Exercice 1

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x$.
   a) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur plusieurs périodes.
   b) Vérifier que f est développable en série de Fourier et donner son développement.
   c) Vérifier la convergence de la série de Fourier de f et en déduire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.
   d) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = |x|$.
   a) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur plusieurs périodes.
   b) Vérifier que f est développable en série de Fourier et donner son développement.
   c) Vérifier la convergence de la série de Fourier de f et retrouver $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Solution de l'exercice 1

1. a) Évident
   b) Il est clair que $f \in L^2([-\pi, \pi])$. On remarque que f est une fonction impaire. Les coefficients de Fourier a_n sont nuls. Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients b_n, $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -2\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} + 2\frac{1}{n^2} \sin(n\pi) \right\} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_F(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

   c) Comme f vérifie les conditions de Dirichlet, on a aussi

$$x = f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Pour $x = \pi/2$, on a $\pi/2 = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi/2)$. Or, pour n paire ($n = 2p$), $\sin(n\pi/2) = 0$. Et pour n impaire ($n = 2p+1$), $\sin(n\pi/2) = (-1)^p$. Ainsi, $\pi/2 = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$. D'où le résultat.

   d) D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Ce qui donne dans notre cas

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

C'est-à-dire $\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Ou alors $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$. Qui peut s'écrire encore $\sum_{n\,paire}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\,impaire}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ce qui équivaut à $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ou encore $\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. C'est-à-dire $\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. D'où $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$.

2. a) Évident

b) Il est clair que $f \in L^2([-\pi,\pi])$. On remarque que f est une fonction paire. Les coefficients de Fourier b_n sont nuls. Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients $a_n,\ n \geq 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_F(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos(nx).$$

c) Comme f vérifie les conditions de Dirichlet, on a aussi

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\,impaire}\frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

Pour $x = 0$, on a : $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$. Ce qui donne $\boxed{\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$.

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = xe^x$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.
2. En déduire les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n pour tout $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{(1-in)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-in}\left[xe^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{1-in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{1-in}\left[e^{(1-in)\pi}+e^{-(1-in)\pi}\right] - \frac{1}{(1-in)^2}\left[e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{1-in}(-1)^n\mathrm{ch}(\pi) - \frac{2}{(1-in)^2}(-1)^n\mathrm{sh}(\pi)\right\} \\
&= \frac{(-1)^n\mathrm{ch}(\pi)(1+in)}{1+n^2} - \frac{(-1)^n\mathrm{sh}(\pi)(1+in)^2}{\pi(1+n^2)^2}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \mathrm{ch}(\pi) - \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \\ a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{2(-1)^n \mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} - \frac{2(-1)^n \mathrm{sh}(\pi)(1-n^2)}{\pi(1+n^2)^2}. \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -\frac{2(-1)^n n \mathrm{ch}(\pi)}{1+n^2} + \frac{4(-1)^n n \mathrm{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3

On considère une corde de longueur L dont on fixe les deux extrémités. Les vibrations de la corde au point x et à l'instant t sont représentées par la fonction $y(x,t)$ ($x \in [0.L]$ et $t \geq 0$) et sont gouvernées par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}(x,t), \tag{1}$$

avec c et γ sont deux constantes positives données.

On considère les conditions initiales $y(x,0) = y_0(x)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ pour tout $x \in [0,L]$. Avec y_0 est une fonction donnée et développable en série de Fourier. De plus, on suppose que $\gamma \ll 2c\pi/L$.

1. Quel développement de la fonction y en série est le plus adéquat : *(i)* série de Fourier, *(ii)* série de sinus, ou *(iii)* série de cosinus ? Justifier votre réponse.
2. Développer $y(x,t)$ en série de sinus par rapport à la variable spatiale x.
3. Montrer que les coefficients de la série de sinus obéissent à l'équation différentielle
$$b_n''(t) = -c^2 (\frac{n\pi}{L})^2 b_n(t) - \gamma b_n'(t). \tag{2}$$
4. Résoudre l'équation différentielle (2) et donner l'expression des coefficients $b_n(t)$.
5. Trouver les conditions initiales pour les coefficients $b_n(t)$ et en déduire l'expression finale de $b_n(t)$.
6. Quel est le comportement des coefficients $b_n(t)$ quand t tend vers l'infini ?
7. Donner la solution $y(x,t)$ dans le cas non amorti. C'est-à-dire $\gamma = 0$.
8. Nous considérons la condition initiale $y_0(x) = \begin{cases} 2x/L & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L/2, \\ 2(1-x/L) & \text{si} \quad L/2 \leq x \leq L. \end{cases}$
   a) Développer $y_0(x)$ en série de sinus.
   b) Donner l'expression de $y(x,t)$ pour cette condition initiale.

