TD 14 – Calcul des perturbations

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Soit l'équation

$$x^3 - 2x^2 - (1+\varepsilon)x + 2 = 0.$$

Une solution de l'équation non-perturbée (i.e. pour $\varepsilon = 0$) est $x_0 = 1$. Trouver la correction à cette racine à l'ordre 1 en ε.

Solution de l'exercice 1

$1^3 - 2 \times 1^2 - 1 + 2 = 0$. Donc $x_0 = 1$ est une solution à l'ordre ε^0. On pose $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Avec

$$\begin{aligned} x^3 &= x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ x^2 &= x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - (1+\varepsilon)x + 2 &= x_0^3 + 3\varepsilon x_0^2 x_1 - 2x_0^2 - 4\varepsilon x_0 x_1 - x_0 - \varepsilon x_1 - \varepsilon x_0 + 2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 3\varepsilon x_1 - 4\varepsilon x_1 - \varepsilon x_1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = -\varepsilon(2x_1 + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Donc $x_1 = -1/2$.

Exercice 2

Trouver les corrections jusqu'à l'ordre 2 en ε de la racine de l'équation

$$x \sin x = \varepsilon$$

pour $x_0 = \pi$. Les solutions exactes pour $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.25$ sont respectivement 3.138406317, 3.109426839 et 3.059796698999. Comparer ces valeurs aux solutions approchées à l'ordre 1 et 2 trouvées précédemment.

Solution de l'exercice 2

D'abord on cherche la correction à l'ordre ε^1, c'est-à-dire, on pose $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. On obtient

$$(x_0 + \varepsilon x_1)\sin(x_0 + \varepsilon x_1) = x_0 \sin x_0 + \varepsilon\,(x_1 \sin x_0 + x_0 x_1 \cos x_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = -\varepsilon \pi x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Donc $\pi x_1 = 1$ ou $x_1 = -1/\pi$.

Maintenant on cherche la correction à l'ordre ε^2, c'est-à-dire, on pose $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. On obtient

$$\begin{aligned} & (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)\sin(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) \\ = \; & x_0 \sin x_0 + \varepsilon\,(x_1 \sin x_0 + x_0 \cos x_0 \; x_1) + \varepsilon^2 \left(x_2 \sin x_0 + (x_0 x_2 + x_1^2)\cos x_0 - \frac{1}{2} x_0 x_1^2 \sin x_0 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ = \; & \varepsilon - \left(\pi x_2 + \frac{1}{\pi^2} \right) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Donc $-(\pi x_2 + 1/\pi^2) = 0$ ou $x_2 = -1/\pi^3$.

Par conséquent,

$$x = \pi - \frac{\varepsilon}{\pi} - \frac{\varepsilon^2}{\pi^3} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

ϵ	ordre 1	ordre 2	solution exacte
0.01	**3.138409**555	**3.1384063**30	3.138406317
0.1	**3.109**761665	**3.1094**39150	3.109426839
0.25	**3.06**2015182	**3.059**999461	3.059796698999

Exercice 3

Soit l'équation :

$$x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0. \tag{1}$$

On remarque que la somme des coefficients de cette équation (non perturbée) vaut 0. Donc $x_0 = 1$ est une solution. On considère maintenant l'équation perturbée :

$$x^6 - 4x^5 + (2+\varepsilon)x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0. \tag{2}$$

1 - Calculer la correction à la racine x_0 de l'équation (2) à l'ordre 1 en ε et comparer à la solution exacte de l'équation suivante :

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 6x + 1 = 0 \tag{3}$$

qui est $x = 1.10565$.

2 - Si on est courageux, on pourra calculer l'ordre 2 : $x_2 = \frac{1}{12}\frac{29}{144}$ et si on est très courageux on pourra calculer l'ordre 3 : $x_3 = \frac{1}{12}\frac{505}{10368}$. Montrer que l'on se rapproche de la valeur exacte quand on considère les ordres supérieurs à 1.

