J. COLLOT, M. ISMAIL ET J. MEYER

Exercice 1 Stabilité d'interfaces

Considérons une interface (par exemple entre solide et liquide, lors de la coulée continue en métallurgie) définie par la fonction $u(x,t)$, et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -au - bu^3 + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

dans laquelle nous supposons les coefficients a, b et d strictement positifs. La solution stationnaire est naturellement $u(x,t) = 0$.

1 - Discuter de la stabilité linéaire de cette solution selon que le coefficient c est positif ou négatif.

2 - Rechercher les seuils d'instabilité.

Solution de l'exercice 1

1 - On pose $u(x,t) = 0 + \epsilon u_1(t)$. A l'ordre 1 en ϵ, l'équation devient donc

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -au_1 + c\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - d\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}.$$

Pour résoudre cette ED linéaire, on prend sa TF spatiale,

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = -a\tilde{u}_1 - cq^2\tilde{u}_1 - dq^4\tilde{u}_1.$$

La solution prend la forme

$$\tilde{u}_1(q,t) = A_q e^{-\alpha_q t} \qquad avec \qquad \alpha_q = a + cq^2 + dq^4.$$

Donc l'interface est stable, si $\alpha_q > 0$ pour tous les q. C'est le cas, si l'équation $a + cq^2 + dq^4 = 0$ n'a pas de solutions réelles. Comme $a, d > 0$, c'est toujours le cas pour $c > 0$. Pour $c < 0$, on obtient

$$q^2 = -\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4d^2} - \frac{a}{d}}.$$

Il n'y a pas de solution réelle, si $c^2/(4d^2) - a/d < 0$, soit $c^2 < 4ad$. Donc l'interface est stable pour $c > -2\sqrt{ad}$.

2 - Pour $c < -2\sqrt{ad}$, on trouve

$$q = \pm\sqrt{-\frac{c}{2d}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ad}{c^2}}\right)^{1/2}.$$

Le première valeur q qui devient instable à $c = -2\sqrt{ad}$ est donné par $q^* = \sqrt{-c/2d} = \sqrt{a/d}$. Pour des c plus négatifs, il y a une intervalle de q délimitée par $q_{\min} = q^*(1 - \sqrt{1 - 4ad/c^2})^{1/2}$ et $q_{\max} = q^*(1 + \sqrt{1 - 4ad/c^2})^{1/2}$ qui est instable.

Exercice 2 Oscillateur de Van der Pol

Rayleigh, à la fin du XIX° siècle, puis Van der Pol, dans les années 1920, se sont successivement intéressés à une équation susceptible de modéliser les oscillations auto-entretenues, comme celles des battements du cœur :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\xi\omega_0\varepsilon(x^2-1)\frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0,$$

où ω_0 est la pulsation propre.

1 - Approche qualitative : Le coefficient d'amortissement du système *perturbé* est donc $\xi_{pert.} = \xi\varepsilon(x^2-1)$. Analyser qualitativement l'évolution du système lorsque l'amplitude des oscillations est faible ($|x| < 1$) ou au contraire grande ($|x| > 1$).

2 - Démarrage des oscillations : On considère comme point de départ : $x(t=0) = \varepsilon$ et $\frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Montrer que la position d'équilibre $x = 0$ est instable. En supposant $x^2 \ll 1$, montrer que l'amplitude des oscillations croît exponentiellement, et déterminer avec quelle constante de temps.

3 - Etude du régime stationaire – cycle limite : On recherche assez naturellement une solution perturbée sous la forme :

$$x(t) = a\cos(\Omega t) + \varepsilon x_1(t),$$

avec $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$. Déterminer alors les expressions de a, $x_1(t)$ et ω_1 qui conduisent à l'élimination des termes résonants. Montrer finalement que cette condition (l'élimination des termes résonants) impose *une condition sur l'amplitude des oscillations* qui est indépendante des conditions initiales : nous obtenons ce qu'il convient d'appeler un *cycle limite*.

Note : on rappelle que $\sin(\Omega t)\cdot\cos^2(\Omega t) = \frac{1}{4}\left[\sin(\Omega t) + \sin(3\Omega t)\right]$.

Solution de l'exercice 2

1 - Pour $\xi_{pert.} < 0$, c'est-à-dire pour $|x| < 1$, on a une amplification des oscillations. Pour $\xi_{pert.} > 0$, c'est-à-dire pour $|x| > 1$, on a un amortissement des oscillations.

