TD01 – Espaces vectoriels

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Soient deux vecteurs non nuls $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel de dimension n

1. Démontrer l'inégalité de Schwartz :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 . \tag{1}$$

   (On choisira un vecteur $\mathbf{t} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ où λ est un réel quelconque et on calculera $\|\mathbf{t}\|^2$)

2. Montrer que la norme respecte l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| . \tag{2}$$

Solution de l'exercice 1

1. Soit le vecteur $\mathbf{t} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{t}||^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = (\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + 2\lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \lambda^2 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \\ &= ||\boldsymbol{u}||^2 + 2\lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \lambda^2 ||\boldsymbol{v}||^2 \geq 0. \end{aligned}$$

   On note que $||\boldsymbol{v}||^2$ est non-nul. Il s'agit donc d'un polynôme du second degré qui est positif ou nul pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit qu'il ne possède pas de racine réelle simple, c'est-à-dire que son discriminant est négatif ou nul, $\Delta \leq 0$. Avec $\Delta = (2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 - 4||\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{u}||^2$. On retrouve ainsi l'inégalité de Schwartz :

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq ||\boldsymbol{u}||^2||\boldsymbol{v}||^2.$$

2. La norme $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$ mesure la longueur du vecteur $\boldsymbol{u}$.

   On compare

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= ||\boldsymbol{u}||^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + ||\boldsymbol{v}||^2 \\ \text{et } \ (||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||)^2 &= ||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{u}|| \, ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}||^2. \end{aligned}$$

   D'après l'inégalité de Schwartz, $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq ||\boldsymbol{u}||^2||\boldsymbol{v}||^2$. Comme $||\boldsymbol{u}||, ||\boldsymbol{v}|| > 0$, cela implique $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \leq ||\boldsymbol{u}|| \, ||\boldsymbol{v}||$. Donc

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u}||^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + ||\boldsymbol{v}||^2 &\leq ||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{u}|| \, ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}||^2 \\ \text{ou } \ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2 &\leq (||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||)^2. \end{aligned}$$

   En prenant la racine, on trouve l'inégalité triangulaire,

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||.$$

Exercice 2

On rappelle que le produit scalaire entre deux fonctions réelles de $L^2(I)$ s'écrit :

$$< f, g >= \int_I f(x)\, g(x)\, dx. \tag{3}$$

Soit $\{f_i\}_i$ une famille de fonctions telles que toute fonction $\varphi(x)$ ou $\xi(x)$ réelle s'exprime comme :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, f_i(x) \quad \text{et} \quad \xi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i\, f_i(x). \tag{4}$$

1. Exprimer alors $< \xi, \varphi >$ et $< \varphi, \varphi >$ en considérant que la famille $\{f_i\}_i$ constitue une base orthonormée de l'espace des fonctions réelles. Comparer avec la définition de la norme des vecteurs $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_i u_i^2}$.

Solution de l'exercice 2

1. On a

$$\begin{aligned}\langle \xi, \varphi \rangle = \int_I \xi(x)\varphi(x)\, dx &= \int_I \left(\sum_{i=1}^{\infty} D_i\, f_i(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} C_j\, f_j(x)\right) dx \\ &= \sum_{i,j} D_i C_j \int_I f_i(x) f_j(x)\, dx.\end{aligned}$$

L'ensemble $\{f_i\}$ constitue une base orthonormée. Donc

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_I f_i(x) f_j(x)\, dx = \delta_{ij}.$$

Par conséquent,

$$\langle \xi, \varphi \rangle = \sum_{i,j} D_i C_j \delta_{ij} = \sum_i D_i C_i.$$

On trouve également

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \sum_{i,j} C_i C_j \int_I f_i(x) f_j(x)\, dx = \sum_i C_i^2,$$

ce qui correspond à la définition de la norme donnée dans l'énoncé pour des vecteurs.

Exercice 3

On appelle polynômes de Legendre un ensemble de polynômes $P_n(x)$ de degré n qui sont orthogonaux entre eux au sens du produit scalaire défini dans l'exercice précédent avec l'intervalle $I = [-1, 1]$.

1. Trouver les trois premiers polynômes ($n = 0$, 1 et 2) de Legendre.
2. Vérifier que les trois polynômes $n = 0, 1, 2$ que vous avez trouvés sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \tag{5}$$

En fait c'est le cas pour tous les polynômes de Legendre quel que soit leur degré. En réalité c'est pour cela que l'on utilise des polynômes orthogonaux, ils sont solutions d'équations différentielles que l'on rencontre en physique.

Solution de l'exercice 3

1. Il est facile de Vérifier que

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_0, \\ P_1(x) &= a_1 + b_1 x \\ P_2(x) &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2. \end{aligned}$$

L'orthogonalité des polynômes P_n impose

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} a_0(a_1 + b_1 x)\, dx = 2a_0 a_1 = 0, \tag{6}$$

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} a_0(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, dx = 2a_0 a_2 + \frac{2}{3} a_0 c_2 = 0, \tag{7}$$

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (a_1 + b_1 x)(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, dx = 2a_1 a_2 + \frac{2}{3} a_1 c_2 + \frac{2}{3} b_1 b_2 = 0. \tag{8}$$

La norme des P_n n'est pas déterminée par ces conditions. Donc on peut multiplier chaque P_n par une constante non-nulle. C'est-à-dire, on peut choisir un des coéfficients non-nul.
On choisit $a_0 = 1$ par simplicité. Eq. (6) impose $a_1 = 0$. Eq. (7) impose $c_2 = -3a_2$. Eq. (8) impose $b_2 = 0$. Donc $P_1 = b_1 x$ et $P_2 = -a_2(3x^2 - 1)$. On choisit $b_1 = 1$ et $a_2 = -1$. Donc

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= x \\ P_2 &= 3x^2 - 1. \end{aligned}$$

2. On vérifie les équations différentielles pour
   - $n = 0$:
   $$(1 - x^2)P_0'' - 2xP_0' = (1 - x^2) \times 0 - 2x \times 0 = 0 \qquad \checkmark$$
   - $n = 1$:
   $$(1 - x^2)P_1'' - 2xP_1' + 2P_1 = (1 - x^2) \times 0 - 2x \times 1 + 2 \times x = -2x + 2x = 0 \qquad \checkmark$$
   - $n = 2$:
   $$(1-x^2)P_2'' - 2xP_2' + 6P_2 = (1-x^2)\times 6 - 2x \times 6x + 6 \times (3x^2 - 1) = 6 - 6x^2 - 12x^2 + 18x^2 - 6 = 0 \qquad \checkmark$$