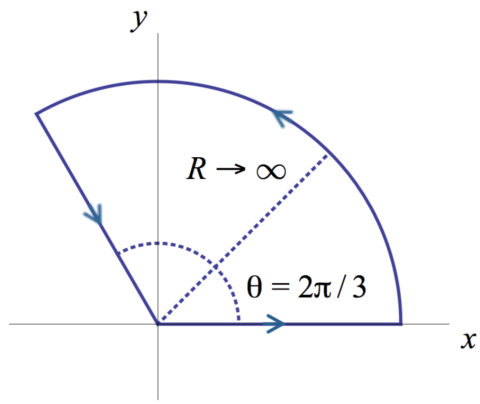
TD13 – Analyse Complexe IV

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Nous allons calculer l'intégrale
$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx.$$

1. Trouver les singularités de la fonction $f(z) = z/(1+z^3)$. Déterminer l'ordre des pôles. Indiquer les pôles sur la figure.



2. Trouver les valeurs de φ tel que $f(re^{i\varphi}) = c_\varphi f(r)$ avec $c_\varphi \in \mathbb{C}$ pour tous $r \in [0, \infty[$. Déterminer la constante c_φ correspondante.
3. Exprimer l'intégrale $\mathcal{I}$ en fonction de l'intégrale $\mathcal{I}'$ de $f(z)$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$, indiqué dans la figure. Justifier.
4. Déterminer
$$\mathcal{I}' = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{1+z^3}dz$$
par les calcul des résidus.
5. Donner la valeur de l'intégrale $\mathcal{I}$.
Aide :
$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{5\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
6. Indiquer un autre contour fermé $\mathcal{C}'$ sur la figure qui permettrait aussi de calculer $\mathcal{I}$.

Solution de l'exercice 1

1. La fonction $f(z)$ possède des singularités pour $1+z^3=0$. Donc
$$z^3 = \left(re^{i\theta}\right)^3 = r^3e^{3i\theta} = -1 = e^{i(2n+1)\pi}$$

avec $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On trouve $r = 1$ et $\theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$. La fonction $f(z)$ possède 3 pôles simples à

$$z_1 = e^{i\pi/3}, \qquad z_2 = e^{i\pi} = -1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = e^{5i\pi/3}.$$

2. On trouve

$$f\left(re^{e\varphi}\right) = \frac{re^{i\varphi}}{1 + r^3 e^{3i\varphi}}.$$

Donc

$$f\left(re^{e\varphi}\right) = e^{i\varphi} f(r)$$

pour $\exp[3i\varphi] = 1$. On obtient

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3},$$

avec $c_{\varphi_1} = 1$, $c_{\varphi_2} = \exp[2i\pi/3]$ et $c_{\varphi_3} = \exp[4i\pi/3]$.

3. Le contour consiste de 3 parties

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{0 \to \infty} f(z)\, dz + \int_{\infty \to e^{2i\pi/3}\infty} f(z)\, dz + \int_{e^{2i\pi/3}\infty \to 0} f(z)\, dz.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\int_{0 \to \infty} f(z)\, dz &= \mathcal{I}, \\
\int_{\infty \to e^{2i\pi/3}\infty} f(z)\, dz &= \lim_{R \to \infty} \int_0^{2\pi/3} d\left(Re^{i\phi}\right) \frac{Re^{i\phi}}{1 + R^3 e^{3i\phi}} = 0, \\
\int_{e^{2i\pi/3}\infty \to 0} f(z)\, dz &= -\int_0^\infty d\left(re^{2i\pi/3}\right) e^{2i\pi/3} f(r) = -e^{4i\pi/3}\mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I} - e^{4i\pi/3}\mathcal{I} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{I} = \frac{1}{1 - e^{4i\pi/3}}\mathcal{I}'.$$

4. Seulement le pôle $z_1 = e^{i\pi/3}$ est à l'intérieur du contour $\mathcal{C}$. Donc

$$\mathcal{I}' = 2\pi i\ \mathrm{Res}[f, z_1].$$

Somme il s'agit d'un pôle du 1$^{\text{er}}$ ordre, le résidu est donné par

$$\mathrm{Res}[f, z_1] = \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) f(z)\right] = \frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}' &= 2\pi i \frac{\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}}{(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\pi - i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3})} \\
&= 4\pi i \frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 + i\sqrt{3} + 2)(1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3})} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

5. On obtient

$$\mathcal{I} \;=\; \frac{1}{1-\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}\mathcal{I}' = \frac{2}{2+1+i\sqrt{3}} \times \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6. Le contour pourrait être fermé par le segment de cercle de ∞ à $e^{2i\pi/3}\infty$ dans le sens mathématique négatif. Au lieu de suivre la ligne $e^{2i\pi/3}\infty \to 0$, le contour pourrait suivre la ligne $e^{4i\pi/3}\infty \to 0$. Dans ce cas, c'est possible de fermer le contour par un segment de cercle dans le sens mathématique positif ou négatif.

