J. COLLOT, M. ISMAIL ET J. MEYER

Conditions de Dirichlet Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période L satisfaisant les conditions suivantes :

— Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce [1] et sont en nombre fini dans tout intervalle fini,

— f admet en tout point une dérivé à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(2\pi nx/L) + b_n \sin(2\pi nx/L)]$ associée à f est convergente et on a

$$S_f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right] \tag{1}$$

avec $x_\pm = x \pm \varepsilon$ et $\varepsilon \to 0$. En particulier, $S_f(x) = f(x)$ si f est continue en x. De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Exercice 1

Est-ce que les fonctions $1/x$ et $\sin(1/x)$ sont développables en séries de Fourier dans un intervalle contenant $x = 0$?

Solution de l'exercice 1

On suppose que l'on étend la définition des fonctions en zéro. Par exemple qu'elles prennent la valeur zéro en $x = 0$. On rappelle les conditions suffisantes pour l'existence et la convergence des séries de Fourier :

— Existence : il suffit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soit de carré sommable

— Convergence : il suffit que la fonction f vérifie les conditions de Dirichlet.

Ainsi,

— il suffit de remarque que $f(x) = 1/x$ n'est pas de carré sommable (sa norme $||f||^2 = \int_0^1 (1/x^2)\, dx$ diverge). On ne peut donc pas assurer que sa série de Fourier existe. Cependant, le calcul du premier terme a_0 de la série de Fourier revient à calculer l'intégrale $\int_0^1 (1/x)\, dx$ qui diverge aussi. La série de Fourier n'existe donc pas.

— $f(x) = \sin(1/x)$ est de carré sommable. Donc sa série de Fourier existe. Par contre, elle ne vérifie pas les conditions de Dirichlet. En particulier, elle n'admet pas de limite ni de dérivée à droite en $x = 0$. La convergence de la série de Fourier en tout point n'est donc pas assurée.

Exercice 2

1. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f : x \longmapsto x^2$.
2. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{2}$$

1. On dit qu'un point x est une discontinuité de première espèce de f si f n'est pas continue en x et les limites à droite et à gauche, $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x \pm \varepsilon)$ existent.

Ce résultat fut une des fiertés d'Euler lorsqu'il l'établit vers 1730.

Solution de l'exercice 2

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la fonction $f(x)$ est de carré sommable. Elle est donc développable en série de Fourier avec $L = 2\pi$. On a

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}\,. \tag{3}$$

Comme la fonction f est paire, on obtient $b_n = 0$ pour tout n. De plus,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}x^2\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left\{\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{\pi n^2}\left\{-2\pi(-1)^n + \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ici on a fait plusieurs intégrations par partie et on a utilisé les relations $\sin(\pi n) = \sin(-\pi n) = 0$ et $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$.
On obtient donc :

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx). \tag{6}$$

D'autre part, la fonction $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet. Elle est en outre continue en tout point et $f(-\pi) = f(\pi)$. On a donc pour tout x :

$$S_f(x) = f(x).$$

Ainsi, pour $x = \pi$, on a

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

soit donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Et pour $x = 0$, on trouve

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 3

On considère la fonction "palier" définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases} \tag{7}$$

Trouver son développement en série de Fourier.

Solution de l'exercice 3

Afin de simplifier le calcul, au lieu de travailler avec la fonction et l'intervalle donnés, on pourrait introduire la fonction F définie sur $[-1, 1]$ de la manière suivante

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1/2, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 1/2. \end{cases} \tag{8}$$

Remarquons que les fonctions F et $f(x)$ coïncident sur l'intervalle $[0, 1]$. En outre, $F(x)$ vérifie bien les conditions de Dirichlet et est paire et périodique de période $L = 2$. Ainsi,

$$S_F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) \tag{9}$$

et

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)\, dx = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} F(x)\, dx = 2\int_{1/2}^{1} \cos(\pi n x) = \frac{2}{\pi n}\left[\sin(\pi n x)\right]_{1/2}^{1} = -\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right). \tag{11}$$

Comme $\sin(n\pi/2) = 0$ pour n pair et $\sin(n\pi/2) = (-1)^{(n-1)/2}$ si n impair, on remplace n par $2k + 1$ et on obtient

$$S_F(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos[\pi(2k+1)x]. \tag{12}$$

Comme $f(x) = F(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, cette série représente aussi la fonction $f(x)$ (en fait, il s'agit de la série de cosinus de $f(x)$).

