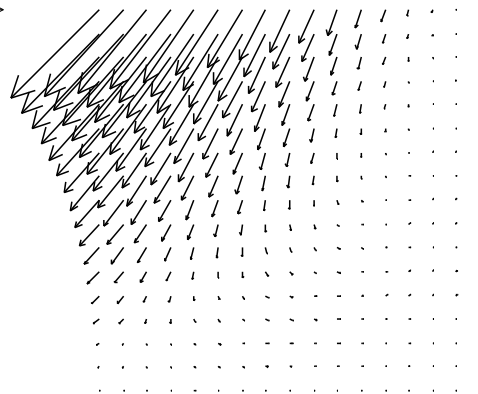
(a) Champ de vitesse, $t = 6s$.



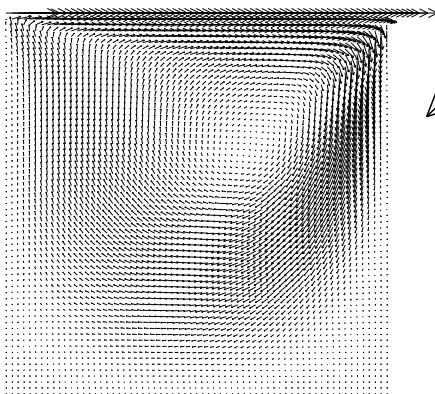
(b) *Zoom* du coin de droite, $t = 6s$.



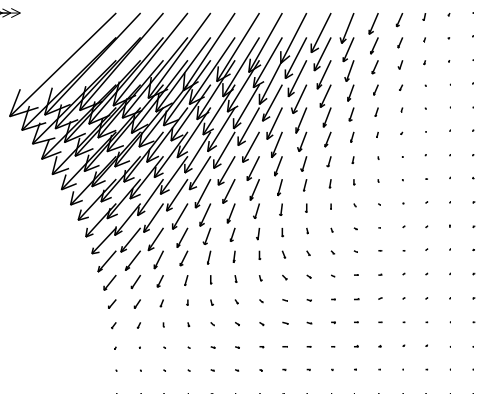
(c) Champ de vitesse, $t = 8s$.



(d) *Zoom* du coin de droite, $t = 8s$.



(e) Champ de vitesse, $t = 10s$.



(f) *Zoom* du coin de droite, $t = 10s$.

FIG. 7.14 – Cavité entrain e ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.

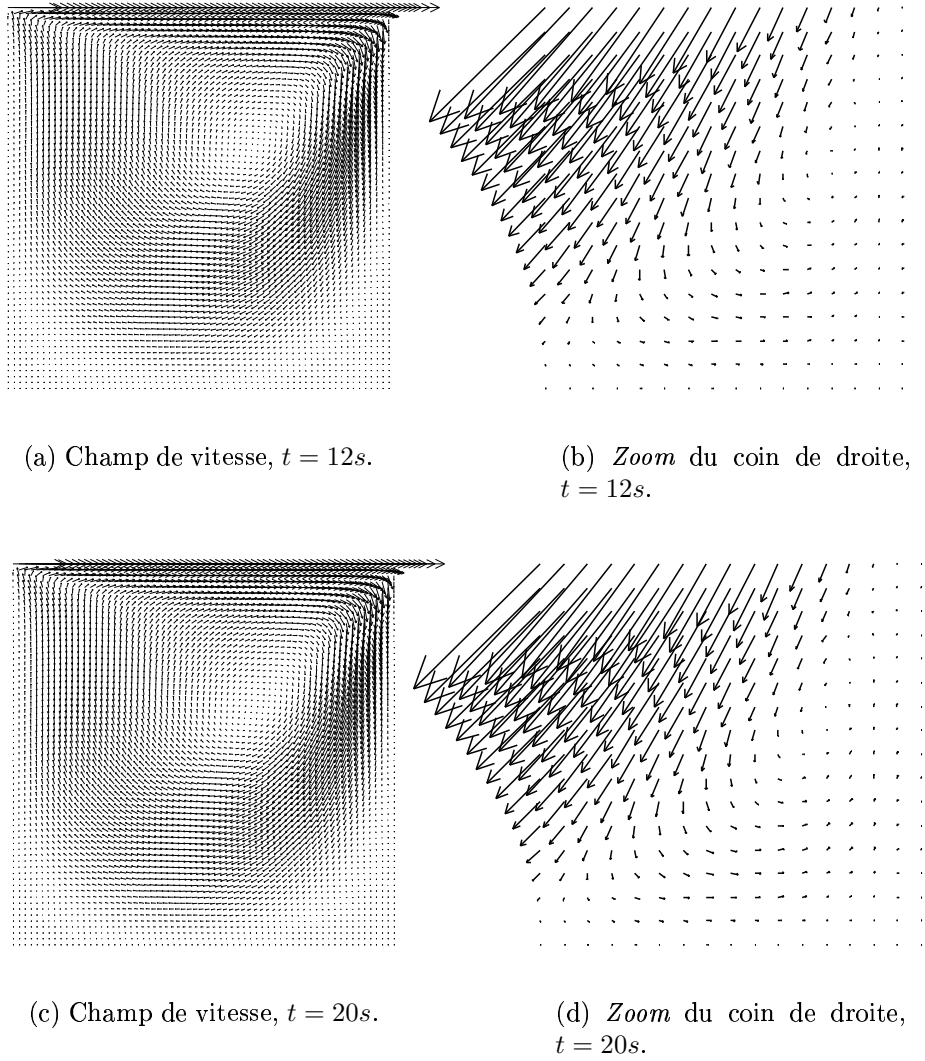


FIG. 7.15 – Cavité entrain e ; champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$.

7.4 Écoulement autour d'une sphère

Afin de valider le code, il est intéressant de comparer les résultats numériques, même qualitativement, avec les *benchmarks*. L'objectif des tests numériques de cette section est la simulation d'un écoulement tridimensionnel autour d'une sphère. Ce type d'écoulements n'a pas été aussi documenté que celui autour d'un cylindre. Néanmoins, dans la littérature récente, on peut trouver quelques résultats permettant de mieux comprendre ce phénomène (on peut par exemple voir T.A. JOHNSON *et al.* [41], D. KIM *et al.* [42], R. MITTAL [55], A. TOMBOULIDES & S. ORSZAG [79] et leur références bibliographiques).

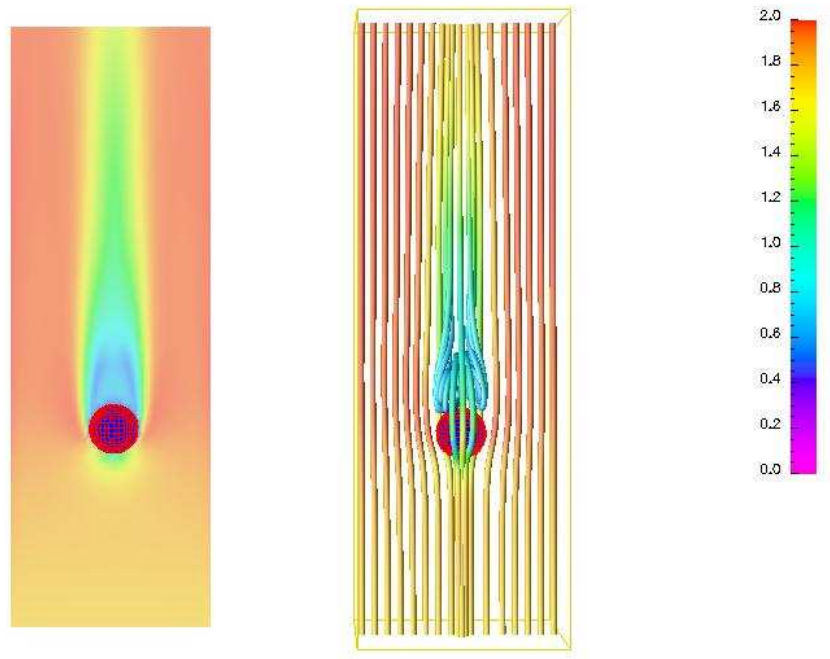
D'après les références susmentionnées, pour des nombres de REYNOLDS $Re \leq 270$, un écoulement laminaire atteint un régime stationnaire, et à partir d'un nombre de REYNOLDS supérieur à 300, l'écoulement a un comportement périodique qui peut être mis en évidence par des oscillations en aval de l'obstacle.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à ces deux régimes d'écoulements. Dans la première simulation, on considère le domaine parallélépipédique $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[\times]-1, 5[$ dans lequel il y a un obstacle sphérique B (de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 0.25). Les équations de NAVIER-STOKES sont discrétisées par les éléments finis $8Q^1/Q^1$ en utilisant la F.B.M. et le schéma de projection / Lagrange-Galerkin décrit dans le chapitre 6. Le pas de temps est $\delta t = 1.5 \times 10^{-2}$. Pour la discrétisation en espace, on a $65 \times 65 \times 129$ points de maillage. La vitesse et la viscosité sont telles que $Re \simeq 250$. On prend un profil constant à l'entrée (face $z = 1$), des conditions de NEUMANN homogènes en sortie (face $z = 5$) et vitesse normale nulle sur les parois.

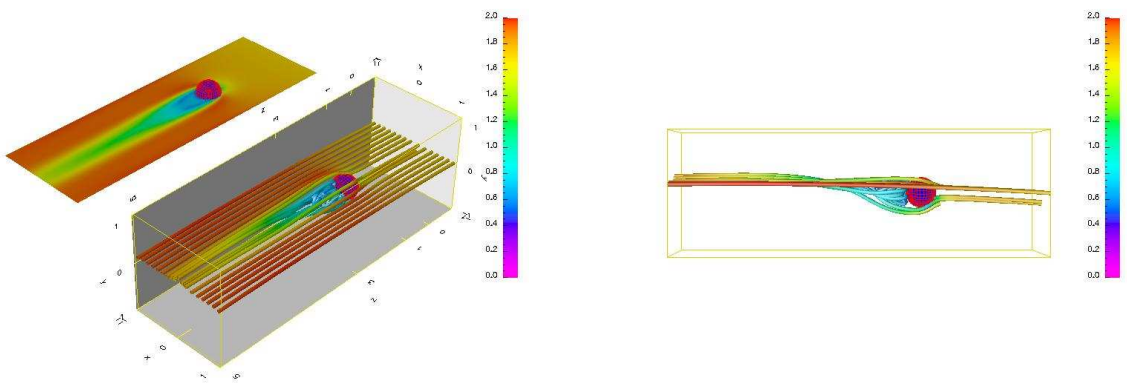
Comme l'écoulement est stationnaire, on présente une seule itération en temps correspondant à $t = 3s$. La figure 7.16 page 123 montre quelques lignes de courant et isosurfaces de la vitesse sur le plan de coupe $y = 0$. Ces lignes de courant sont choisies de sorte qu'elles montrent les zones de recirculation en aval de l'obstacle. Cette zone de tourbillon (en forme de tore) est mieux visible sur la figure 7.17 page 124. Le champ de vitesse est représenté sur la figure 7.18 page 125. Enfin, dans la dernière figure de cette simulation (la figure 7.19 page 126), on présente quelques isobares au même instant $t = 3s$.

Le deuxième exemple d'écoulement autour d'une sphère, à $Re \simeq 400$, correspond à un régime périodique. À présent le domaine de calcul est $\Omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, 5[$. L'obstacle considéré est la sphère de centre l'origine et de rayon 0,1. Le pas de temps est égal à 2×10^{-2} . Le maillage pour le champ de vitesse comporte $77 \times 77 \times 257$ points, et celui pour la pression comporte $39 \times 39 \times 129$ points. Sur les figures 7.20 et 7.21 des pages 127 et 128 sont représentées les isovaleurs du champ de vitesse sur les plans de coupe $x = 0$ et $y = 0$ et correspondant à $t = 6, 10, 14$ et $20s$. Pour réaliser cette simulation, mille itérations en temps ont été nécessaires. À titre indicatif, pour cette simulation à plus de quatre millions et demi de degrés de liberté, chaque itération en temps coûte quatre minutes en temps CPU⁹.

⁹Calcul fait sur *Hydre*, le *cluster* du Laboratoire Jacques-Louis LIONS.



