Examen final, 5 janvier 2017

<u>Notes de cours et de TDs autorisées</u>. Durée = 3h

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (4pts)

Soit f une fonction **2π-périodique et impaire**, définie par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} f(x) = 1 & \text{sur} \quad]0,\pi[, \\ f(n\pi) = 0 & \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f **sur plusieurs périodes**.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin[(2n+1)x]$. Justifier la convergence de la série de Fourier en tout point.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 1

1. Évident.
2. On a $a_n(f) = 0$ car f est impaire et par intégration par parties,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n). \tag{2}$$
Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)}$. La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet. La série de Fourier de $S_f(x)$ converge et a pour somme $f(x)$.
3. Il suffit de prendre $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 (6pts)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+|x|) & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

1. Tracer les allures des courbes des fonctions f et g.
2. Les fonctions f et g sont-elles dans $L^2(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse.
3. Calculer les dérivées premières au sens des distributions des fonctions f et g et tracer les allures de leurs courbes.

4. Les fonctions f et g appartiennent-elles à $H^1(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse.
5. Calculer les dérivées secondes au sens des distributions des fonctions f et g.
6. Les fonctions f et g appartiennent-elles à $H^2(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

Solution de l'exercice 2

Voir cours

Exercice 3 (5pts)

Soient $a > 0$ et f la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = e^{-a(x^2+y^2)}$.
   a) Vérifier que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy = J^2$.
   b) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy$ en utilisant le changement de variable en coordonnées polaires. En déduire la valeur de J.
2. Le but de cette question est de déterminer la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de f.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2axf(x)$.
   b) En appliquant la transformée de Fourier à cette équation, montrer que pour tout $q \in \mathbb{R}$,
   $$\frac{d\tilde{f}}{dq}(q) + \frac{q}{2a}\tilde{f}(q) = 0. \tag{4}$$
   c) En résolvant l'équation différentielle ci-dessus, déterminer l'expression de $\tilde{f}$ à une constante multiplicative près.
   d) En considérant la valeur de $\tilde{f}$ en $q = 0$, déterminer l'expression exacte de $\tilde{f}$.

Solution de l'exercice 3

1. a)
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}dx\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx\right)dy \\
&= J\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}dy = J^2.
\end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-ar^2}rdrd\theta \\
&= 2\pi\int_{0}^{+\infty} e^{-ar^2}rdr = 2\pi\frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $J^2 = \dfrac{\pi}{a}$ et $J = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -2axe^{-ax^2} = -2axf(x)$.

b) En appliquant la transformée de Fourier à l'équation $f'(x) = -2axf(x)$, on obtient : $\forall q \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f'}(q) = -2a\widetilde{xf(x)} = -2ai(\tilde{f})'(q)$. Or $\widetilde{f'}(q) = iq\tilde{f}(q)$. Ainsi, $(\tilde{f})'(q) + \dfrac{q}{2a}\tilde{f}(q) = 0$.

c) La solution de l'équation différentielle (4) est de la forme $\tilde{f}(q) = Ke^{-\frac{q^2}{4a}}$ avec $K \in \mathbb{C}$.

d) On a $\tilde{f}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = J = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. D'où $K = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$. Ainsi, $\forall q \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(q) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{q^2}{4a}}$.

Exercice 4 (7pts)

On cherche à calculer par le théorème des résidus la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$. Pour ce faire, on définit la fonction à variable complexe $f : z \longmapsto \dfrac{1}{1+z^4}$ et $\gamma_R = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_R + \mathcal{C}_2$, le contour orienté positivement (voir figure ci-dessous) et défini par :

— $\mathcal{C}_1$, le segment $[0, R]$ avec $(R > 1)$,
— $\mathcal{C}_R$, le quart de cercle de centre 0 et de rayon R,
— $\mathcal{C}_2$, le segment $[iR, 0]$.

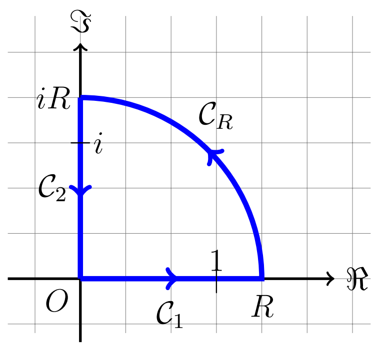

FIGURE 1 – Le contour $\gamma_R = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_R + \mathcal{C}_2$.

1. Sur quel domaine de $\mathbb{C}$ f est-elle analytique ?
2. Déterminer les pôles de f.
3. On pose $w = e^{i\pi/4}$.
   a) Représentez approximativement w sur la figure.
   b) Calculer $Res(f, w)$, le résidu de f en w.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$ à l'aide du théorème des résidus.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz = 0$.
6. Déterminer la relation entre I et $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$. En déduire la valeur de I.

Solution de l'exercice 4

1. Il est clair que f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} / 1 + z^4 = 0\}$.
2. f admet quatre pôles simple : $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{i5\pi/4}$ et $e^{7i\pi/4}$.
3. a) $w = e^{i\pi/4}$ est le seule pôle entouré par le contour γ_R.

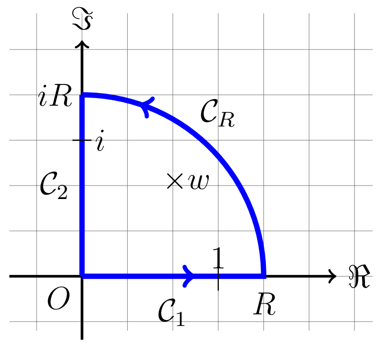

FIGURE 2 – $w = e^{i\pi/4}$.

b) $Res(f,w) = \lim_{z\to w}(z-w)f(z) = \lim_{z\to w} \dfrac{1}{(z-e^{i3\pi/4})(z-e^{i5\pi/4})(z-e^{i7\pi/4})} = -\dfrac{i+1}{4\sqrt{2}}$.

4. $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi Res(f,w) = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}$.

5. On a $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. D'après le deuxième lemme de Jourdan $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini.

6. En tenant compte des deux questions précédentes

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} + \int_\infty^0 \frac{idy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

C'est-à-dire $I(1-i) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$. Ainsi,

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$