Alternative On aurait pu bien évidemment travailler directement avec la fonction et l'intervalle donnés. En effet,

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)\right\}. \tag{13}$$

Avec

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$a_n = \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[\sin(2\pi n x)\right]_{1/2}^{1} = 0 \quad (15)$$

$$b_n = \int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = -\frac{1}{\pi n}\left[\cos(2\pi n x)\right]_{1/2}^{1} = -\frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]. \quad (16)$$

Ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2\pi(2k-1)x). \quad (17)$$

Il s'agit bien évidemment d'une série de Fourier différente de S_F (12). Elle a cependant le même comportement que $S_F(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. C'est-à-dire, $S_f = S_F$ au sens de la norme. Par contre, les deux séries ne sont pas égales en tout point. En particulier, sur les bords de l'intervalle on trouve $S_f(0) = S_f(1) = 1/2$, alors que $S_F(0) = f(0) = 0$ et $S_F(1) = f(1) = 1$. Si on considère les extensions périodiques des fonctions f et F, on voit que la fonction périodique générée par f possède des discontinuités en $x = 0$ et $x = 1$ tandis que celle générée par F est continue en ces points. D'après la relation de Dirichlet vue à l'exercice 1, les deux séries diffèrent par leurs valeurs en ces points.

Exercice 4 Corde vibrante et force magnétique

On considère une corde métallique fixée à ses extrémités en $x = 0$ et en $x = L$. On s'intéresse aux petits déplacements transversaux $y(x,t)$ en négligeant la pesanteur et les forces de frottement. La corde est plongée dans un champ magnétique $B(x) = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ constant et orienté selon (Oz) ; cette corde est de plus parcourue par un courant $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. L'équation différentielle vérifiée est alors de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{I_0 B_0}{\mu}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t), \quad (18)$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec T la tension de la corde et μ sa masse linéique. La déformation initiale est supposée de la forme $y(x, t = 0) = f(x)$, où f est une fonction développable en série de Fourier, et la corde est lancée sans vitesse initiale. Déterminer les solutions de l'équation (18)

Solution de l'exercice 4

Pour vérfier les conditions au bords $y(0) = y(L)$, on choisit une série de sinus

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (19)$$

Avec

$$b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\,dx \quad (20)$$

L'équation (18) s'écrit donc sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) - \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}b_n(t) - \frac{1}{c^2}b_n''(t)\right\}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad = \quad \frac{I_0 B_0}{\mu}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega t). \tag{21}$$

Comme $\{\sin(\pi n x/L)\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ constitue une base orthogonale, on obtient par identification

$$-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}b_n(t) - \frac{1}{c^2}b_n''(t) = \frac{I_0 B_0}{\mu}\cos(\omega t)\delta_{n,1}.$$

Avec $\delta_{n,1} = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon. On résout d'abord l'équation homogène

$$b_n''(t) + \frac{\pi^2 n^2 c^2}{L^2}b_n(t) = 0,$$

dont les solutions générales sont

$$b_n(t) = \alpha_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \beta_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right).$$

Pour $n = 1$, il faut en plus trouver une solution particulière de l'équation inhomogène,

$$b_1''(t) + \frac{\pi^2 c^2}{L^2}b_1(t) = -\frac{c^2 I_0 B_0}{\mu}\cos(\omega t).$$

On essaie $b_1(t) = \gamma_1\cos(\omega t)$ pour trouver

$$-\omega^2\gamma_1\cos(\omega t) + \frac{\pi^2 c^2}{L^2}\gamma_1\cos(\omega t) = -\frac{c^2 I_0 B_0}{\mu}\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1 = \frac{c^2 I_0 B_0}{\mu(\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{L^2})}.$$

