TD 16 – Opérateurs linéaires I

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1 Identité de Jacobi

Démontrer que pour trois opérateurs A, B, C, nous avons

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Solution de l'exercice 1

On trouve

$$\begin{aligned}
& [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \\
= \; & [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] \\
= \; & A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
= \; & ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2 Identité de Jacobi Commutateurs d'opérateurs

Démontrer que les opérateurs O et $f(O)$ comuttent. $f(x)$ est une fonction analytique dans le voisinage de $x = 0$. Même chose pour $g(O)$ et $f(O)$. Démontrer que si A et B commutent, alors $f(A)$ et $g(B)$ commuttent.

Solution de l'exercice 2

Si $f(x)$ est analytique dans les voisinage de $x = 0$, la fonction peut être développée en série de Taylor,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Donc

$$[O, f(O)] = O\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n O^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n O^n\right) O = \sum_{n=0}^{\infty} a_n O^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n O^{n+1} = 0.$$

En outre,

$$\begin{aligned}
[g(O), f(O)] &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m O^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n O^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n O^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m O^m\right) \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m O^{n+m} - \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m O^{n+m} = 0.
\end{aligned}$$

Maintenant on considère deux opérateurs A et B qui commuttent, $[A, B] = 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
[g(B), f(A)] &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m B^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m B^m\right) \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m \left(B^m A^n - A^n B^m\right).
\end{aligned}$$

Donc il faut démontrer que $[B^m, A^n] = 0$. Avec $[A, B] = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} B^m A^n &= B^{m-1}ABA^{n-1} = B^{m-2}ABABA^{n-2} \\ &= B^{m-2}A^2B^2A^{n-2} = B^{m-3}ABABABA^{n-3} \\ &= \cdots = A^n B^m. \end{aligned}$$

Par conséquent, $[g(B), f(A)] = 0$.

Exercice 3 Exponentielle d'un opérateur (I)

Démontrer que

$$\frac{d}{dt}\exp[tA] = A\exp[tA],$$

où A est un opérateur linéaire.

Aide : Utiliser le développement de l'exponentielle et les règles habituelles de la dérivation.

Solution de l'exercice 3

On trouve

$$\frac{d}{dt}\exp[tA] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d}{dt}(t^n)\,A^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}AA^{n-1} = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n = A\exp[tA].$$

Exercice 4 Exponentielle d'un opérateur (II)

Démontrer que

$$\exp[P^{-1}AP] = P^{-1}\,\exp[A]\,P,$$

où A, P sont deux opérateurs linéaires.

Solution de l'exercice 4

On trouve

$$\exp[P^{-1}AP] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(PAP^{-1})^n.$$

En outre,

$$\begin{aligned} (PAP^{-1})^2 &= PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^2P^{-1} \\ (PAP^{-1})^3 &= PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1} = PA^3P^{-1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Donc

$$\exp[P^{-1}AP] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}PA^nP^{-1} = P\exp[A]P^{-1}.$$

Exercice 5 Commutation et exponentielle

1 - Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer A^2. En déduire une expression générale pour A^n selon que n est pair ou impair. Démontrer alors que
$$\exp[A] = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$
Aide : Décomposer la somme en termes pairs et impairs, et utiliser le développement en série des fonctions sin et cos.

2 - Soit maintenant les deux matrices
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que $C^2 = D^2 = 0$ et en déduire $e^C \cdot e^D$. Comparer $e^C \cdot e^D$ et e^{C+D}.

Solution de l'exercice 5

- On trouve
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} = -x^2\,\mathbb{1}.$$
Pour n pair, on obtient
$$A^n = \left(A^2\right)^{n/2} = \left(-x^2\,\mathbb{1}\right)^{n/2} = (-1)^{n/2}x^n\,\mathbb{1}.$$
Pour n impair, on obtient
$$A^n = \left(A^2\right)^{(n-1)/2}A = \left(-x^2\,\mathbb{1}\right)^{(n-1)/2}A = (-1)^{(n-1)/2}x^{n-1}A.$$
Donc
$$\begin{aligned}\exp[A] = \sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}A^n &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)!A^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty}}\frac{1}{(2p+1)!}A^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}\,\mathbb{1} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)!}(-1)^p x^{2p}A \\ &= \cos x\,\mathbb{1} + \frac{\sin x}{x}A.\end{aligned}$$
2 - On démontre
$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = 0.$$
Par conséquent, $C^n = D^n = 0$ pour $n \geq 2$. On obtient
$$\exp[C] = \sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}C^n = \mathbb{1} + C,$$
$$\exp[D] = \sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}D^n = \mathbb{1} + D,$$
$$\exp[C]\cdot\exp[D] = (\mathbb{1}+C)(\mathbb{1}+D) = \mathbb{1} + C + D + CD.$$

Avec $C + D = A$ et $[C, D] \neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\exp[C] \cdot \exp[D] = \mathbb{1} + A + CD \neq \mathbb{1} + A + DC = \exp[D] \cdot \exp[C],\\ \exp[C + D] = \exp[A] = \exp[D + C].\end{aligned}$$

Donc $\exp[C] \cdot \exp[D] \neq \exp[C + D]$.