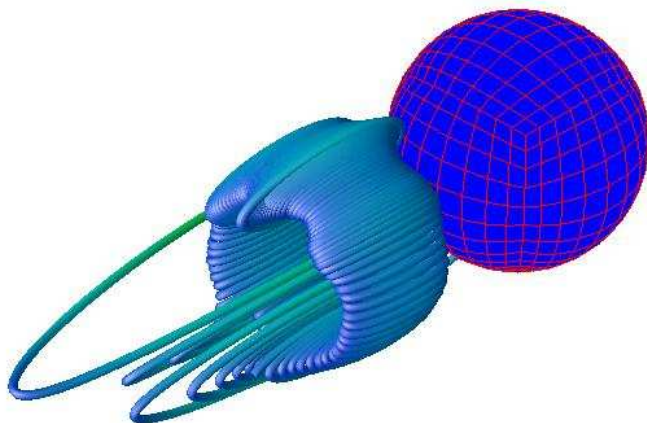
(a) Vue de face.



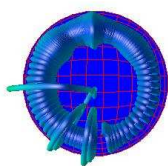
(b) Angle de vue diagonal.

(c) Vue de droite.

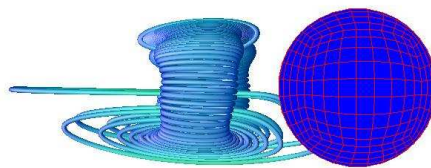
FIG. 7.16 – Lignes de courant et isovaleurs sur le plan $y = 0$ à $t = 3s$.



(a) Angle de vue diagonal.

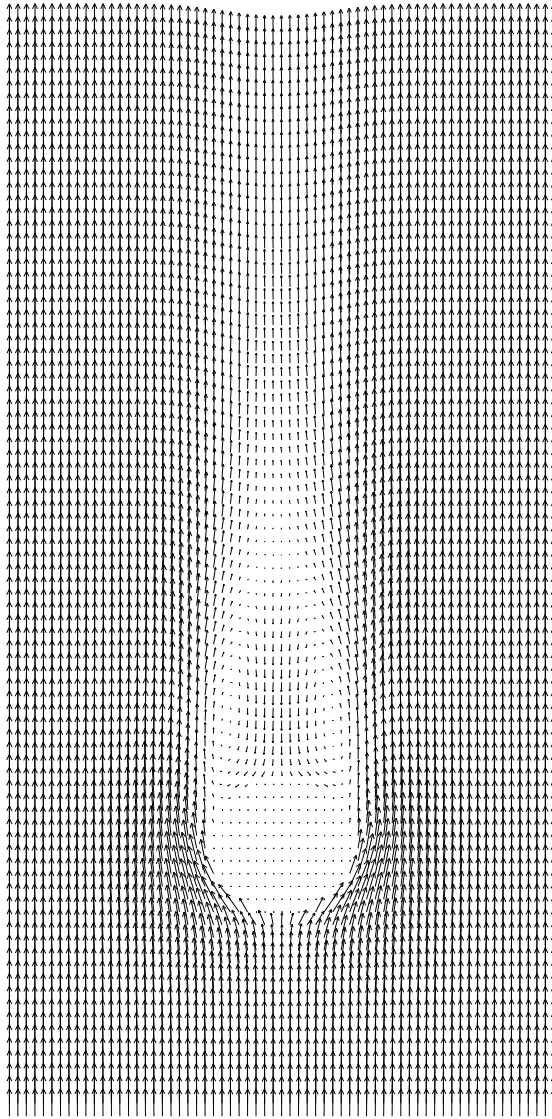


(b) Vue de face.

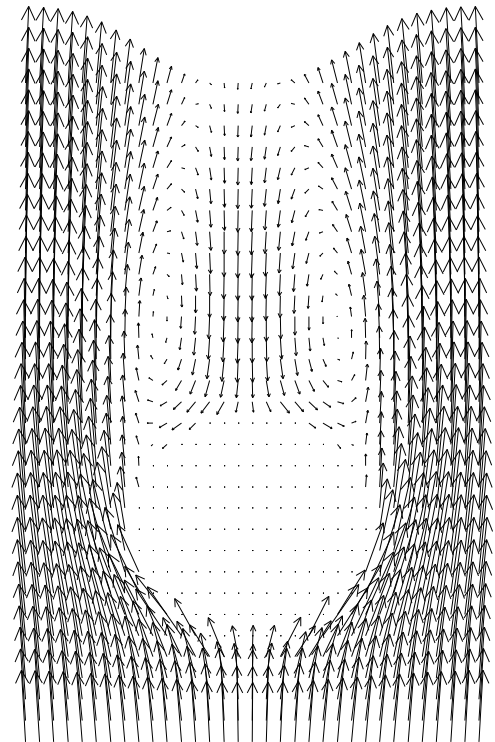


(c) Vue de droite.

FIG. 7.17 – Zone de recirculation.

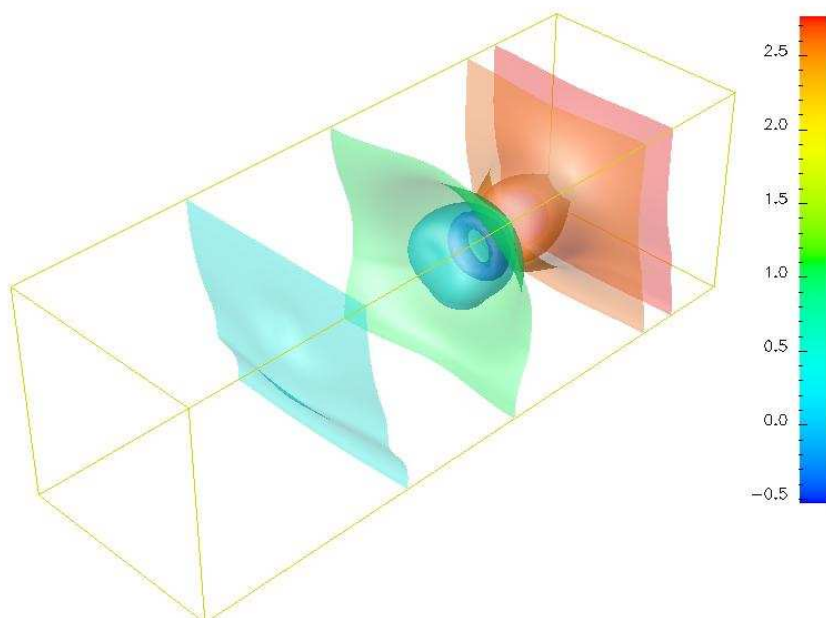


(a) Champ de vitesse sur le plan $y = 0$.

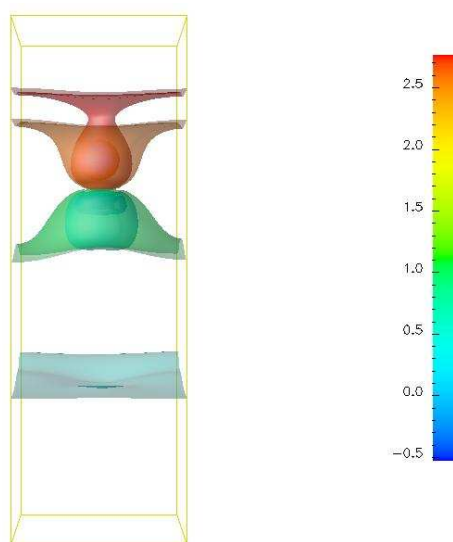


(b) *Zoom.*

FIG. 7.18 – Champ de vitesse à $t = 3s$; plan de coupe $y = 0$.

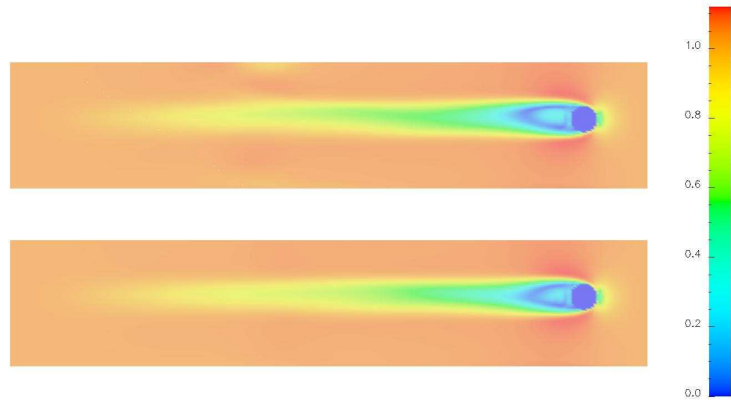


(a) Angle de vue diagonal.

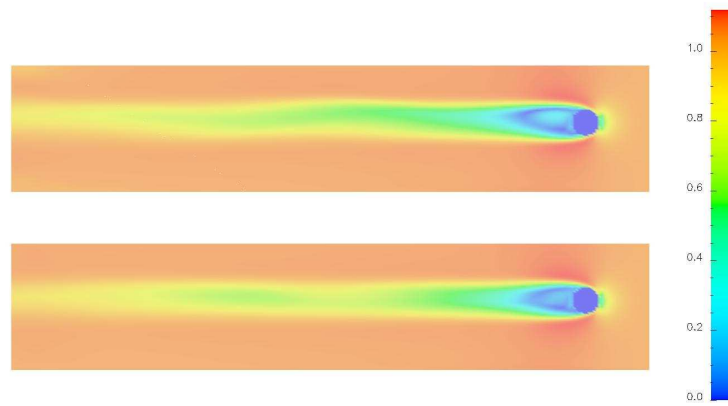


(b) Vue de face.

FIG. 7.19 – Isobares à $t = 3s$.

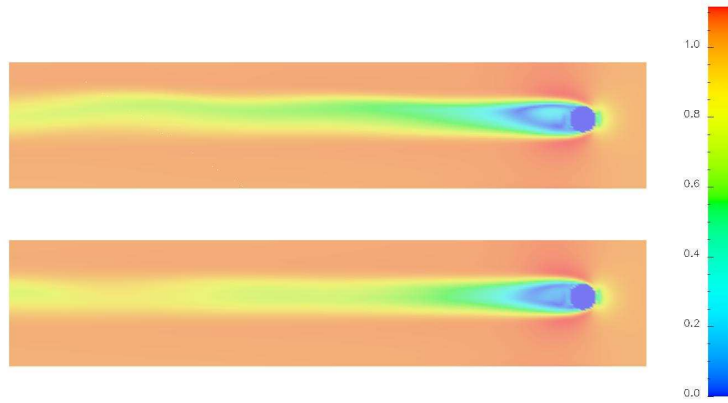


(a) $Re = 400$, $t = 6s$; plan supérieur $y = 0$, plan inférieur $x = 0$.

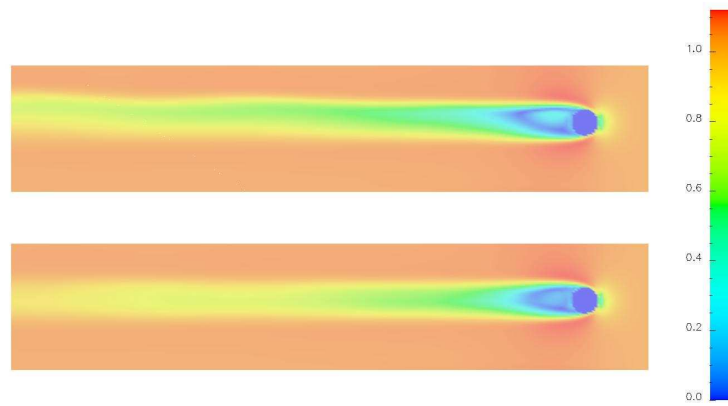


(b) $Re = 400$, $t = 10s$; plan supérieur $y = 0$, plan inférieur $x = 0$.

FIG. 7.20 – Isovaleurs de la vitesse sur les plan de coupe $x = 0$ et $y = 0$; $Re = 400$.



(a) $Re = 400$, $t = 14s$; plan supérieur $y = 0$, plan inférieur $x = 0$.



(b) $Re = 400$, $t = 20s$; plan supérieur $y = 0$, plan inférieur $x = 0$.