Donc

$$b_n(t) = \alpha_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \beta_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{c^2 I_0 B_0}{\mu(\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{L^2})}\cos(\omega t)\delta_{n,1}$$

et

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \beta_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{c^2 I_0 B_0}{\mu(\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{L^2})}\cos(\omega t)\delta_{n,1}\right\}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Les coefficients α_n et β_n sont détérminés en utilisant les conditions initiales

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n + \frac{c^2 I_0 B_0}{\mu(\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{L^2})}\delta_{n,1}\right\}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = f(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\beta_n\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = 0.$$

Donc $\beta_n = 0$ tandis que $c_n = \alpha_n + \delta_{n,1}c^2 I_0 B_0/[\mu(\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{L^2})]$ sont les coefficients de la série de sinus de la fonction $f(x)$.

Exercice 5 Base de Fourier, base des sinus et base des cosinus

1. Donner l'expression des coefficients de Fourier a_n et b_n pour une fonction f à valeurs réelles
   a) dans la base Fourier pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$,
   b) dans la base de Fourier pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[-L, L]$,
   c) dans la base des cosinus pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$,
   d) dans la base des sinus pour $f(x)$ définie sur un intervalle $[0, L]$.
   Pour chacun des cas indiquer la périodicité de la fonction générée.
2. Représenter graphiquement la série de Fourier obtenue dans les cas a), c) et d) pour la fonction $f(x) = x$.
3. D'une manière générale, indiquer comment, et sur quel intervalle, étendre $f(x)$ définie sur $[0, L]$ de façon à ce qu'une décomposition dans la base de Fourier de la nouvelle fonction étendue donne une série identique à :
   a) une décomposition sur la base des sinus,
   b) une décomposition sur la base des cosinus.

Solution de l'exercice 5

1. Les coefficients a_n et b_n :
   a)
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx.$$
   b)
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$
   c)
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$
   d)
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx.$$
2. Série de Fourier
$$S_f(x) = L\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\right\}. \tag{22}$$
   Série de cosinus :
$$S_f(x) = L\left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos\left(\pi n\frac{x}{L}\right)\right\}. \tag{23}$$

Série de sinus :

$$S_f(x) = L\left\{-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n \sin\left(\pi n\frac{x}{L}\right)\right\}. \tag{24}$$

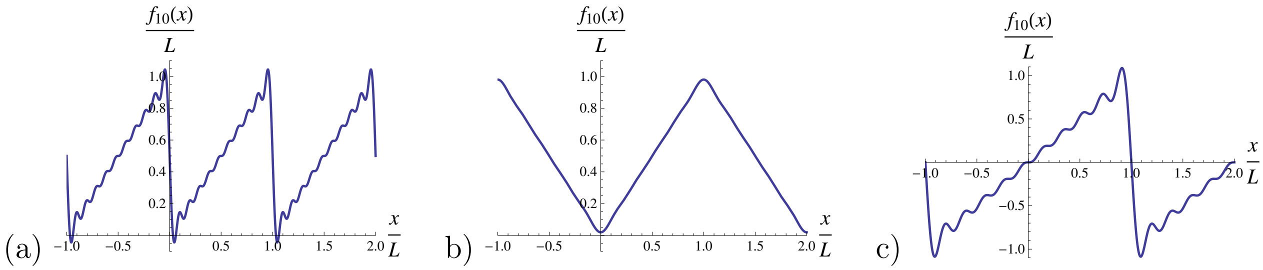

FIGURE 1 – a) Série de Fourier, b) série de cosinus et c) série de sinus pour $f(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$. Les sommes sont tronquées à $n = 10$.