2 - Pour $x^2 \ll 1$, on peut approximer l'équation différentielle par une ED linéaire,

$$\ddot{x} - 2\xi\omega_0\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

On obtient des solutions de la forme $x(t) = A\exp[\lambda_+ t] + B\exp[\lambda_- t]$ avec

$$\lambda^2 - 2\xi\omega_0\varepsilon\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_\pm = \omega_0\left(\xi\varepsilon \pm i\sqrt{1-\xi^2\varepsilon^2}\right).$$

Comme $\Re[\lambda_\pm] > 0$, l'amplitude des oscillations croit exponentiellement avec le temps,

$$x(t) = \epsilon\, e^{\omega_0\xi\varepsilon t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2\varepsilon^2}\, t\right).$$

3 - On pose $x(t) = a\cos(\Omega t) + \varepsilon x_1(t)$ avec $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$. A l'ordre 1 en ε, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -a(\omega_0 + \epsilon\omega_1)\sin(\Omega t) + \varepsilon\dot{x}_1(t),\\
\ddot{x}(t) &= -a(\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0\omega_1)\cos(\Omega t) + \varepsilon\ddot{x}_1(t),\\
x^2(t) &= a^2\cos^2(\Omega t) + 2a\varepsilon\cos(\Omega t)x_1(t).
\end{aligned}$$

Donc
$$-2a\omega_0\omega_1\cos(\Omega t) + \ddot{x}_1(t) + 2a\xi\omega_0^2\left[a^2\cos^2(\Omega t) - 1\right]\sin(\Omega t) + \omega_0^2 x_1(t) = 0,$$
soit
$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 2a\omega_0\omega_1\cos(\Omega t) - \frac{1}{2}a\xi\omega_0^2\left(a^2 - 4\right)\sin(\Omega t) + \frac{1}{2}a^3\xi\omega_0^2\sin(3\Omega t).$$
Pour obtenir une solution stable, on choisit a et ω_1 tel que les termes résonants, $\sin(\Omega t)$ et $\cos(\Omega t)$, sont éliminés. C'est-à-dire, $a = \pm 2$ et $\omega_1 = 0$. L'amplitude des oscillations est fixée et ne dépend pas des conditions initiales ! La pulsation est inchangée.
L'équation pour x_1 devient
$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 4\xi\omega_0^2\sin(3\omega_0 t).$$
La solution prend la forme $x_1(t) = A\sin(3\omega_0 t)$ avec $(-9\omega_0^2 + \omega_0^2)A = 4\xi\omega_0^2$, soit $A = -\xi/2$. Donc
$$x(t) = \pm 2\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\xi\varepsilon\sin(3\omega_0 t).$$

Exercice 3 Ecosystème de prédateurs-proies

Une des intéractions fondamentales en écologie est celle des prédateurs et des proies. Le premier modèle pour la dynamique de ces deux populations a été proposé par Lotka et Volterra au début des années 1930.

Soit P le nombre des prédateurs et N le nombre des proies dans l'écosystème. Lotka et Volterra ont proposé

$$dN/dt = \alpha N - \beta NP, \tag{1}$$
$$dP/dt = \gamma NP - \delta P, \tag{2}$$

où α est le taux de croissance naturel des proies en l'absence de prédateurs. La présence des prédateurs cause la disparition des proies, proportionnellement au nombre de prédateurs et de proies, d'où le terme en $-\beta NP$ dans la première équation, β étant l'efficacité de la chasse. Dans l'équation qui régit la dynamique des prédateurs, nous voyons que la croissance est fonction du nombre de proies disponible, γ étant l'effet positif de la chasse, et le terme δ est le taux de mort naturel des prédateurs.

1 - Recherche d'un point fixe : Montrer que ce système possède un point fixe, c'est-à-dire un couple de valeurs N_0, P_0 pour lequel $dN/dt = dP/dt = 0$.

2 - Perturbation de la population des proies : Étudier la solution de ce système pour les faibles écarts au point fixe (c.-à-d. pour des conditions initiales du type $N(t=0) = N_0 + \epsilon$ et $P(0) = P_0$). Chercher la solution sous la forme $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$ et $P(t) = P_0 + \epsilon P_1(t)$, et en collectant les termes d'ordre 1 en ϵ, obtenir un système linéaire pour N_1 et P_1. Résoudre ce système et déduire également la forme du cycle limite, c'est-à-dire N_1 en fonction de P_1.

Questions additionnelles :

3 - Apparition d'harmoniques : Pousser les calculs à l'ordre 2 en ϵ et étudier l'apparition d'harmoniques supérieures.

4 - Une autre démarche : On pourra également remarquer que le cycle limite peut s'obtenir en divisant directement (1) par (2) et en résolvant l'équation différentielle du premier ordre. Comparer le résultat de ce calcul au résultat de la question 2.