FIG. 7.21 – Isovaleurs de la vitesse sur les plan de coupe $x = 0$ et $y = 0$; $Re = 400$.

7.5 Écoulement dans un canal contenant deux obstacles sphériques

On considère le domaine parallélépipédique $\Omega =]-2, 2[\times]-2, 2[\times]-1, 11[$ dans lequel se trouvent deux obstacles sphériques de même rayon $R = 0.5$ et de centres respectifs $(-0.5, 0, 2)$ et $(0.5, 0, 5)$. En entrée du canal un profil de type POISEUILLE est imposé sur la vitesse :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z(x, y) \end{pmatrix}, \quad u_z(x, y) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)(y^2 - 4).$$

Les conditions sur les bords du canal sont des conditions de Dirichlet, $\mathbf{u} = 0$, tandis qu'en sortie du canal on impose les conditions suivantes sur la vitesse et la pression :

$$p = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Le pas de temps est $\delta t = 2 \times 10^{-2}$, et le maillage considéré est constitué de $65 \times 65 \times 193$ points. On considère deux simulations : la première correspond à un nombre de REYNOLDS $Re \simeq 10$, et la seconde à $Re \simeq 200$.

Pour la première simulation, la figure 7.22 page 130 présente le champ de vitesse dans une zone proche des deux obstacles à $t = 4s$. La figure 7.23 page 131 montre les isosurfaces et les isovaleurs (sur le plan de coupe $x = 0$) du module de la vitesse aux instants $t = 1, 2, 3$ et $4s$.

On refait la même expérience avec un nombre de REYNOLDS plus grand, de l'ordre de 200. Les résultats sont présentés de la même manière que ceux de la simulation précédente, et sont donnés par les figure 7.24 page 132 et 7.25 page 133 pour le champ de la vitesse sur un plan de coupe passant par les centres des boules, et les figures 7.26 page 134 et 7.27 page 135 pour les isosurfaces et les isovaleurs du module de la vitesse.

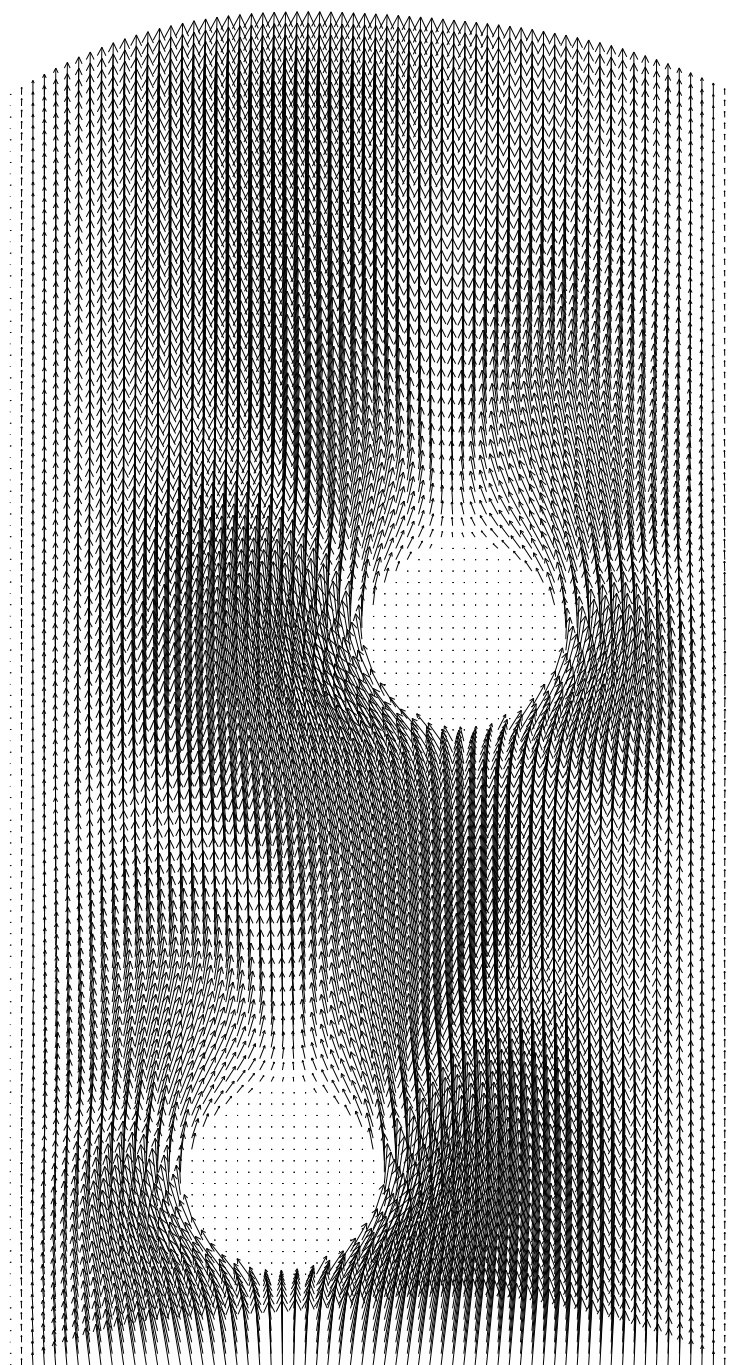


FIG. 7.22 – Champ de vitesse sur le plan de coupe $y = 0$ à $t = 4s$; $Re = 10$.

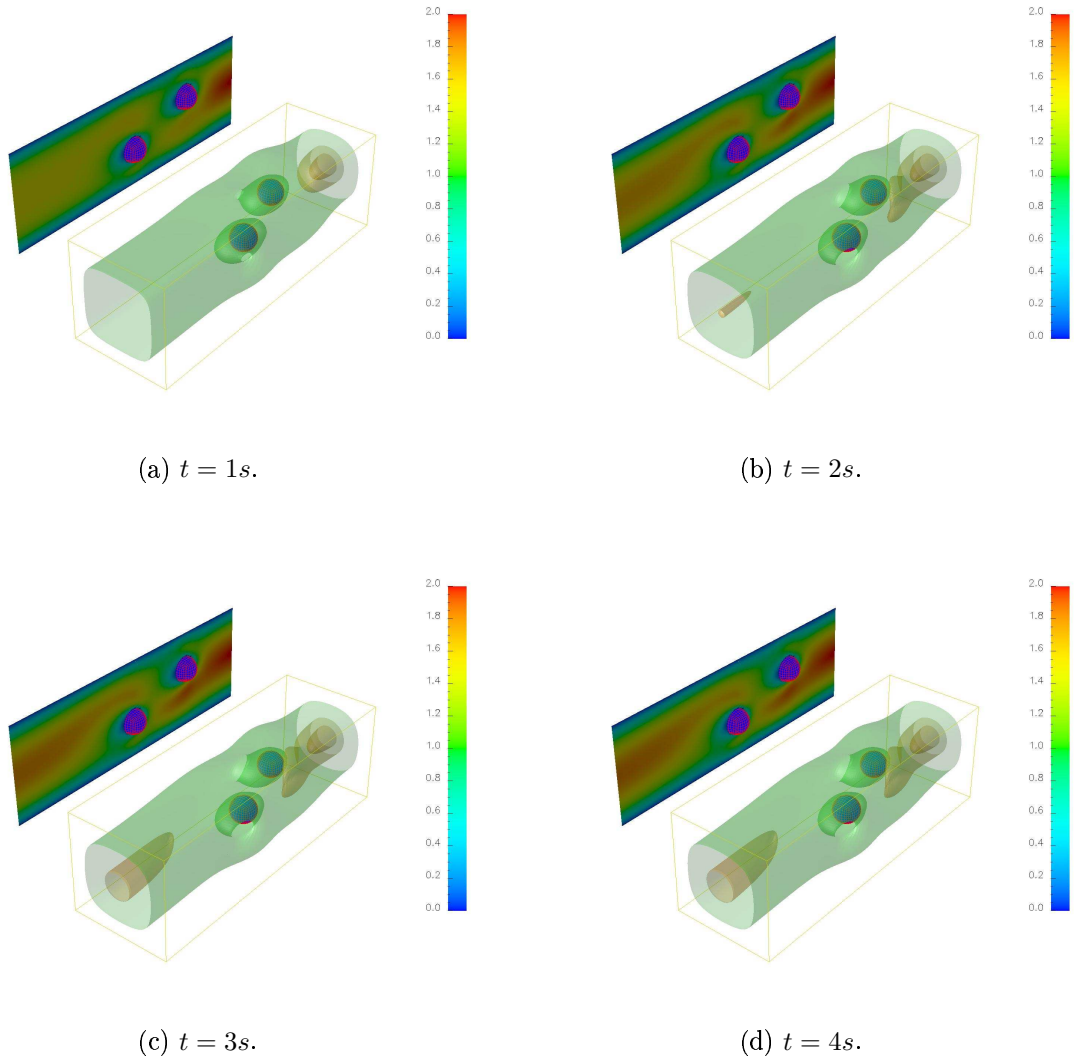
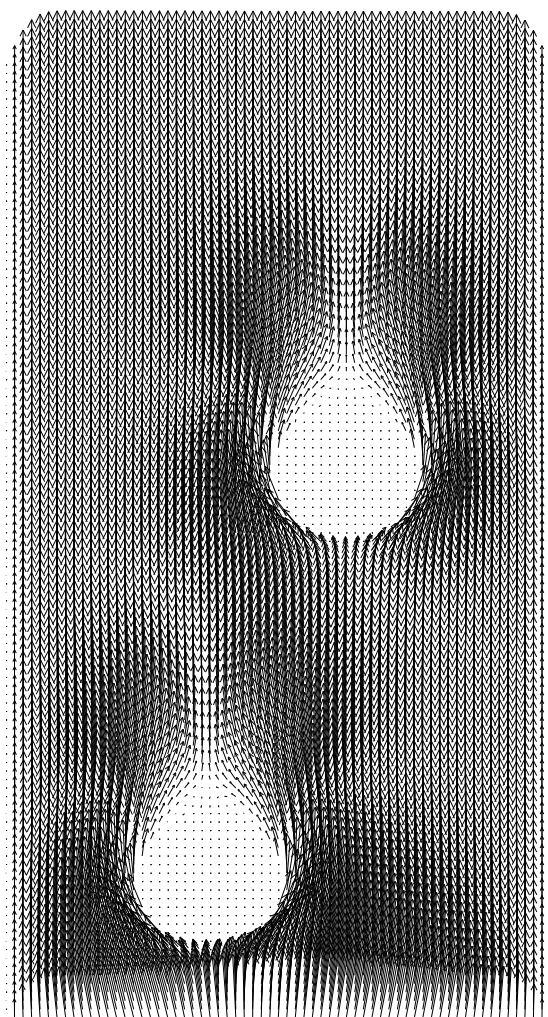
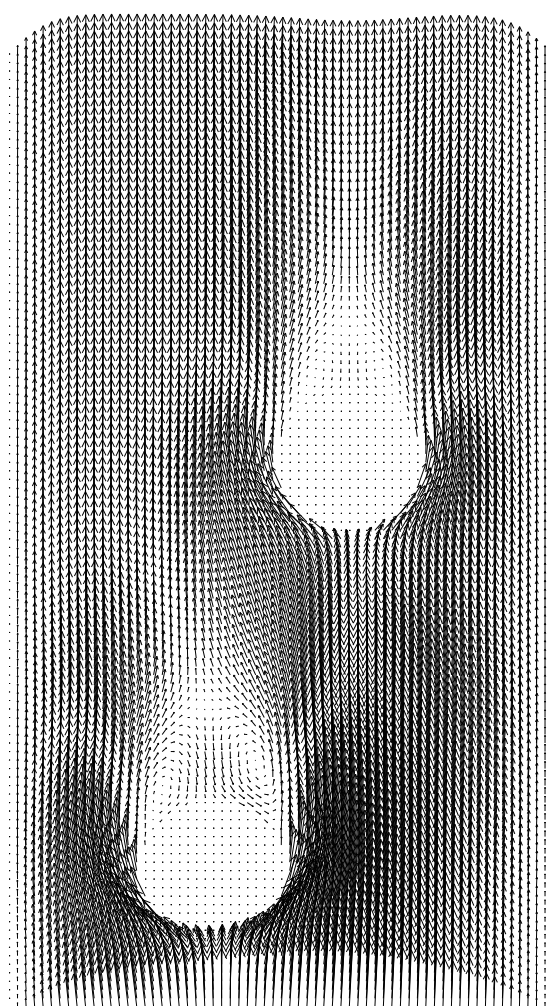


FIG. 7.23 – Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re = 10$.



