J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta$$

où a est réel vérifiant $|a| < 1$. **Indication :** On effectuera le changement de variable $z = e^{i\theta}$ qui déterminera le choix du contour.

Solution de l'exercice 1

Le changement de variable $z = e^{i\theta}$ transforme l'intégrale de 0 à 2π dans une intégrale le long d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R = 1$ autour de l'origine du plan complexe. En outre,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \qquad dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta.$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2}\left(-i\frac{dz}{z}\right) \\ &= \frac{i}{a}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2 - a^{-1}(1 + a^2)z + 1}dz. \end{aligned}$$

L'intégrant à des singularités aux points

$$z_i^2 - a^{-1}(1 + a^2)z_i + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_\pm = \frac{1 + a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{(1 + a^2)^2}{4a^2} - 1} = \begin{cases} a^{-1} \\ a \end{cases} .$$

Comme $|a| < 1$, seulement le point $z_- = a$ se trouve à l'intérieur du contour. Il s'agit d'un pôle du premier ordre, donc

$$I = \frac{i}{a}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2 - a^{-1}(1 + a^2)z + 1}dz = \frac{i}{a}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 - a^{-1}(1 + a^2)z + 1}, z_-\right)$$

et

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 - a^{-1}(1 + a^2)z + 1}, z_-\right) = \frac{1}{a - a^{-1}}.$$

Le résultat final est donné par

$$I = \frac{i}{a}2\pi i\frac{1}{a - a^{-1}} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

1. $A = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\sqrt{3}\cos\theta} d\theta,$
2. $B = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{2+\cos\theta} d\theta,$ où n est un entier.

Indication : Pour A, on fera attention aux bornes d'intégration. Pour B, en considérant la parité de l'intégrant, on utilisera $e^{in\theta}$.

Solution de l'exercice 2

Comme dans l'exercice 1, on utilisera le changement de variable $\theta \to z = e^{i\theta}$. L'intégrale sur θ de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$ devient donc une intégrale de contour le long d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R = 1$ autour de l'origine du plan complexe. En outre,

$$d\theta = -i\frac{dz}{z}, \qquad \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + z^{-n}\right), \qquad \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - z^{-n}\right).$$

1. L'intégrant est pair, donc

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\sqrt{3}\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \left(-i\frac{dz}{z}\right) \frac{\left(\frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right)^2}{2+\sqrt{3}\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)} = \frac{i}{4\sqrt{3}}\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)}.$$

L'intégrant $f(z) = (z^2-1)^2/[z^2(z^2+(4/\sqrt{3})z+1)]$ à des singularités pour

$$z^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad z^2+(4/\sqrt{3})z+1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_\pm = -\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{4}{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\pm 1) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Les pôles z_0 (ordre 2) et z_+ (ordre 1) sont à l'intérieur du contour. Les résidus correspondants sont donnés par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,z_0) &= \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right]\right\} = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1}\right]\right\} \\
&= \lim_{z\to 0}\left\{\left(z^2-1\right)\frac{(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1)4z-\left(z^2-1\right)\left(2z+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1)^2}\right\} \\
&= (-1)\frac{-(-1)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{(1)^2} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \\
\mathrm{Res}(f,z_+) &= \frac{\left(z_+^2-1\right)^2}{z_+^2(z_+-z_-)} = \frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}{\frac{1}{3}(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A &= \frac{i}{4\sqrt{3}}\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)} = \frac{i}{4\sqrt{3}} 2\pi i \left\{\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_+)\right\} \\
&= -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left\{-\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2.

$$B = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{2+\cos\theta} d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \left(-i\frac{dz}{z}\right) \frac{\frac{1}{2}\left(z^n + z^{-n}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)} = -i \oint_{\mathcal{C}} dz \left\{ \frac{z^n}{z^2+4z+1} + \frac{z^{-n}}{z^2+4z+1} \right\}.$$

Pour le deuxième terme, on peut faire un changement de variable $z \to u = z^{-1}$, c'est-à-dire,

$$\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^{-n}}{z^2+4z+1} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{du}{u^2} \frac{u^n}{u^{-2}+4u^{-1}+1} = \oint_{\mathcal{C}} du \frac{u^n}{u^2+4u+1}.$$

Donc

$$B = -2i \oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^n}{z^2+4z+1}.$$

L'intégrant $f(z) = z^n/(z^2+4z+1)$ à des singularités pour

$$z^2+4z+1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_\pm = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Seulement z_+ est à l'intérieur du contour. Donc

$$B = -2i \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_+) = 4\pi \frac{z_+^n}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(-2+\sqrt{3}\right)^n.$$

Exercice 3

Trouver la transformée de Fourier inverse de

$$\tilde{x}(q) = \frac{e^{-iqt_0}}{-q^2 + i\alpha q + \beta}$$

en utilisant la méthode des résidus. Avec α et β deux réels strictement positifs.

Solution de l'exercice 3

On utilise la définition de la transformée de Fourier inverse,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(q) e^{iqt} dq.$$

On utilise le lemme de Jordan pour trouver un contour fermé dans le plan complexe. L'intégrant est donné par

$$\frac{1}{-q^2 + i\alpha q + \beta} e^{iq(t-t_0)}.$$

Pour $t - t_0 > 0$, on ferme dans le plan complexe $\Im[z] > 0$. Pour $t - t_0 < 0$, on ferme dans le plan complexe $\Im[z] < 0$. Donc,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t-t_0) \oint_{C_+} \tilde{x}(z) e^{izt} dz + H(-t+t_0) \oint_{C_-} \tilde{x}(z) e^{izt} dz \right\}.$$

On trouve les pôles,

$$-q^2 + i\alpha q + \beta = 0,$$

donc $z_\pm = \frac{i}{2}\alpha \pm \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$. Avec $\Im[z_\pm] > 0$, on obtient

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} H(t-t_0) \times 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\tilde{x}(z) e^{izt}, z_+\right) + \mathrm{Res}\left(\tilde{x}(z) e^{izt}, z_-\right) \right\}.$$

Les résidus peuvent être calculés en utilisant

$$\tilde{x}(z) e^{izt} = -\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)} e^{iz(t-t_0)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= iH(t-t_0) \left\{ -\frac{1}{z_+ - z_-} e^{iz_+(t-t_0)} - \frac{1}{z_- - z_+} e^{iz_-(t-t_0)} \right\} \\
&= -iH(t-t_0) \frac{1}{2\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \left\{ e^{i\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0)} - e^{-i\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0)} \right\} \\
&= H(t-t_0) \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \sin\left(\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,(t-t_0) \right).
\end{aligned}$$