Solution de l'exercice 3

1 - Le point fixe correspond à

$$(\alpha - \beta P_0)N_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad N_0 = 0 \ \ ou \ \ P_0 = \frac{\alpha}{\beta},$$
$$(\gamma N_0 - \delta)P_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad N_0 = \frac{\delta}{\gamma} \ \ ou \ \ P_0 = 0.$$

Donc il y a deux points fixes, $(N_0 = 0, P_0 = 0)$ et $(N_0 = \delta/\gamma, P_0 = \alpha/\beta)$.

2 - On pose $N(t) = N_0 + \epsilon N_1(t)$ et $P(t) = P_0 + \epsilon P_1(t)$. Donc

$$\epsilon \frac{dN_1}{dt} = \alpha N_0 + \epsilon\alpha N_1 - \beta N_0 P_0 - \epsilon\beta N_1 P_0 - \epsilon\beta N_0 P_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$
$$\epsilon \frac{dP_1}{dt} = \gamma N_0 P_0 + \epsilon\gamma N_1 P_0 + \epsilon\gamma N_0 P_1 - \delta P_0 - \epsilon\delta P_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

C'est-à-dire, les équations pour N_1 et P_1 prennent la forme

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha N_1 - \beta N_1 P_0 - \beta N_0 P_1, \qquad \frac{dP_1}{dt} = \gamma N_1 P_0 + \gamma N_0 P_1 - \delta P_1.$$

— Pour $(N_0 = 0, P_0 = 0)$, on obtient

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha N_1, \qquad \frac{dP_1}{dt} = -\delta P_1.$$

Donc $N_1(t) = N_1(0)\exp[\alpha t]$ (instable) et $P_1(t) = P_1(0)\exp[-\delta t]$ (stable).

— Pour $(N_0 = \delta/\gamma, P_0 = \alpha/\beta)$, on obtient

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha N_1 - \beta\frac{\alpha}{\beta}N_1 - \beta\frac{\delta}{\gamma}P_1 = -\frac{\beta\delta}{\gamma}P_1,$$
$$\frac{dP_1}{dt} = \gamma\frac{\alpha}{\beta}N_1 + \gamma\frac{\delta}{\gamma}P_1 - \delta P_1 = \frac{\alpha\gamma}{\beta}N_1.$$

Les deux équations peuvent être combinées dans une équation matricielle :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la stabilité, il faut trouver les valeurs propres de la matrice,

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix} - \lambda\mathbb{1}\right] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\beta\delta}{\gamma} = 0.$$

Donc $\lambda_\pm = i\sqrt{\alpha\delta}$ et

$$N_1(t) = A\cos(\sqrt{\alpha\delta}\,t) + B\sin(\sqrt{\alpha\delta}\,t), \qquad P_1(t) = C\cos(\sqrt{\alpha\delta}\,t) + D\sin(\sqrt{\alpha\delta}\,t).$$

Les conditions initiales donnent $A = N_1(0)$ et $C = P_1(0)$. En plus, les équations différentielles qui lient N_1 et P_1 donnent $\sqrt{\alpha\delta}\, B = -(\beta\delta/\gamma)C$ et $\sqrt{\alpha\delta}\, D = (\alpha\gamma/\beta)A$. Par conséquent,

$$N_1(t) = N_1(0)\cos(\sqrt{\alpha\delta}\, t) - \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}\,\frac{\beta}{\gamma}P_1(0)\sin(\sqrt{\alpha\delta}\, t),$$
$$P_1(t) = P_1(0)\cos(\sqrt{\alpha\delta}\, t) + \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\,\frac{\gamma}{\beta}N_1(0)\sin(\sqrt{\alpha\delta}\, t).$$

Pour $N_1(0) = 1$ et $P_1(0) = 0$, on obtient

$$N_1(t) = \cos(\sqrt{\alpha\delta}\, t), \qquad P_1(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\,\frac{\gamma}{\beta}\sin(\sqrt{\alpha\delta}\, t).$$

Les populations oscillent autour de leur valeur au point fixe.
Afin d'obtenir le cycle limite, les équations différentielles pour N_1 et P_1 peuvent se combiner sous la forme

$$\frac{dN_1}{dP_1} = \frac{dN_1/dt}{dP_1}dt = -\frac{\beta^2\delta}{\alpha\gamma^2}\frac{P_1}{N_1}.$$

Donc

$$N_1\, dN_1 + \frac{\beta^2\delta}{\alpha\gamma^2}P_1\, dP_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad N_1^2 + \frac{\beta^2\delta}{\alpha\gamma^2}P_1^2 = \text{cste},$$

ce qui décrit une ellipse. On vérifie que les solutions trouvées précédemment obéissent bien à cette relation.