Exercice 2

Trouver les pôles et les résidus correspondants de $f(z) = \tanh(z)$.

Solution de l'exercice 2

La fonction $f(z)$ peut être réécrite de la façon suivante,

$$f(z) = \frac{\sinh z}{\cosh z} = -i\frac{\sin(iz)}{\cos(iz)}.$$

La fonction $f(z)$ possède donc des singularités pour

$$\cos(iz) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_n = -i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \;\; (n \in \mathbb{N}).$$

Proche de ces points singuliers, on peut approximer la fonction $g(z) = (z - z_n)f(z)$ par

$$\sin(iz) \approx \sin(iz_n) + \mathcal{O}\left((z-z_n)^2\right), \quad \cos(iz) \approx -i\sin(iz_n)(z-z_n) + \mathcal{O}\left((z-z_n)^3\right) \qquad \Rightarrow \qquad g(z) \approx 1.$$

Comme $g(z_n)$ est fini, il s'agit de pôles du premier ordre. Donc

$$\mathrm{Res}(f, z_n) = g(z_n) = 1.$$

Exercice 3 Transformées de Fourier et analyse complexe

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$\dot{x} + \rho x = f(t)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+$.

1. Trouver une équation pour déterminer la tansformée de Fourier de $x(t)$.
2. Obtenir $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$.
3. Utiliser des méthodes de l'analyse complexe pour prendre la tansformée de Fourier inverse de $\tilde{x}_\delta(\omega)$ pour le cas $f(t) = \delta(t)$. Justifier toutes les étapes du calcul.
4. Démontrer que dans le cas général la solution peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\; f(s)x_\delta(t-s).$$

5. Obtenir $x(t)$ pour $f(t) = H(t)e^{-\nu t}$, où $\nu \in \mathbb{R}_+$ et $\nu \neq \rho$. Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside. Rappelons que : $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ sinon.

Solution de l'exercice 3

1. On prend la tansformée de Fourier de l'équation $\dot{x} + \rho x = f(t)$ pour obtenir

$$i\omega\tilde{x}(\omega) + \rho\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \rho}.$$

2. Pour $f(t) = \delta(t)$, on obtient $\tilde{f}(\omega) = 1$. Donc

$$\tilde{x}_\delta(\omega) = \frac{1}{i\omega + \rho}.$$

3. La tansformée de Fourier inverse est donnée par

$$x_\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{i\omega t}\frac{1}{i\omega + \rho} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}.$$

Donc il s'agit de calculer une intégrale de la forme $I = \int_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{itz} g(z)$ avec $g(z) \to 0$ pour $|z| \to \infty$. En utilisant le lemme de Jordan, on peut fermer le contour par un demi-cercle de rayon $R \to \infty$. Pour $t > 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe supérieur ($\Im[z] > 0$) tel que $\Re\,[itz] > 0$ et $e^{itz} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_+$). Pour $t < 0$, il faut choisir un demi-cercle dans le plan complexe inférieur ($\Im[z] < 0$) tel que $\Re\,[itz] > 0$ et $e^{itz} \to 0$ pour $|z| \to \infty$ (contour $\mathcal{C}_-$).

On obtient

$$x_\delta(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{H(t)\oint_{\mathcal{C}_+} dz\ e^{itz}\frac{1}{z - i\rho} + H(-t)\oint_{\mathcal{C}_-} dz\ e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}\right\}.$$

La fonction à intégrer est analytique en $\mathbb{C}\backslash\{i\rho\}$. En $z_0 = i\rho$, elle possède un pôle simple. Donc on peut utiliser le théorème des résidus pour obtenir

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{H(t)2\pi i\sum_{\Im[z_0]>0}\mathrm{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}, z_0\right) + H(-t)2\pi i\sum_{\Im[z_0]<0}\mathrm{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}, z_0\right)\right\} \\ &= H(t)\,\mathrm{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}, i\rho\right). \end{aligned}$$

Le résidu est donné par

$$\mathrm{Res}\left(e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}, i\rho\right) = \lim_{z\to i\rho}\left[(z - i\rho)e^{itz}\frac{1}{z - i\rho}\right] = e^{-\rho t}.$$

Donc $x_\delta(t) = H(t)e^{-\rho t}$.

4. Dans le cas général, on trouve

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \rho} = \tilde{f}(\omega)\cdot\tilde{x}_\delta(\omega).$$

Donc

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[\tilde{f}(\omega)\cdot\tilde{x}_\delta(\omega)\right] = (f * x_\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s)x_\delta(t - s).$$

5. On trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \; H(s) e^{-\nu s} H(t-s) e^{-\rho(t-s)} = H(t) e^{-\rho t} \int_0^t ds \; e^{(\rho-\nu)s} \\ &= H(t) e^{-\rho t} \left[\frac{1}{\rho-\nu} e^{(\rho-\nu)s} \right]_0^t = H(t) \frac{1}{\rho-\nu} \left(e^{-\nu t} - e^{-\rho t} \right). \end{aligned}$$