(a) $t = 1s$.



(b) $t = 3s$.

FIG. 7.24 – Champ de vitesse au voisinage des boules pour $Re = 200$; plan de coupe $y = 0$.

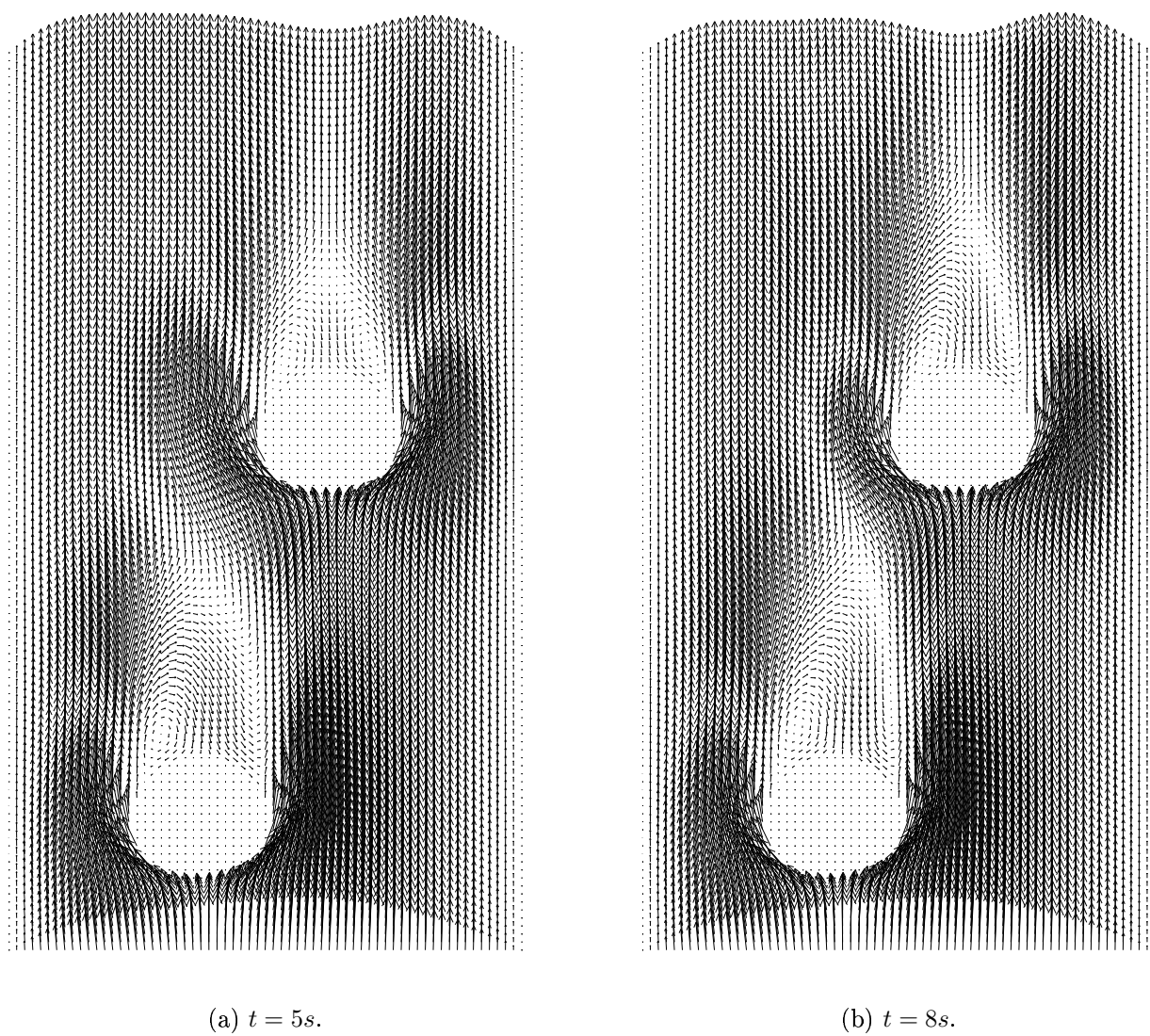


FIG. 7.25 – Champ de vitesse au voisinage des boules pour $Re = 200$; plan de coupe $y = 0$.

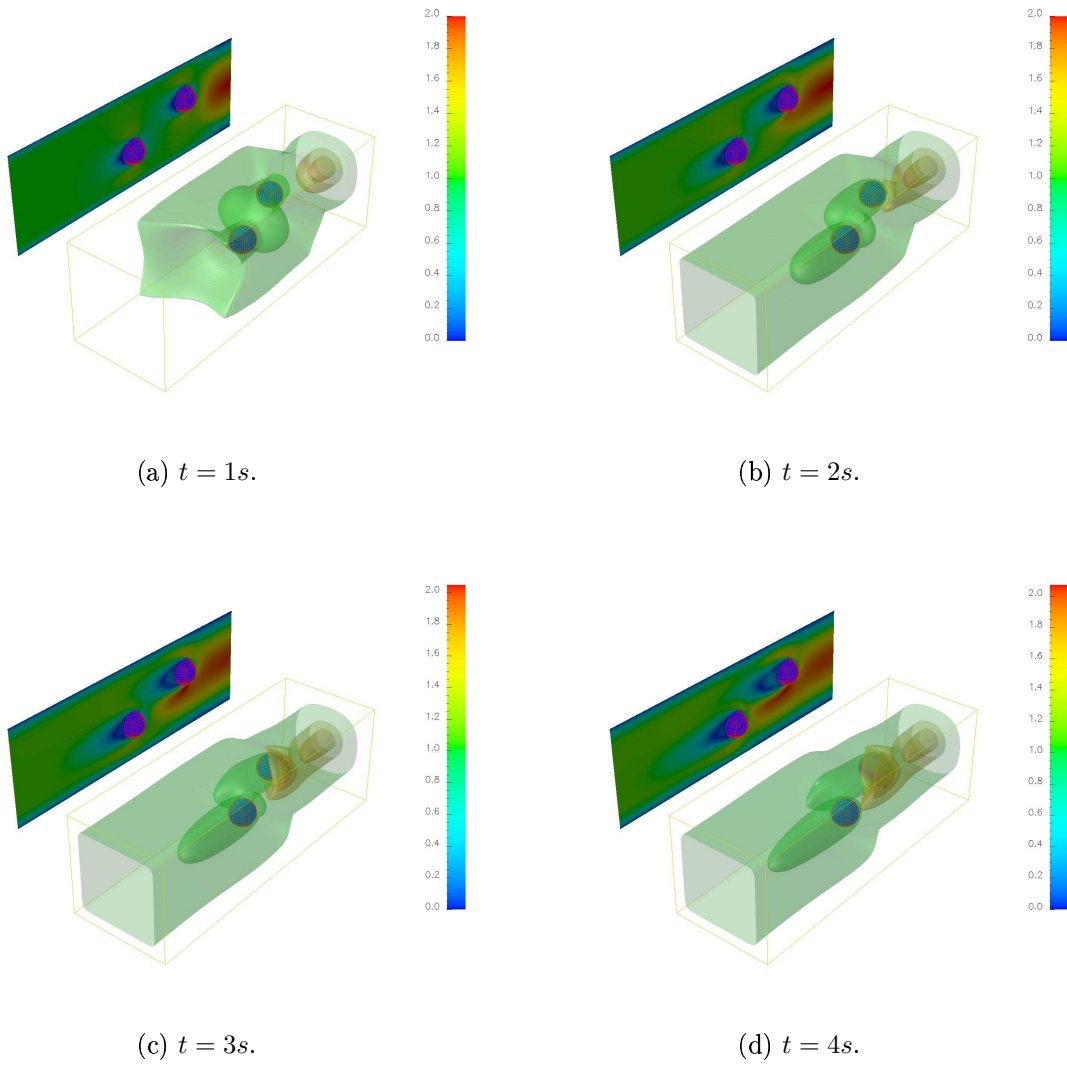


FIG. 7.26 – Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re = 200$.

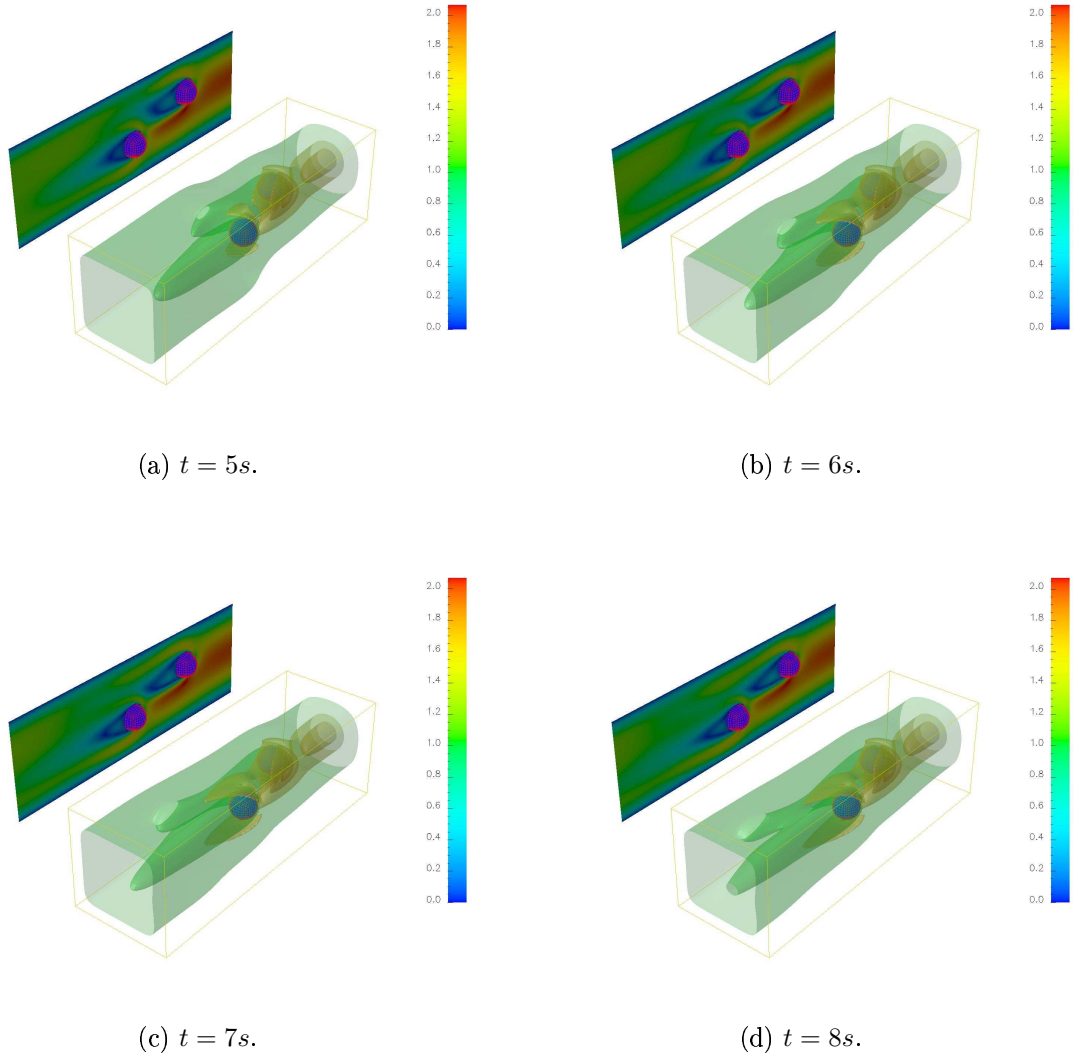


FIG. 7.27 – Isosurfaces et isovaleurs (plan $x = 0$) du module de la vitesse pour $Re = 200$.