3. a) Pour obtenir une série de sinus, il suffit de prendre une fonction impaire F définie comme suit

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in [0, L], \\ -f(-x) & \forall x \in [-L, 0]. \end{cases} \tag{25}$$

b) Pour obtenir une série de cosinus, il suffit de prendre une fonction paire F définie comme suit

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in [0, L], \\ f(-x) & \forall x \in [-L, 0]. \end{cases} \tag{26}$$

Exercice 6

La fonction "trapèze" peut être définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ \frac{x-1/2}{s} & \text{si } x \in [1/2, 1/2+s[, \\ 1 & \text{si } x \in [1/2+s, 1]. \end{cases} \tag{27}$$

Déterminer sa décomposition en série de Fourier. Ensuite étudier le cas particulier pour lequel $s \to 0$ qui illustre bien que : *plus les variations d'une fonction sont rapides, plus ses composantes de "grandes fréquences" prennent de l'importance.*

Solution de l'exercice 6

On choisit la même démarche que pour l'exo 4, c'est-à-dire qu'on définit

$$F_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \in [0; 1/2[, \\ \frac{x-1/2}{s} & \text{si } |x| \in [1/2; 1/2+s[, \\ 1 & \text{si } |x| \in [1/2+s; 1], \end{cases}$$

sur l'intervalle étendu $[-1; 1]$.
$F_s(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet et est paire de période $L = 2$, donc

$$S_{F_s}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x)$$

et

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)\, dx = \frac{1}{s}\int_{1/2}^{1/2+s} (x-\frac{1}{2})\, dx + \int_{1/2+s}^{1} dx$$

$$= \frac{1}{2s}\left[x^2 - x\right]_{1/2}^{1/2+s} + [x]_{1/2+s}^{1} = \frac{1}{2s}\left[(\frac{1}{2}+s)^2 - \frac{1}{2} - s - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] + 1 - \frac{1}{2} - s = \frac{1}{2}(1-s)$$

et d'autre part

$$a_n = \int_{-1}^{1} F(x)\cos(\pi n x)\, dx = \frac{2}{s}\int_{1/2}^{1/2+s} (x-\frac{1}{2})\cos(\pi n x)\, dx + 2\int_{1/2+s}^{1} \cos(\pi n x)\, dx$$

$$= \frac{2}{s}\left\{\left[\frac{1}{\pi n}(x-\frac{1}{2})\sin(\pi n x)\right]_{1/2}^{1/2+s} - \frac{1}{\pi n}\int_{1/2}^{1/2+s} \sin(\pi n x)\, dx\right\} + \frac{2}{\pi n}\left[\sin(\pi n x)\right]_{1/2+s}^{1}$$

$$= \frac{2}{s}\left\{\frac{s}{\pi n}\sin\left(\pi n(\frac{1}{2}+s)\right) + \frac{1}{(\pi n)^2}\left[\cos(\pi n x)\right]_{1/2}^{1/2+s}\right\} - \frac{2}{\pi n}\sin\left(\pi n(\frac{1}{2}+s)\right)$$

$$= \frac{2}{s(\pi n)^2}\left\{\cos\left(\pi n(\frac{1}{2}+s)\right) - \cos(\frac{\pi}{2}n)\right\}$$

$$= -\frac{4}{s(\pi n)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n(1+s)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}ns\right),$$

où l'on a utilisé la relation $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin[(a+b)/2]\sin[(a-b)/2]$.
Donc

$$S_{F_s}(x) = \frac{1}{2}(1-s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{s(\pi n)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n(1+s)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}ns\right)\cos(\pi n x).$$

Ainsi, comme $F_s(x)$ est continue (pour toute valeur finie de s) et vérifie les conditions de Dirichlet et, en plus, $F_s(-1) = F_s(1)$, la série converge vers la fonction pour tout x. Donc $S_{F_s}(x) = F_s(x)$ et ainsi $f_s(x) = S_{F_s}(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$.

Dans la limite $s \to 0$, $f_s(x)$ tend vers la fonction palier vue à l'exercice 3. Avec le développement en série de Taylor,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n(1+s)\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}ns\right)}{\frac{\pi}{2}ns} = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + s\frac{\pi}{2}n\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \mathcal{O}(s^2),$$

on trouve pour $S_{F_s}(x)$:

$$\lim_{s\to 0} S_{F_s}(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin(\frac{\pi}{2}n)\cos(\pi n x),$$

ce qui est bien la série de la fonction "palier" étudiée dans l'exo 3. [Noter que seuls les termes avec n impair sont non-nuls. Pour s fini, on a aussi des contributions pour n pair.]