Solution de l'exercice 3

1 - Avec $x = x_0 + \epsilon x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} & x^6 - 4x^5 + (2+\varepsilon)x^4 - 6x^2 + 6x + 1 \\ = \;& x_0^6 - 4x_0^5 + 2x_0^4 - 6x_0^2 + 6x_0 + 1 + \varepsilon(6x_0^5x_1 - 20x_0^4x_1 + 8x_0^3x_1 + x_0^4 - 12x_0x_1 + 6x_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ = \;& \varepsilon(6x_1 - 20x_1 + 8x_1 + 1 - 12x_1 + 6x_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \varepsilon(-12x_1 + 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Donc $x_0 + \varepsilon x_1 = 1 + \varepsilon/12$ et, en particulier, $x_0 + \varepsilon x_1 = 1.08333$.

2 - Si on est courageux, on pourra calculer l'ordre 2 : $x_2 = \frac{1}{12}\frac{29}{144}$ et si on est très courageux on pourra calculer l'ordre 3 : $x_3 = \frac{1}{12}\frac{505}{10368}$. Montrer que l'on se rapproche de la valeur exacte quand on considère les ordres supérieurs à 1.

ϵ	ordre 1	ordre 2	ordre 3	solution exacte
1	1.08333	1.10012	1.10417	1.10565

Exercice 4

Un point de masse m est suspendu par une barre rigide de longueur l à un point qui lui-même est soumis à une oscillation horizontale d'amplitude a et pulsation ω sur une barre horizontale. L'équation du mouvement de la masse est donnée par

$$l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin(\omega t)\cos\theta + g\sin\theta = 0.$$

Résoudre cette équation en supposant $\theta \ll 1$. Dans quelles conditions cette approximation est-elle valable ?

Solution de l'exercice 4

Pour $\theta \ll 1$, on peut approximer $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$. Donc l'équation du mouvement devient

$$l\ddot{\theta} - a\omega^2 \sin(\omega t) + g\theta = 0,$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{a}{l}\omega^2 \sin(\omega t).$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$\theta_0(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Pour $\omega \neq \sqrt{g/l}$, une solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par $\theta_p(t) = C\sin(\omega t)$ avec

$$-C\omega^2 + C\frac{g}{l} = \frac{a}{l}\omega^2, \qquad \textit{soit} \qquad C = \frac{a}{l}\frac{\omega^2}{\frac{g}{l} - \omega^2}.$$

Donc

$$\theta_0(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + \frac{a}{l}\frac{\omega^2}{\frac{g}{l} - \omega^2}\sin(\omega t).$$

Avec les conditions initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, on obtient $A = 1$ et $B = -\sqrt{l/g}\,\omega C$. Par conséquent,

$$\theta_0(t) = \cos(\Omega t) + \frac{a}{l}\frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]$$

avec $\Omega = \sqrt{g/l}$.

Donc l'approximation des petits angles reste correcte, si

$$\frac{a}{l}\frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}, \frac{a}{l}\frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}\frac{\omega}{\Omega} \ll \epsilon^{-1}.$$

C'est-à-dire, si les deux fréquences ne sont pas trop proches.

Exercice 5

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\lambda}{2}x^2 - \alpha y, \\ \dot{y} = \frac{\lambda}{2}y^2 - \alpha x. \end{cases} \tag{4}$$

1 - Est-ce-que la solution stationnaire $x(t) = y(t) = 0$ est stable ? Pour cela on représentera graphiquement le vecteur vitesse pour des valeurs voisines du point $O(x = 0, y = 0)$. Puis on donnera la solution analytique $[x(t), y(t)]$ des solutions au voisinage de O. On choisira pour cela les deux conditions initiales suivantes :

$$\text{(i) } [x(t=0) = \varepsilon, y(t=0) = \varepsilon] \quad \text{et} \quad \text{(ii) } [x(t=0) = -\varepsilon, y(t=0) = \varepsilon].$$

2 - On s'aperçoit que se limiter à l'ordre 1, revient à linéariser le problème : on peut écrire $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{r}$, où $\underline{\mathbf{M}}$ est une matrice 2×2. Diagonaliser $\underline{\mathbf{M}}$, trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Commenter.