7.6 Écoulement autour d'un nombre important de boules fixes

Le dernier test numérique du chapitre concerne la simulation numérique d'un écoulement en présence de plusieurs obstacles. Le domaine de calcul est $\Omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]-1, 1[$, dans lequel on met d'une manière « pseudo-aléatoire »¹⁰ soixante dix particules sphériques de même rayon $R = 0.08$. Le sens de l'écoulement est toujours parallèle à l'axe des z , avec un profil constant en entrée ($u_z = 1$), des conditions de sortie libre pour les trois composantes de la vitesse et des conditions de glissement sur les parois du canal sont considérées. Le pas de temps est $\delta t = 2 \times 10^{-2}$ et la grille vitesse/pression comporte $77 \times 77 \times 157$ points pour la vitesse et $39 \times 39 \times 79$ points pour la pression. Une itération coûte en moyenne 3.52 minutes en temps CPU.

Dans la figure 7.28 page 136 on présente quelques isosurfaces de la vitesse à l'instant $t = 12s$. Le champ de vitesse, au même instant, sur le plan de coupe $y = 0$ est présenté dans la figure 7.29 page 137.

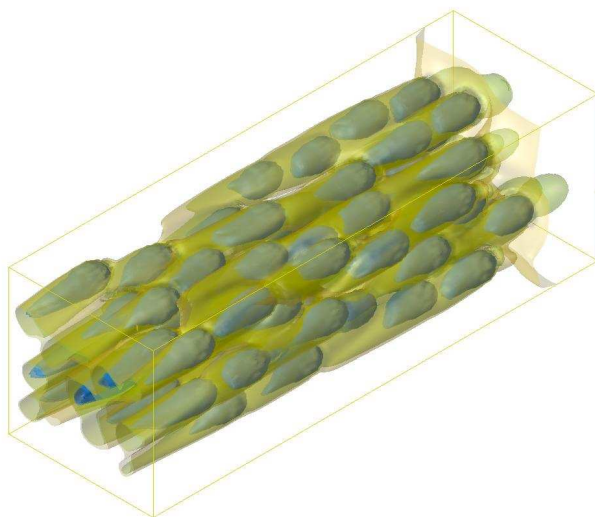


FIG. 7.28 – Isosurfaces de la vitesse à $t = 12s$.

¹⁰On utilise un générateur de nombres pseudo-aléatoires auquel on impose la contrainte que deux particules ne doivent pas se toucher.

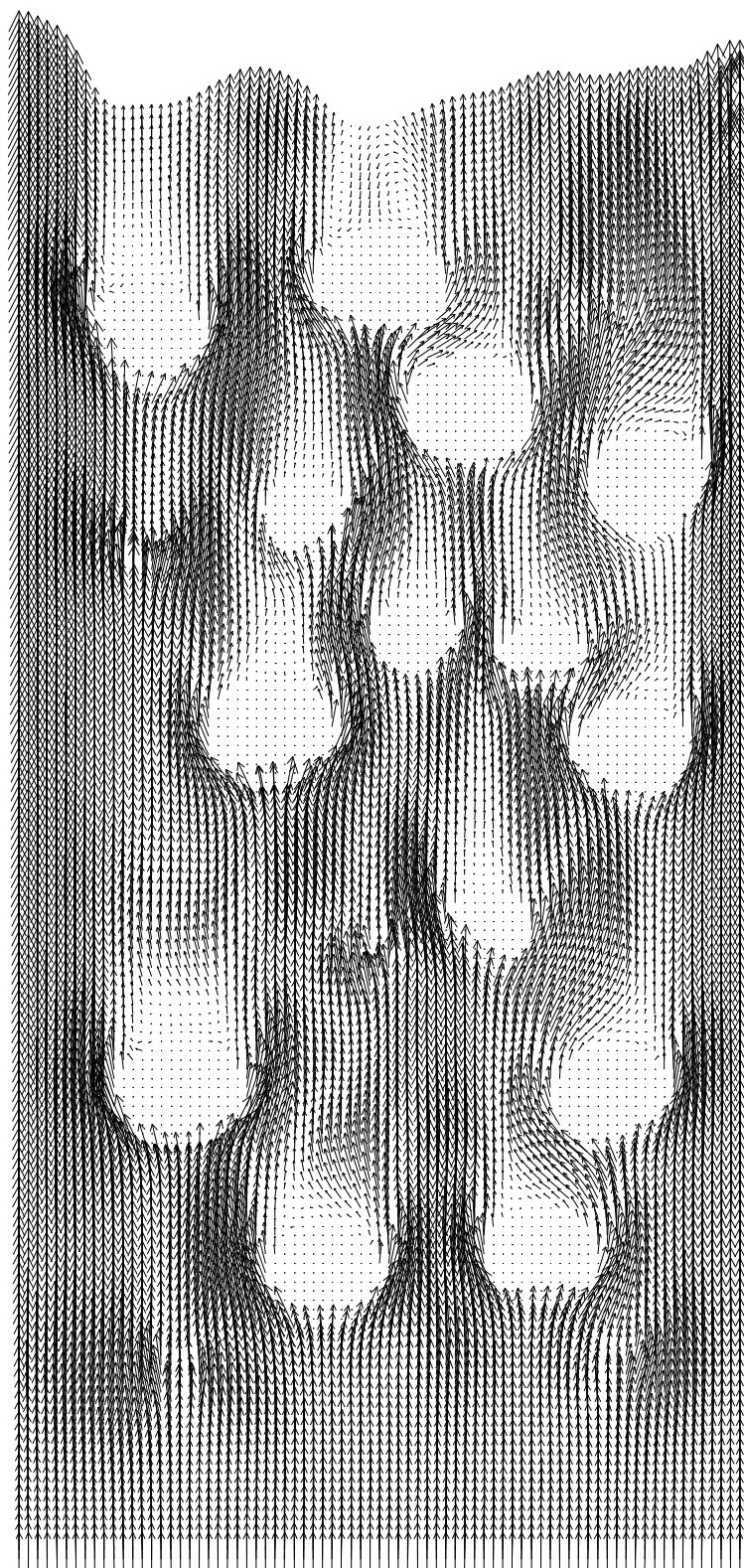


FIG. 7.29 – Champ de vitesse à $t = 12s$ sur le plan de coupe $y = 0$.

Remarque 7.1 *On a refait la même expérience en considérant d'abord une seule particule parmi les soixante-dix considérées précédemment, puis en ne gardant que dix particules, et enfin quarante particules. On a le résultat suivant :*

Nombre de particules	Coût d'une itération en temps
1	2.48 mn (CPU)
10	2.85 mn(CPU)
40	3.49 mn (CPU)
70	3.52 mn (CPU)

TAB. 7.1 – Temps CPU.

On peut alors remarquer qu'augmenter le nombre de particules n'a pas un grand impact sur le temps de calcul ; une affirmation qui reste à confirmer en effectuant des tests avec un très grand nombre de particules.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons développé de nouveaux outils basés sur la méthode de la frontière élargie (F.B.M.), permettant la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés en utilisant des solveurs rapides. Il s'agit d'une technique de décomposition de domaines avec recouvrement dont l'objectif est de remplacer le problème initialement posé dans le domaine perforé par un problème dans un domaine plus grand, de forme simple, permettant l'utilisation de maillages cartésiens, et en conséquence des solveurs rapides.

Les trous n'étant pas pris en compte explicitement par le maillage cartésien, il a fallu trouver un moyen pour imposer les conditions aux bords correspondants. Pour prendre en compte les conditions de type DIRICHLET aux bords des trous, une approche simplifiée de la F.B.M. a été développée. Celle-ci permet de remplacer la résolution locale au voisinage des trous par un calcul plus simple basé une approximation de la dérivée normale aux bords des trous.

Pour les conditions de type NEUMANN, nous avons proposé un algorithme itératif conduisant à la prise en compte de ces conditions en assemblant une « petite » matrice de rigidité dans le second membre.

Tous ces outils ont conduit au développement d'un code de calcul rapide permettant la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. En outre, en utilisant une méthode de projection, couplée avec la méthode des caractéristiques et les techniques susmentionnées, nous avons aussi développé un solveur rapide pour la simulation de la convection-diffusion de la chaleur en trois dimensions autour de particules fixes et mobiles.

Cette approche a été étendue à la simulation d'écoulements fluides tridimensionnels incompressibles autour d'obstacles de forme sphérique. Le code ainsi développé est peu sensible au nombre de particules (obstacles). En effet, le temps de calcul pour une centaine de particules par exemple, est pratiquement du même ordre que pour une seule particule¹¹. Pour la validation de ce code, plusieurs tests standards ont été fait. Une partie de ces résultats ont été présentés au 35^{ème} Congrès National d'Analyse Numérique ¹² (voir [40]). Quant au mouvement des particules dans le fluide, en l'état actuel, notre code de calcul ne tient compte que du mouvement imposé ; ces tests ont été fait dans le but de montrer que la F.B.M. est bien adaptée aux écoulements fluide-particules. À présent,

¹¹ À titre indicatif, une itération en temps lors d'une simulation d'écoulement d'un fluide incompressible tridimensionnel, avec un peu plus d'un million et demi de degrés de liberté pour la vitesse et près de deux cent milles pour la pression, coûte 2.48 minutes en temps CPU pour le cas d'une seule particule, 2.85 minutes pour les cas de dix particules et 3.52 minutes pour le cas de soixante-dix particules.

¹²CANUM 2003, La Grande Motte, France.

on a presque tous les outils nécessaires pour développer un module permettant la prise en compte des particules en mouvement libre dans le fluide. Il reste à estimer les forces hydrodynamiques. Cela fait l'objet de nos perspectives à très court terme.

D'un point de vue théorique, l'analyse mathématique de la F.B.M. n'est pas une tâche aisée, car plusieurs paramètres entrent en jeu. Dans un premier temps, on a séparé la résolution globale et la résolution locale. Ceci nous a permis alors de nous placer dans un cadre semi-discret, où l'on a supposé que la résolution locale est exacte. Ainsi, nous avons prouvé la convergence du schéma sous-jacent et établi une estimation d'erreur optimale. La preuve est un peu technique car elle est basée sur l'introduction d'un problème auxiliaire et l'utilisation des estimations intérieures obtenues grâce au théorème de NITSCHKE et SCHATZ [57]. Les estimations théoriques ainsi obtenues sont confirmées par des tests numériques. Une partie de ce travail a été présentée au 15^{ème} congrès international sur les méthodes de décomposition de domaines¹³ et paraîtra dans [8]. Le cas de l'estimation de l'erreur totale (qui prend en compte les discrétisations globale et locale) fait l'objet d'un travail en cours, cela aussi dans le cadre de la collaboration avec S. BERTOLUZZA.

¹³15th International Conference on Domain Decomposition Methods Freie Universität Berlin (FUB) - July 21-25, 2003

Annexes

Annexe A

Quelques rappels utiles

Sommaire

A.1	Formule de quadrature de Gauss-Legendre	144
A.2	Formulaire	145
A.3	Inégalité de Cauchy	145

A.1 Formule de quadrature de Gauss-Legendre

On a la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n_q} w_i f(x_i), \quad (\text{A.1})$$

où, les nœuds x_i sont les zéros du polynôme de LEGENDRE¹⁴ P_{n_q} et les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{2}{n_q P'_{n_q}(x_i) P_{n_q-1}(x_i)}. \quad (\text{A.2})$$

Le tableau A.1 donne les valeurs des x_i et w_i pour n_q variant de 2 à 5.

n_q	x_i	w_i
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$-\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{8}$
	0	$\frac{9}{8}$
	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{8}$
4	$-\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
	$-\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$
	$\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
	$\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$
5	$-\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$
	$-\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$
	0	$\frac{128}{225}$
	$\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$
	$\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$

TAB. A.1 – Abscisses des points de quadrature et leurs poids correspondants.

Remarque A.2 La formule de quadrature susmentionnée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $(2n_q - 1)$.

Par tensorisation :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_{i,j,k=1}^{n_q} w_i w_j w_k f(x_i, y_j, z_k). \quad (\text{A.3})$$

Cette formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré, par rapport à chaque variable, inférieur ou égal à $(2n_q - 1)$.

¹⁴ $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$.