Solution de l'exercice 3

1. Le choix d'une série de sinus est le plus approprié puisque nous avons les conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$.
2. $y(x,t) = \displaystyle\sum_1^\infty b_n(t) \sin(\pi n x/L)$. Avec $b_n(t) = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L y(x,t) \sin(\pi n x/L) dx \ \forall n \geq 1$.
3. En remplaçant $y(x,t)$ par son développement en série de sinus dans l'équation (1), nous obtenons
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_1^\infty b_n(t) \sin(\pi n x/L) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_1^\infty b_n(t) \sin(\pi n x/L) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^\infty b_n(t) \sin(\pi n x/L).$$
   Ce qui implique
$$\sum_1^\infty b_n''(t) \sin(\pi n x/L) = -c^2 \sum_1^\infty (\pi n/L)^2 b_n(t) \sin(\pi n x/L) - \gamma \sum_1^\infty b_n'(t) \sin(\pi n x/L).$$
   Ou alors
$$\sum_1^\infty \left[b_n''(t) + c^2(\pi n/L)^2 b_n(t) + \gamma b_n'(t)\right] \sin(\pi n x/L) = 0.$$
   Comme $\{\sin(\pi n x/L)\}_{n \geq 1}$ est une base, nous obtenons cette équation différentielle
$$b_n''(t) + c^2(\pi n/L)^2 b_n(t) + \gamma b_n'(t) = 0.$$

4. On note $\omega_n = c\pi n/L$. L'équation différentielle $b_n''(t) + \gamma b_n'(t) + \omega_n^2 b_n(t) = 0$ admet comme solution générale

$$b_n(t) = A_n e^{\lambda_n t} + B_n e^{\mu_n t}.$$

Avec λ_n et μ_n sont les deux solutions de l'équation du second degré $r^2 + \gamma r + \omega_n^2 = 0$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_n^2} = -\frac{\gamma}{2} + i\sqrt{\omega_n^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ \mu_n &= -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_n^2} = -\frac{\gamma}{2} - i\sqrt{\omega_n^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned}$$

A_n et B_n sont deux constantes à déterminer en utilisant les conditions initiales.

5. Nous avons les conditions initiales suivantes :

$$y(x,0) = y_0(x) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Or $y(x,t) = \sum_1^\infty b_n(t)\sin(\pi n x/L)$. Ce qui implique

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \sum_1^\infty b_n(0)\sin(\pi n x/L) = y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) &= \sum_1^\infty b_n'(0)\sin(\pi n x/L) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $b_n(0) = \beta_n$ (les coefficients de $y_0(x)$ dans le développement en série de sinus) et $b_n'(0) = 0$. En outre, en utilisant l'expression de la solution générale, nous avons

$$b_n(0) = A_n + B_n = \beta_n \text{ et } b_n'(0) = \lambda_n A_n + \mu_n B_n = 0.$$

Par conséquent

$$A_n = \frac{\gamma/2 + i\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}}{2i\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}}\beta_n \text{ et } B_n = \frac{-\gamma/2 + i\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}}{2i\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}}\beta_n$$

Ainsi,

$$b_n(t) = \beta_n e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}\,t\right) + \frac{\gamma}{2\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}}\sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}\,t\right)\right].$$

6. Quant t tend vers l'infini, tous les coefficients $b_n(t)$ sont amortis exponentiellement avec l'échelle de temps $\tau_n = 2/\gamma$.

7. Pour $\gamma = 0$,

$$y(x,t) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \cos(\omega_n t)\sin(\pi n x/L).$$

8. a) $y_0(x) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin(\pi n x/L)$. Avec

$$
\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{L}\int_0^L y_0(x)\sin(\pi n x/L)dx = \frac{4}{L}\left\{\int_0^{L/2}\frac{x}{L}\sin(\pi n x/L)dx + \int_{L/2}^{L}(1-\frac{x}{L})\sin(\pi n x/L)dx\right\} \\
&= \frac{4}{L^2}\left\{\int_0^{L/2} x\sin(\pi n x/L)dx - \int_{L/2}^{L} x\sin(\pi n x/L)dx\right\} + \frac{4}{L}\int_{L/2}^{L}\sin(\pi n x/L)dx \\
&= \frac{4}{L^2}\left\{-\frac{L}{\pi n}\left[x\cos(\pi n x/L)\right]_0^{L/2} + \frac{L}{\pi n}\int_0^{L/2}\cos(\pi n x/L)dx + \frac{L}{\pi n}\left[x\cos(\pi n x/L)\right]_{L/2}^{L}\right. \\
&- \left.\frac{L}{\pi n}\int_{L/2}^{L}\cos(\pi n x/L)dx\right\} - \frac{4}{\pi n}\left[\cos(\pi n x/L)\right]_{L/2}^{L} \\
&= \frac{4}{L^2}\left\{-\frac{L^2}{2n\pi}\cos(n\pi/2) + (\frac{L}{n\pi})^2\sin(n\pi/2) + \frac{L^2}{n\pi}\left((-1)^n - \frac{1}{2}\cos(n\pi/2)\right)\right. \\
&+ \left.\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin(n\pi/2)\right\} - (\frac{4}{n\pi})\left((-1)^n - \cos(n\pi/2)\right) \\
&= \frac{8}{(n\pi)^2}\sin(n\pi/2) = \begin{cases} \dfrac{8}{((2p+1)\pi)^2}(-1)^p & \text{si} \quad n = 2p+1, \\ 0 & \text{si} \quad n = 2p. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$y_0(x) = 8\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{((2p+1)\pi)^2}\sin((2p+1)\pi x/L)$$

b)

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n\geq 1} b_n(t)\sin(\pi n x/L) \\
&= \sum_{n\geq 1}\beta_n e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\left(\Omega_n\, t\right) + \frac{\gamma}{2\Omega_n}\sin\left(\Omega_n\, t\right)\right]\sin(\pi n x/L) \\
&= \frac{8}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\cos\left(\Omega_{2p+1}\, t\right) + \frac{\gamma}{2\Omega_{2p+1}}\sin\left(\Omega_{2p+1}\, t\right)\right]\sin((2p+1)\pi x/L).
\end{aligned}
$$

Avec $\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2/4}$.