3- Le système d'équations (4) admet-il d'autres solutions stationnaires ? Sont-elles stables ?

Solution de l'exercice 5

1 - On pose $x(t) = 0 + \epsilon x_1(t)$ et $y(t) = 0 + \epsilon y_1(t)$. Au premier ordre en ϵ, les équations deviennent

$$\dot{x}_1 = -\alpha y_1, \qquad \dot{y}_1 = -\alpha x_1. \tag{5}$$

Les deux équations peuvent être combinées en les dérivant encore une fois,

$$\ddot{x}_1 = -\alpha \dot{y}_1 = \alpha^2 x_1, \qquad \ddot{y}_1 = -\alpha \dot{x}_1 = \alpha^2 y_1.$$

Les solutions sont données par

$$x_1(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}, \qquad y_1(t) = Ce^{\alpha t} + De^{-\alpha t}.$$

En substituant ces solutions dans les équations (6), on obtient

$$A\alpha e^{\alpha t} - B\alpha e^{-\alpha t} = -\alpha\left(Ce^{\alpha t} + De^{-\alpha t}\right) \qquad C\alpha e^{\alpha t} - D\alpha e^{-\alpha t} = -\alpha\left(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right).$$

Donc $C = -A$ et $D = B$, c'est-à-dire,

$$x_1(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}, \qquad y_1(t) = -Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}.$$

(i) Pour $x_1(0) = y_1(0) = 1$, on obtient $A + B = 1$ et $-A + B = 1$. Donc $A = 0$ et $B = 1$ et, par conséquent, $x_1(t) = y_1(t) = \exp[-\alpha t]$. Pour $\alpha > 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0$ (stable). Pour $\alpha < 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} y_1(t) = \infty$ (instable).

(ii) Pour $x_1(0) = -1$ et $= y_1(0) = 1$, on obtient $A + B = -1$ et $-A + B = 1$. Donc $A = -1$ et $B = 0$ et, par conséquent, $-x_1(t) = y_1(t) = \exp[\alpha t]$. Pour $\alpha > 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \infty$ (instable). Pour $\alpha < 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0$ (stable).

2 - Les équations (6) peuvent s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{f}v = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{f}r.$$

La matrice

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres $\lambda_\pm = \pm\alpha$. Les vecteurs propres associés sont

$$\boldsymbol{f}u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}u_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si le vecteur position $\boldsymbol{f}r$ est parallèle à $\boldsymbol{f}u_\pm$, le vecteur vitesse $\boldsymbol{f}v$ est collinéaire à $\boldsymbol{f}r$. Selon le signe de α, le vecteur vitesse $\boldsymbol{f}v$ est orienté vers l'origine (ligne stable) ou vers l'infini (ligne instable). Si le vecteur position $\boldsymbol{f}r$ est parallèle à $\boldsymbol{f}u_\pm$, le système est instable.

3 - Si $\lambda \neq 0$, le système d'équations (4) admet une autre solution stationnaire, $x_0 = y_0 = 2\alpha/\lambda$. On pose $x(t) = x_0 + \epsilon x_1(t)$ et $y(t) = y_0 + \epsilon y_1(t)$. Au premier ordre en ϵ, les équations deviennent

$$\dot{x}_1 = 2\alpha x_1 - \alpha y_1, \qquad \dot{y}_1 = -\alpha x_1 + 2\alpha y_1. \tag{6}$$

La matrice associée,

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix},$$

a les valeurs propres α et 3α. Si $\alpha > 0$, les valeurs propres sont positives et la solution est instable. Si $\alpha < 0$, les valeurs propres sont négatives et la solution est stable.