A.2 Formulaire

Pour un champ scalaire a et deux champs vectoriels $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, on a

$$\nabla a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times (\nabla a) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla a \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times (a\mathbf{u}) = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla a \times \mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Inégalité de Cauchy

Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \quad (\text{A.12})$$

En effet,

$$ab = (\sqrt{2\varepsilon}a)\left(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) \leq \frac{1}{2}[(\sqrt{2\varepsilon}a)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^2].$$

Annexe B

L'élément fini Q^1

Sommaire

B.1	Transformations de coordonnées	149
B.2	Intégration numérique sur l'élément de référence	149
B.3	Matrices de rigidité et de masse	149

L'élément fini Q^1 en dimension trois est construit sur des hexaédres. Ses degrés de liberté sont définis aux sommets. On a choisit comme élément de référence le cube $\hat{Q} = [-1, 1]^3$. Ce dernier est représenté par la figure B.1, où l'on a noté :

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= (-1, -1, -1), & \hat{a}_2 &= (1, -1, -1), & \hat{a}_3 &= (1, 1, -1), & \hat{a}_4 &= (-1, 1, -1), \\ \hat{a}_5 &= (-1, -1, 1), & \hat{a}_6 &= (1, -1, 1), & \hat{a}_7 &= (1, 1, 1), & \hat{a}_8 &= (-1, 1, 1). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

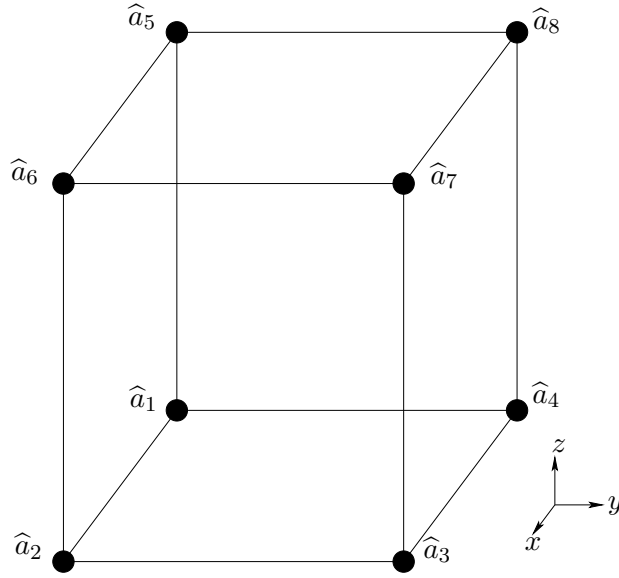


FIG. B.1 – L'élément de référence $\hat{Q}$.

Les fonctions de base $\hat{\varphi}_i$ sont définies de la manière suivante :

$$\hat{\varphi}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, 8\}, \quad (\text{B.2})$$

où les $\hat{a}_j$ sont les sommets de $\hat{Q}$ et δ_{ij} le symbole de KRONECKER.

Si on note (η, ξ, ζ) un système de coordonnées locales relatif à l'élément de référence $\hat{Q}$, les fonctions de base $\hat{\varphi}_i$ sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{\varphi}_1(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 - \xi)(1 - \zeta), \quad \hat{\varphi}_2(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(1 - \xi)(1 - \zeta), \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{\varphi}_3(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi + 1)(1 - \zeta), \quad \hat{\varphi}_4(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \eta)(\xi + 1)(1 - \zeta), \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{\varphi}_5(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \eta)(1 - \xi)(\zeta + 1), \quad \hat{\varphi}_6(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(1 - \xi)(\zeta + 1), \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\varphi}_7(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi + 1)(\zeta + 1), \quad \hat{\varphi}_8(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \eta)(\xi + 1)(\zeta + 1). \quad (\text{B.6})$$

B.1 Transformations de coordonnées

Dans des éléments finis Q^1 en maillage cartésien, la transformation J de l'élément de référence $\widehat{\mathcal{Q}} = [-1, 1]^3$ vers l'élément $\mathcal{Q} = [x_{a_1}, x_{a_7}] \times [y_{a_1}, y_{a_7}] \times [z_{a_1}, z_{a_7}]$ est donnée par cette expression :

$$J : (\eta, \xi, \zeta) \in \widehat{\mathcal{Q}} \longmapsto (x, y, z) \in \mathcal{Q}, \quad (\text{B.7})$$

où,

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_{a_7} - x_{a_1}}{2} \eta + \frac{x_{a_1} + x_{a_7}}{2}, \frac{y_{a_7} - y_{a_1}}{2} \xi + \frac{y_{a_1} + y_{a_7}}{2}, \frac{z_{a_7} - z_{a_1}}{2} \zeta + \frac{z_{a_1} + z_{a_7}}{2} \right). \quad (\text{B.8})$$

Son jacobien $|J|$ est donc le suivant :

$$|J| = \frac{1}{8} (x_{a_7} - x_{a_1}) (y_{a_7} - y_{a_1}) (z_{a_7} - z_{a_1}). \quad (\text{B.9})$$

B.2 Intégration numérique sur l'élément de référence

L'intégration sur l'élément $\mathcal{Q}$ est effectuée par la transformation sur l'élément de référence $\widehat{\mathcal{Q}}$. Plus précisément,

$$\int_{\mathcal{Q}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\widehat{\mathcal{Q}}} f(J(\eta, \xi, \zeta)) |J| d\eta d\xi d\zeta. \quad (\text{B.10})$$

Cette dernière intégrale est approché par l'une des formules de quadrature de GAUSS-LEGENDRE présentées dans l'annexe A. On a alors :

$$\int_{\mathcal{Q}} f(x, y, z) dx dy dz \approx |J| \sum_{i,j,k=1}^{n_q} w_i w_j w_k f(J(\eta_i, \xi_j, \zeta_k)), \quad (\text{B.11})$$

où, n_q est le nombre de point de quadrature dans chacune des trois directions, les (η_i, ξ_i, ζ_i) sont les points de quadrature et les w_i les poids correspondants.

B.3 Matrices de rigidité et de masse

Les coefficients de la matrice de rigidité $A = (a_{ij})$ et de la matrice de masse $M = (m_{ij})$ sont respectivement donnés par ces expressions :

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j, \quad m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j, \quad (\text{B.12})$$

où φ_i est la fonction de base associée au sommet numéro i du maillage Ξ . Généralement, ces intégrales sont évaluées, en utilisant la formule de quadrature (B.11), seulement sur les éléments inclus dans l'intersection des supports de φ_i et φ_j .

En ce qui nous concerne, on ne calcule pas ces intégrales. En effet, on utilise la structure tensorielle du maillage. Ce dernier est perçu comme une tensorisation des maillages

unidimensionnels de chacun des trois axes. Il suffit alors d'utiliser les expressions des matrices de rigidité et de masse correspondants à un maillage en $1D$. Si on note A_x , A_y et A_z (respectivement M_x , M_y et M_z) les matrices de rigidité (respectivement les matrices de masse) correspondants au maillage des trois axes, on a :

$$A = A_x \otimes M_y \otimes M_z + M_x \otimes A_y \otimes M_z + M_x \otimes M_y \otimes A_z, \quad (\text{B.13})$$

et

$$M = M_x \otimes M_y \otimes M_z, \quad (\text{B.14})$$

où, le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel de matrices, définie par : pour tous entiers strictement positifs m , n , k et l . Pour toutes matrices $R = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ et $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$R \otimes S := \begin{pmatrix} s_{11}R & \dots & s_{1n}R \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{m1}R & \dots & s_{mn}R \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{km,ln}(\mathbb{R}). \quad (\text{B.15})$$

Annexe C

Rappels de géométrie

Sommaire

C.1	Angles d'Euler	152
C.2	Polygones sphériques	153

C.1 Angles d'Euler

On peut décrire le mouvement d'un solide à l'aide de la position de son centre d'inertie et de trois angles qui définissent

l'orientation des axes du repère mobile $\mathcal{R}' = (x', y', z')$ - lié au solide - relativement au repère fixe $\mathcal{R} = (x, y, z)$. Pour ces angles, il apparaît souvent commode d'utiliser les **angles d'Euler**. On trouvera plus de détails sur les angles d'Eulers dans [48].

Pour simplifier la présentation, on peut supposer que les deux repères ont la même origine O (cf. figure C.1). Le plan mobile $(x'Oy')$ coupe le plan fixe (xOy) suivant une droite $((O\xi))$ sur la figure C.1) appelée *ligne nodale*. Prenons comme grandeurs définissant la position des axes x', y', z' par rapport aux axes x, y, z les angles suivants : l'angle ϕ entre les axes x et ξ , l'angle β entre les axes z et z' , et l'angle ψ entre les axes ξ et x' . L'angle β prend les valeurs de 0 à π et les angles ϕ et ψ de 0 à 2π .¹⁵

Le passage du repère $\mathcal{R} = (x, y, z)$ au repère $\mathcal{R}' = (x', y', z')$ s'effectue en trois étapes (voir figure C.1) :

- *précession* : la rotation d'angle ϕ autour de z : $(x, y, z) \longrightarrow (\xi, \eta, \zeta = z)$,
- *nutation* : la rotation d'angle β autour de ξ : $(\xi, \eta, \zeta) \longrightarrow (\xi' = \xi, \eta', \zeta')$,
- *rotation propre* : la rotation d'angle ψ autour de ζ' : $(\xi', \eta', \zeta') \longrightarrow (x', y', z' = \zeta')$.

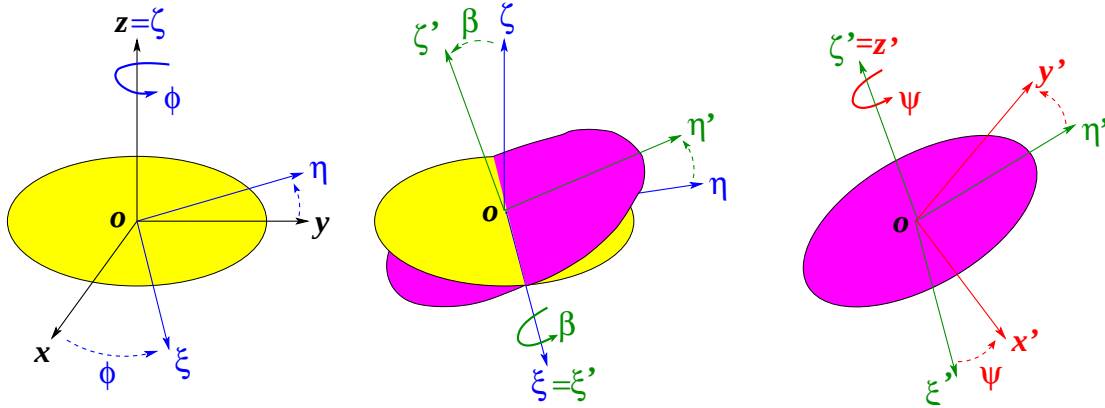


FIG. C.1 – Les angles d'Euler.

En composant ces trois rotations élémentaires, l'expression générale de la matrice de rotation $\mathcal{M}_{\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \beta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \beta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \beta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \beta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \beta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \beta \\ \sin \beta \sin \phi & -\sin \beta \cos \phi & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Dans la suite on note par Θ le vecteur dont les composantes sont les trois angles d'Euler ($\Theta = (\phi, \beta, \psi)$). Exprimons maintenant les composantes du vecteur vitesse angulaire

¹⁵Les angles β et $\phi - \frac{\pi}{2}$ sont respectivement l'angle polaire et l'azimut de la direction z' par rapport aux axes x, y, z .

$\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ sur les axes mobiles x', y', z' en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées. Il faut pour cela projeter sur ces axes les vitesses angulaires $\dot{\phi}, \dot{\beta}, \dot{\psi}$. La vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est dirigée suivant l'axe z et ses composantes sur les axes x', y', z' sont

$$\dot{\phi} \sin \beta \sin \psi, \quad \dot{\phi} \sin \beta \cos \psi, \quad \dot{\phi} \cos \beta. \quad (\text{C.2})$$

La vitesse angulaire $\dot{\beta}$ est dirigée suivant la ligne nodale ($o\xi$) ; ses projections sur les axes x', y', z' sont

$$\dot{\beta} \cos \psi, \quad -\dot{\beta} \sin \psi, \quad 0. \quad (\text{C.3})$$

Enfin, la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est dirigée suivant l'axe z' .

