Projet de calcul scientifique. L3 Physique

M. Ismail

5 octobre 2011

Le processus de refroidissement d'un processeur est généralement constitué d'un ventilateur et d'un radiateur (voir figure 1). On se propose de modéliser et de simuler la dissipation de la chaleur dans un élément de radiateur (figure 2).

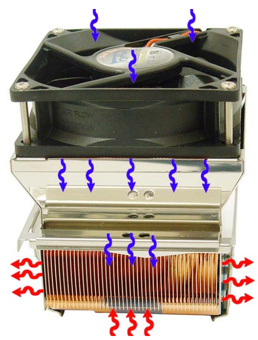

FIGURE 1 – Dispositif de refroidissement d'un processeur (Photo PC INpact)

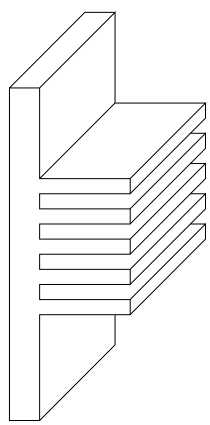

FIGURE 2 – Élément de radiateur

Les données du problème sont : la géométrie du dispositif, décrite par la longueur L et la section transversale S, la température T_0 générée par le processeur et la température ambiante T_e. Pour trouver la distribution de la température T dans l'ailette, nous supposons que la largeur W est grande devant les autres dimensions : $W >> H$ et $W >> L$ de sorte que la distribution va être la même dans toute section transversale (x, y).

Considérons le domaine de calcul défini par la section transversale de l'ailette (figure 3)

$$\Omega = [0, L] \times [-H/2, H/2], \quad \text{avec } \Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

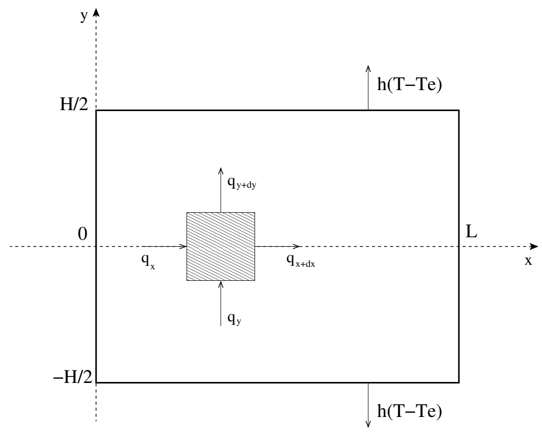

Figure 3 – Section transversale de l'ailette

L'équation de la chaleur en deux dimensions est déduite en écrivant l'équilibre thermique d'un élément infinitésimal $dx \times dy$ situé à l'intérieur du domaine

$$(q_x - q_{x+dx})dxdz + (q_y - q_{y+dy})dydz = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz,$$

et en appliquant la loi de Fourier suivant chaque direction. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

L'équation (1) s'écrit sous une forme plus compacte

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2}$$

Les pertes latérales par convection thermique sont prises en compte au niveau des conditions aux limites qui s'écrivent :

- sur $\Gamma_1(x = 0)$ la température est imposée : $T = T_0$,
- sur $\Gamma_3(x = L)$ nous prenons la condition de flux nul : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$,
- sur $\Gamma_2(y = \frac{H}{2})$ l'équilibre des flux suivant la direction des y nous donne :

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=\frac{H}{2}} = h_c(T - T_e),$$

- de même, sur $\Gamma_4(y = -\frac{H}{2})$ le même équilibre des flux nous donne :

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=-\frac{H}{2}} = -h_c(T - T_e).$$

L'équation adimensionnalisée correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \cdot \nabla \theta) = 0,$$

avec les grandeurs sans dimension définies comme :

$$t \leftarrow \frac{t}{t_0}, \quad x \leftarrow \frac{x}{L}, \quad y \leftarrow \frac{y}{L}, \quad \theta \leftarrow \frac{(T - T_e)}{T_e}, \quad k \leftarrow \frac{\kappa t_0}{L^2}.$$

On suppose aussi que la diffusivité thermique κ est constante sur le domaine de calcul et en prenant comme temps de référence $t_0 = \frac{L^2}{\kappa}$, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = 0.$$

Nous observons également que le problème est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, il suffit de le résoudre sur la moitié du domaine initial en imposant une condition de symétrie pour la frontière $(y = 0)$ (figure 4).

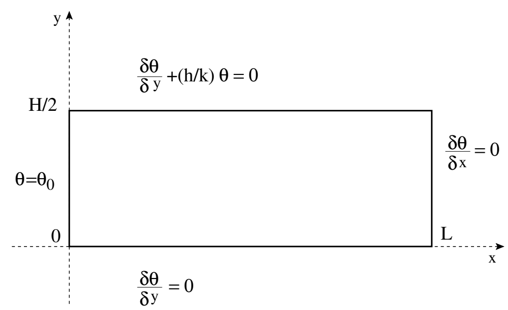

Figure 4 – Domaine de calcul

Finalement, le modèle retenu pour le calcul de la distribution de température sur l'ailette est défini par : trouver $\theta(x, y, t)$, solution de

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, \frac{H}{2L}], \quad \forall 0 < t < t_{max}, \tag{3}$$

qui satisfait les conditions aux limites ($\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal à la frontière $\Gamma = \partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur du domaine) :

$$\theta = \theta_D = \frac{T_0 - T_e}{T_e} \quad \text{sur } \Gamma_1(x = 0) \quad \text{(condition de Dirichlet)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2(y = 0) \quad \text{(condition de Neumann)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3(x = 1) \quad \text{(condition de Neumann)} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + c\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_4(y = \frac{H}{2L}) \quad \text{(condition de Robin), où } c = \left(\frac{h_c L}{k}\right), \tag{7}$$

et la condition initiale $(t = 0)$:

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y) = 0. \tag{8}$$

Références

[1] I. Danaila, F. Hecht and O. Pironneau. *Simulation numérique en C++*. Dunod, Paris, 2003.