Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, <u>**$2\pi$-périodique, paire**</u> et telle que : $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$.
   a) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   b) Développer f en série de Fourier
   c) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (décomposer cette série en deux séries de termes paires et impaires) et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ (le calcul de la dernière somme est **facultatif**)
2. a) Soit a un nombre réel non entier. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f_a(x) = e^{iax}$.
   b) En déduire les sommes suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-a)^2} + \frac{1}{(n+a)^2} \right). \tag{1}$$

3. Soit P un polynôme <u>**pair de degré** 4</u> vérifiant les conditions

$$P'(\pi) = 0, \quad P'''(\pi) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} P(x)dx = 0. \tag{2}$$

   a) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f qui coïncide avec P sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
   Indication : penser à effectuer plusieurs intégrations par parties.
   b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}$ (le calcul de la dernière somme est **facultatif**).
   Remarque : si vous n'arrivez pas à calculer explicitement le polynôme P, vous pouvez laisser les résultats en fonction de P.

Solution de l'exercice 1

1. a)
   b) Puisque f est paire, $b_n(f) = 0, \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \frac{2x}{\pi}) dx = 0 \qquad (3) \\
a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \frac{2x}{\pi}) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[(1 - \frac{2x}{\pi}) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{4}{n\pi^2} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Ainsi, la série de Fourier converge vers f sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos(nx) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

c) L'égalité $f(0) = 1$ nous donne $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$. Ensuite, si $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on a $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$ et donc $\boxed{S = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}}$.

D'autre part, l'égalité de Parseval nous donne

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \tag{6}$$

ce qui implique

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \frac{2x}{\pi})^2 dx = \frac{2}{3} \tag{7}$$

ou alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Enfin si on pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, on a $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}$. Ainsi, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

2. On a

$$c_n(f_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-1)^n\frac{\sin(a\pi)}{a-n}, \tag{8}$$

et

$$S_{f_a} = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a-n}e^{inx}. \tag{9}$$

Si $x = 0$, la série de Fourier converge et on a

$$\begin{aligned} f_a(0) = 1 \quad &= \quad \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a-n} && (10)\\ &= \quad \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a-n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+n}\right) && (11)\\ &= \quad \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right). && (12)\end{aligned}$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)} + \frac{1}{a}\right). \tag{13}$$

D'autre part, d'après la formule de Parceval,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2(a-n)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1 \tag{14}$$

On a donc

$$1 = \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2(a-n)^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{a^2}\right). \tag{15}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(a+n)^2} + \frac{1}{(a-n)^2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} - \frac{1}{a^2}, \tag{16}$$

et finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(a+n)^2}+\frac{1}{(a-n)^2}\right)=\frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)}+\frac{1}{a^2}. \tag{17}$$

3. Puisque f est paire, on $b_n(f)=0$ et

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(x)\cos(nx)dx. \tag{18}$$

D'autre part, la troisième condition implique que $a_0=0$. En intégrant par parties plusieurs fois de suite, on obtient, si $n\geq 1$,

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\left[P(x)\frac{\sin(nx)}{n}+P'(x)\frac{\cos(nx)}{n^2}-P''(x)\frac{\sin(nx)}{n^3}-P'''(x)\frac{\cos(nx)}{n^4}+P^{(4)}(x)\frac{\sin(nx)}{n^5}\right]_0^\pi.$$

Comme P est paire, les nombres $P'(0)$ et $P'''(0)$ sont nuls. Compte tenu des conditions posées sur P, il reste alors dans la somme précédente

$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}. \tag{19}$$

Comme f est continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point, on a : pour tout $x\in[-\pi,\pi]$

$$P(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos(nx). \tag{20}$$

En particulier, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=-\frac{\pi}{2}P(\pi)\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{\pi}{2}P(0). \tag{21}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le polynôme P. Puisque $P'(\pi)$, $P'(-\pi)$ et $P'(0)$ sont nuls et que P' est de degré 3, on a nécessairement $P'(x)=\lambda x(x^2-\pi^2)$.
Alors $P''(x)=3\lambda x^2-\lambda\pi^2$ et $P'''(x)=6\lambda x$. Or $P'''(\pi)=1$, ce qui implique $\lambda=\dfrac{1}{6\pi}$, et donc

$$P(x)=\frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{\pi^2x^2}{2}\right)+C. \tag{22}$$

Avec $C=\dfrac{7\pi^3}{360}$ (en utilisant $\int_0^\pi P(x)dx=0$). Ainsi,

$$P(x)=\frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{\pi^2x^2}{2}+\frac{7\pi^4}{60}\right). \tag{23}$$

On trouve donc $P(\pi)=-\dfrac{\pi^3}{45}$ et $P(0)=-\dfrac{7\pi^3}{360}$, D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{7\pi^4}{720}. \tag{24}$$

Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$, on utilise l'égalité de Parceval, qui donne ici

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(x)^2dx. \tag{25}$$

On obtient donc, après le calcul de l'intégrale

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}. \tag{26}$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de chercher des fonctions u intégrables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds, \tag{27}$$

où β est un réel appartenant à $]0, 1/2[$.

1. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. Écrire l'équation (27) sous la forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
3. On suppose que l'équation (27) admet une solution. Déterminer $\tilde{u}$, la transformée de Fourier de u.
4. En déduire l'expression de la solution u.

Solution de l'exercice 2

1. $\tilde{f}(q) = \dfrac{2}{1+q^2}$. En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-iqx} dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iq)x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+iq)x} dx && (28) \\ &= \frac{1}{1-iq} + \frac{1}{1+iq} = \frac{2}{1+q^2}. && (29) \end{aligned}$$

2. Il est clair que l'équation (27) peut s'écrire sous la forme

$$u(x) = f(x) + \beta (f * u)(x). \tag{30}$$

3. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (30), on a $\tilde{u}(q) = \tilde{f}(q) + \beta \tilde{f}(q) \tilde{u}(q)$. Ce qui donne

$$\tilde{u}(q) = \frac{\tilde{f}(q)}{1 - \beta \tilde{f}(q)} = \frac{2}{(1-2\beta) + q^2}. \tag{31}$$

4. On peut en déduire que

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}. \tag{32}$$

En effet, en faisant le même type de calcul que dans la première question, on obtient

$$\tilde{u}(q) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|} e^{-iqx} dx = \frac{2}{(1-2\beta) + q^2}. \tag{33}$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. On cherche une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

On suppose que f est telle que u soit deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et absolument intégrable. Utiliser la transformée de Fourier de u pour montrer que

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-|x-y|} dy. \tag{35}$$

Solution de l'exercice 3

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (34), on a $(1+q^2)\tilde{u}(q) = \tilde{f}(q)$. Ainsi,

$$\tilde{u}(q) = \frac{\tilde{f}(q)}{1+q^2} = \tilde{f}(q) \frac{1}{1+q^2} = \tilde{f}(q) \tilde{g}(q). \tag{36}$$

Avec $g(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$. Ainsi, en utilisant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$u(x) = (f * g)(x). \tag{37}$$

D'où le résultat.