Réunissant toutes ces composantes suivant chacun des axes, on obtient finalement

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \beta \sin \psi + \dot{\beta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \beta \cos \psi - \dot{\beta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \beta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

C.2 Polygones sphériques

On considère une sphère de centre l'origine et de rayon R . Soient A, B et C trois points de cette sphère. L'angle sphérique $\widehat{ABC}$ (voir figure C.2) est défini par cette expression :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\|}. \quad (\text{C.5})$$

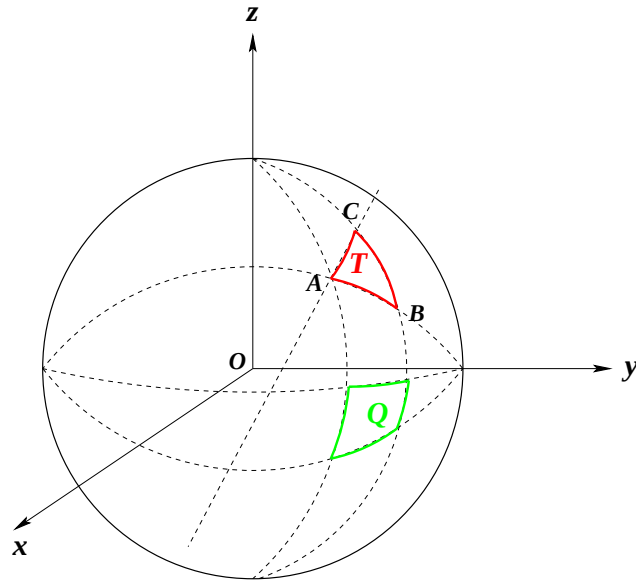


FIG. C.2 – Polygones sphériques.

L'aire d'un triangle sphérique T , est donnée par :

$$Aire(T) = R^2 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi \right), \quad (C.6)$$

où, R est le rayon de la sphère et les α_i sont les trois angles (sphériques) définissants T .

De même, l'aire d'un quadrangle sphérique Q , est défini par :

$$Aire(Q) = R^2 \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi \right). \quad (C.7)$$

Et d'une manière générale, si Q désigne un polygone sphérique à n côtés, son aire est donnée par cette expression :

$$Aire(Q) = R^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \right). \quad (C.8)$$

Index

A

adaptatif (Maillage —), 13
 adhérence (Conditions d' —), 101
 Aires sphériques, 153
 ALE, 99
 Angle de nutation, 101, 152
 Angle de précession, 101, 152
 Angle de rotation propre, 101, 152
 Angles d'Euler, 101, 152
 Angles sphériques, 67, 153
 angulaire (Vitesse —), 101
 asymptotique (Développement —), 65
 Aubin-Nitsche (Argument de dualité d'—),
 49

B

base (Fonctions de —), 55, 67, 77, 82
 BEM (Méthode d'éléments frontières), 21,
 22
 Benchmark, 8, 104, 122
 bi-gradient conjugué (Algorithme de —), 17

C

caractéristiques (Méthode des —), 5, 95, 96,
 98
 cartésien (Maillage —), 7, 14, 15
 Cauchy (Inégalité de —), 49, 145
 Cauchy-Schwarz (Inégalité de —), 33, 81
 Cavité entraînée, 104, 109
 Cholesky, 62
 Conductivité, 105
 conformes (Éléments finis —), 13
 contraintes (Tenseur des —), 100
 Convection-diffusion, 5, 96, 104, 106
 Coordonnées sphériques, 64
 courant (Fonction de —), 22

CPU, 106, 122, 136, 138, 139
 Cut-off (fonction —), 43
 cylindre (Écoulement autour d'un —), 20

D

déformations (Tenseur des —), 101
 Densité d'un fluide, 100
 différences finies (Méthode des —), 14, 18,
 65
 Dirac (Mesure de —), 14, 30
 Dirichlet (Conditions de —), 12, 18, 34, 110
 domaine fictif algébrique (Méthode de —),
 18
 domaines fictifs (Méthodes de —), 15, 100
 dualité (Produit de —), 17, 28, 32

E

EDO (Équations Différentielles Ordinaires),
 66, 95
 elliptiques (Problèmes —), 23, 99

F

FFT, 64, 65
 Fluide parfait, 104
 Fluide visqueux, 22
 Fluide-particules, 99
 fluide-particules (Interaction —), 99
 fluide-structure (Interaction —), 6, 14
 Formules de quadrature, 34, 67, 82, 144
 Fourier (Conditions aux limites de —), 18
 Fourier (Séries de —), 65
 FreeFEM3D, 18

G

Galerkin (Projection de —), 43, 44

Gauss-Legendre (Quadrature de —), 77, 144, 149
 Green (Formule de —), 29
 Grille ($8Q^1/Q^1$), 99
 Grille (cartésienne), 54

H

harmonique (Fonction —), 43
 harmonique (Relèvement —), 34
 Harmoniques sphériques, 20, 64, 65
 Helmholtz (Équation de —), 12, 19
 Helmholtz (Problème de —), 99
 Hexaèdres, 52, 54, 62, 67, 82, 148
 Homothétie, 63
 hydrodynamique (Force —), 99, 100, 140

I

immergée (Méthode de l'interface —), 23
 immergée (Méthode de la frontière —), 14
 incompressibilité (Contrainte d'—), 18
 incompressible (Fluide —), 94
 inertie (Centre d' —), 152
 inertie (Tenseur d'—), 101
 Intégration numérique, 67
 inverse (Inégalité —), 43
 Isobares, 110, 122
 Isosurfaces, 107, 110, 122, 129, 136
 Isovaleurs, 84, 122, 129

J

Jacobien, 149

K

Kronecker (Symbole de —), 148

L

Lagrange (Mutiplicateurs de —), 16, 17
 Lagrange-Galerkin (Schéma de projection —), 96, 122
 laminaire (Écoulement —), 122
 Laplace (Équation de —), 21, 66
 Laplacien (en coordonnées sphériques), 65
 Lax-Milgram (Théorème de —), 13

Legendre (Polynômes de —), 64, 144
 Lignes de courant, 110, 122
 LU, 62

M

Méthode de la frontière élargie (The Fat Boundary Method), 26
 masse (Centre de —), 101
 masse (Matrice de —), 55, 62, 149
 mobile (Domaine —), 94

N

Navier-Stokes (Équations de —), 18, 20, 94, 96, 98, 100, 104, 122
 Neumann (Conditions de —), 7, 12, 80, 98, 99, 104, 110, 122
 Newton (Loi de —), 101
 Newton-Euler (Équations de —), 101
 newtonien (Fluide —), 94, 100, 101
 Nitsche et Schatz (Théorème de —), 42, 44, 74, 75
 non-glissement (Condition de —), 22, 101
 non-pénétration (Condition de —), 22
 Noyau (du potentiel de simple couche), 21

O

Octree, 82
 Ondelettes, 18

P

pénalisation (Méthode de domaines fictifs avec —), 18
 pénalisation (Technique de —), 18
 paraboliques (Problèmes —), 23
 particulière (Écoulement —), 99
 particulière (Dérivée), 95
 perforé (Domaine —), 12, 94, 99
 Physalis, 19
 point fixe (Algorithme de —), 52
 point fixe (Formulation de —), 35
 Poiseuille (Profil de —), 129
 Poisson (Équation de —), 12, 22, 23
 Poisson (Problème de —), 42, 99, 110

Polygones sphériques, 153
 potentiel (Champ de vitesse —), 104, 106
 Potentiel (de simple couche), 21
 potentiels (Écoulements —), 20
 projection (Méthodes de —), 5, 96, 98
 PSCR, 57, 82

Q

Quadrangles, 62, 67
 Quadrangles sphériques, 67, 153

R

Raffinement, 82
 Rayon spectral, 39
 Reynolds (Nombre de —), 104, 109, 122, 129
 rigidité (Matrice de —), 55, 62, 149

S

séparable (Matrice —), 55
 Schwarz (Itérations de —), 21
 Sobolev (Espaces de —), 1
 spectrales (Méthodes —), 18, 64, 65
 splitting (Schéma de —), 97
 Stokes (Écoulements de —), 20
 Stream function, 22
 structuré (Maillage —), 7, 14
 structuré (Maillage non —), 13

T

Taylor (Tourbillons de —), 109
 Taylor-Görtler (Tourbillons de —), 109
 tensoriel (Maillage), 54
 tensoriel (Produit —), 55, 150
 torsion (couple de —), 102
 totale (Dérivée —), 6, 95
 tourbillon (Formulation —), 22, 23
 trace (Théorèmes de —), 49, 74
 Triangles sphériques, 153

U

Uzawa (Méthodes d'—), 17

V

Viscosité, 100, 110
 Visqueux (Fluide —), 100
 Vortex formulation, 22
 Vorticité, 96, 98

Bibliographie

- [1] A.A. ABAKUMOV, A.YU. YEREMIN, AND YU.A. KUZNETSOV. Efficient fast direct method for solving Poisson's equation on a parallelepiped and its implementation in an array processor. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 3 :1–20, 1988.
- [2] Y. ACHDOU AND J.-L. GUERMOND. Convergence analysis of a finite element projection / Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(3) :799–826, 2000.
- [3] R.A. ADAMS. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] C. ATAMIAN, G.V. DINH, R. GLOWINSKI, J. HE, AND J. PÉRIAUX. On some imbedding methods applied to fluid dynamics and electro-magnetics. *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 91 :1271–1299, 1992.
- [5] C. ATAMIAN AND P. JOLY. Une analyse de la méthode des domaines fictifs pour le problème de helmholtz extérieur. *Modél. Math. Anal. Numér. (M2AN)*, 27(3) :251–288, 1993.
- [6] S. BERTOLUZZA, M. ISMAIL, AND B. MAURY. Analysis of the discrete Fat Boundary Method. In preparation.
- [7] S. BERTOLUZZA, M. ISMAIL, AND B. MAURY. The Fat Boundary Method : Convergence and Error Analysis. In *15th International Conference on Domain Decomposition Methods (DDM15)*, Berlin, Germany, July 2003. <http://www.mi.fu-berlin.de/dd15/pdf/ABSTR0079.pdf>.
- [8] S. BERTOLUZZA, M. ISMAIL, AND B. MAURY. The Fat Boundary Method : Semi-Discrete Scheme and Some Numerical Experiments. In R. Kornhuber, R.H.W. Hoppe, D.E. Keyes, J. Périaux, O. Pironneau, and J. Xu, editors, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE)*, pages ??–?? Springer, 2004. To appear.
- [9] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, fifth edition, 1996.
- [10] D. CALHOUN. A cartesian grid method for solving the two dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. *J. of Comp. Physics*, 176(2) :231–275, 2002.
- [11] R. CELORRIO, V. DOMÍNGUEZ, AND F-J SAYAS. An interior-exterior Schwarz algorithm and its convergence. *C .R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 334 :923–926, 2002.
- [12] A.J. CHORIN. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

- [13] A.J. CHORIN. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 23 :341–353, 1969.
- [14] A.J. CHORIN AND J.E. MARSDEN. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, third edition, 1992.
- [15] P.G. CIARLET. *The Finite Element Method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, first edition, 1978.
- [16] R. DAUTRAY AND J.L. LIONS. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, volume 2, Functional and variational methods. Springer, 2000.
- [17] R. DAUTRAY AND J.L. LIONS. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, volume 1, Physical origins and classical methods. Springer, 2000.
- [18] S. DEL PINO. *Une méthode d'éléments finis pour la résolution d'EDP dans des domaines décrits par géométrie constructive*. PhD thesis, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2002.
- [19] S. DEL PINO, E. HEIKKOLA, O. PIRONNEAU, AND J. TOIVANEN. A finite element method for virtual reality data. *C .R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math* 330(12) :1107–1111, 2000.
- [20] S. DEL PINO AND O. PIRONNEAU. FreeFEM3D : a 3D finite element PDE solver. <http://www.freefem.org>.
- [21] V. GIRAULT AND R. GLOWINSKI. Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3) :487–514, 1995.
- [22] V. GIRAULT, R. GLOWINSKI, AND T.W. PAN. A fictitious domain method with distributed multiplier for Stokes problem. In A. Sequeira, H. Berao da Vega, and J. Videman, editors, *Applied Nonlinear Analysis*, pages 159–174. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.
- [23] V. GIRAULT AND P.A. RAVIART. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1979.
- [24] R. GLOWINSKI AND Y. KUZNETSOV. On the solution of the dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed lagrange multiplier method. *C .R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, série I :693–698, 1998.
- [25] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, T.I. HESLA, AND D.D. JOSEPH. A distributed Lagrange Multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. of Multiphase Flow*, 25 :755, 1999.
- [26] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, AND J. PÉRIAUX. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 111 :283–303, 1994.
- [27] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, AND J. PÉRIAUX. Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving bodies. *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 151 :181–194, 1998.

-
- [28] R. GLOWINSKI AND T.W. PAN. Error estimates for fictitious domain/penalty/finite element methods. *Calcolo*, 29 :125–141, 1992.
- [29] R. GLOWINSKI, T.W. PAN, T.I. HESLA, D.D. JOSEPH, AND J. PÉRIAUX. A fictitious domain method with distributed Lagrange multipliers for the numerical simulation of particulate flow. In J. Mandel, C. Farhat, , and X. C. Cai, editors, *Domain Decomposition Methods 10*, pages 121–137, Providence, RI, 1998. AMS.
- [30] R. GLOWINSKI, T.W. PAN, T.I. HESLA, D.D. JOSEPH, AND J. PÉRIAUX. A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies : Application to Particulate Flow. *J. of Comp. Physics*, 169 :363–426, 2001.
- [31] P. GRISVARD. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.
- [32] J.-L. GUERMOND. Un résultat de convergence à l'ordre deux en temps pour l'approximation des équations de Navier-Stokes par une technique de projection. *Modél. Math. Anal. Numér. (M2AN)*, 33(1) :169–189, 1999.
- [33] J.-L. GUERMOND AND J. SHEN. A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows. *J. of Comp. Physics*, 192(1) :262–276, 2003.
- [34] J.-L. GUERMOND AND J. SHEN. Velocity-correction projection methods for incompressible flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1) :112–134, 2003.
- [35] E. HEIKKOLA, Y.A. KUZNETSOV, AND K.N. LIPNIKOV. Fictitious domain methods for the numerical solution of three-dimensional acoustic scattering problems. *J. Comput. Acoust.*, 7(3) :161–183, 1999.
- [36] E. HEIKKOLA, T. ROSSI, AND J. TOIVANEN. A parallel fictitious domain method for the threedimensional helmholtz equation. In *The Ninth SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing*. SIAM, 1999. in CD-ROM format.
- [37] E.W. HOBSON. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea, New York, 1965.
- [38] H. HUANG AND S. TAKAGI. Physalis : A new method for particle flow simulation. Part III : convergence analysis of two dimensional flows. *J. of Comp. Physics*, 189 :493–511, 2003.
- [39] T.J.R. HUGHES. *The Finite Element Method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover publications, inc, first edition, 2000.
- [40] M. ISMAIL AND B. MAURY. Méthode de la frontière élargie pour la simulation d'écoulements fluides. In *35ème Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2003)*, pages 1–25, La Grande Motte, France, June 2003. http://www.math.univ-montp2.fr/canum03/COMMUNICATIONS/CONF_ORALES/mourad.ismail.pdf. Proceedings published in CD-ROM format.
- [41] T.A. JOHNSON AND V.C. PATEL. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.*, 378 :19–70, 1999.
- [42] D. KIM AND H. CHOI. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction. *J. Fluid Mech.*, 461 :365–386, 2002.

- [43] Y.A. KUZNETSOV. Block relaxation methods in subspaces, their optimization and application. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 4(6) :433–451, 1989.
- [44] Y.A. KUZNETSOV AND K.N. LIPNIKOV. 3D Helmholtz wave equation by fictitious domain method. *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 13(5) :371–387, 1998.
- [45] Y.A. KUZNETSOV AND A.M. MATSOKIN. On partial solution of systems of linear algebraic equations. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 4(6) :453–467, 1989.
- [46] M.C. LAI, W.W. LIN, AND W. WANG. A fast Spectral/difference method without pole conditions for Poisson-type equations in cylindrical and spherical geometries. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22 :537–548, 2002.
- [47] M.C. LAI AND W.C. WANG. Fast direct solvers for Poisson equation on 2D polar and spherical geometries. *Numer. Meth. Partial Diff. Eq.*, 18 :56–68, 2002.
- [48] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSCHITZ. *Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, third edition, 1976.
- [49] P. LE TALLEC AND M.D. TIDRIRI. Convergence analysis of domain decomposition algorithms with full overlapping for the advection-diffusion problem. *Math. Comp.*, 68 :585–606, 1999.
- [50] R.J. LEVEQUE AND Z.L. LI. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1019–1044, 1994.
- [51] J.L. LIONS AND E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1. Dunod, Paris, 1968.
- [52] B. MAURY. Direct simulation of 2D fluid particle flow in biperiodic domains. *J. of Comp. Physics*, 156 :325–351, 1999.
- [53] B. MAURY. A Fat Boundary Method for the Poisson problem in a domain with holes. *J. of Sci. Comput.*, 16(3) :319–339, 2001.
- [54] B. MAURY. *Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés*. Coll. Math. 2ème cycle. Ellipses, 2004. To appear.
- [55] R. MITTAL. Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere. *AIAA J.*, 37 :388–390, 1999.
- [56] M.J. MOHLENKAMP. A Fast Transform for Spherical Harmonics. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 5(2/3) :159–184, 1999.
- [57] J.A. NITSCHKE AND A.H. SCHATZ. Interior Estimates for Ritz-Galerkin Methods. *Math. Comp.*, 28(128) :937–958, 1974.
- [58] T.-W. PAN, D.D. JOSEPH, R. BAI, R. GLOWINSKI, AND V. SARIN. Fluidization of 1024 spheres : simulation and experiment. *J. Fluid Mech.*, 451 :169–191, 2002.
- [59] C.S. PESKIN. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. of Comp. Physics*, 10 :252, 1972.
- [60] C.S. PESKIN. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. of Comp. Physics*, 25 :220–252, 1977.
- [61] C.S. PESKIN. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, pages 479–517, 2002.

-
- [62] O. PIRONNEAU. On the transport diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 38 :309–332, 1982.
- [63] O. PIRONNEAU. *Finite Element Methods for Fluids*. J. Wiley, Chichester, 1989.
- [64] A. PROSPERETTI AND H.N. OĞUZ. Physalis : A New $o(N)$ Method for the Numerical Simulation of Disperse Systems : Potential Flow of Spheres. *J. of Comp. Physics*, 167 :196–216, 2001.
- [65] C. PRUD'HOMME. *Décomposition de domaines, application aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles incompressibles*. PhD thesis, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2000.
- [66] P.A. RAVIART AND J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, second edition, 1988.
- [67] T. ROSSI AND J. TOIVANEN. A nonstandard cyclic reduction method, its variants and stability. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20(3) :628–645, 1999.
- [68] T. ROSSI AND J. TOIVANEN. A parallel fast direct solver for block tridiagonal systems with separable matrices of arbitrary dimension. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(5) :1778–1796, 1999.
- [69] D. RUSSEL AND Z.J. WANG. A cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2d incompressible viscous flow. *J. of Comp. Physics*, 191 :177–205, 2003.
- [70] V.K. SAUL'EV. Solution of certain boundary-value problems on high-speed computers by the fictitious-domain method. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 4 :912–925, 1963.
- [71] K. SCHNEIDER AND M. FARGE. adaptive wavelet simulation of a flow around an impulsively started cylinder using penalisation. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 12(3) :374–380, 2002.
- [72] J. SHEN. On error estimates of the projection methods for Navier-Stokes equations : second order schemes. *Math. Comp.*, 65(215) :1039–1065, 1996.
- [73] J. SHEN. Efficient Spectral-Galerkin methods IV. Spherical geometries. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(4) :1438–1455, 1999.
- [74] I.M. SMITH AND D.V. GRIFFITHS. *Programming the Finite Element Method*. John Wiley & Sons Ltd, third edition, 1998.
- [75] E. SÜLI. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method. *Numer. Math.*, 53 :459–483, 1988.
- [76] S. TAKAGI, H.N. OĞUZ, Z. ZHANG, AND A. PROSPERETTI. Physalis : A new method for particle simulation. Part II : two-dimensional Navier-Stokes flow around cylinders. *J. of Comp. Physics*, 187 :371–390, 2003.
- [77] R. TEMAM. Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 98 :115–152, 1968.
- [78] R. TEMAM. *Navier-Stokes equations*. Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, second edition, 1979.
- [79] A. TOMBOULIDES AND S. ORSZAG. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *J. Fluid Mech.*, 416 :45–73, 2000.

- [80] P.S. VASSILEVSKI. Fast algorithm for solving a linear algebraic problem with separable variables. *C .R. Acad. Bulgare Sci.*, 37(3) :305–308, 1984.
- [81] O.C. ZIENKIEWICZ AND R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, volume 1, The Basis. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.
- [82] O.C. ZIENKIEWICZ AND R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, volume 2, Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.
- [83] O.C. ZIENKIEWICZ AND R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, volume 3, Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.

Méthode de la frontière élargie pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels.

Résumé

L'objectif de cette thèse est, d'une part l'analyse mathématique de la méthode de la frontière élargie (*The Fat Boundary Method*, F.B.M.), et d'autre part, son adaptation à la simulation numérique des écoulements fluides tridimensionnels incompressibles dans des géométries complexes (domaines perforés).

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cadre de problèmes elliptiques modèles de type Poisson ou Helmholtz posés dans un domaine perforé (typiquement un domaine parallélépipédique contenant des obstacles sphériques).

En utilisant la F.B.M., le problème initial est remplacé par une résolution dans le domaine non perforé permettant l'utilisation d'un maillage cartésien, offrant ainsi un cadre approprié pour l'utilisation de solveurs rapides. Nous effectuons donc l'analyse mathématique de la F.B.M., notamment la convergence et l'estimation d'erreur dans ce cadre particulier. Les résultats théoriques ainsi obtenus sont également illustrés par des tests numériques.

La deuxième partie est dédiée à l'application de ces outils pour la simulation numérique d'écoulements fluides incompressibles tridimensionnels. La stratégie adoptée consiste à discrétiser les équations de Navier-Stokes en combinant la F.B.M. (pour la discrétisation spatiale), un schéma de projection (pour la discrétisation temporelle) et la méthode des caractéristiques (pour le traitement du terme convectif). Nous présentons ainsi plusieurs simulations numériques tridimensionnelles correspondant aux écoulements fluides en présence d'obstacles fixes et mobiles (mouvements imposés).

Mots-clés: Méthode de la frontière élargie, domaines fictifs, problèmes elliptiques, méthodes de projection, méthode des caractéristiques, équations de Navier-Stokes, écoulements fluides incompressibles.

The Fat Boundary Method for the Numerical resolution of Elliptic Problems in Perforated Domains. Application to 3D Fluid Flows.

Abstract

The aim of this thesis is the mathematical analysis of the Fat Boundary Method (F.B.M.) and its adaptation to the numerical simulation of the 3D incompressible fluid flows in complex geometries (perforated domains).

First, we focus on a simple case of model elliptic problems (Poisson or Helmholtz-like problems) set in a perforated domain (typically a box containing spherical obstacles).

Using F.B.M., the initial problem is replaced by a new one defined in the entire box, making it possible to use a cartesian grid, thus offering a suitable framework for the use of fast solvers. We thus carry out the mathematical analysis of the F.B.M., in particular the convergence and the errors estimate. The obtained theoretical results are also illustrated numerically.

The second part is dedicated to the application of these tools for the Numerical Simulation of three-dimensional incompressible fluid flows. The strategy consists in discretizing the Navier-Stokes equations by combining the F.B.M. (for the space discretization), a Projection Scheme (for the time discretization) and the Characteristics Method (for the treatment of the convection). Finally, we present several three-dimensional Numerical Simulations corresponding to fluid flows in presence of fixed and mobile obstacles (imposed motion).

Keywords: Fat Boundary Method, Fictitious Domains, Elliptic Problems, Projection Methods, Characteristics Method, Navier-Stokes equations, Incompressible Fluid Flows.

