J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1 Polynômes de Legendre

Nous avons vu que les polynômes de Legendre $L_n(x)$ sont des polynômes de degrès n qui vérifient l'équation de Legendre,

$$(1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

Nous voulons démontrer que cette définition des polynômes de Lengendre implique qu'ils sont orthogonaux les uns aux autres sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Vérifier que l'équation de Legendre peut se mettre sous la forme :

$$[(1-x^2)L_n'(x)]' + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

2. Démontrer que le produit scalaire $(L_n, L_m) = 0$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ si $m \neq n$.
Indication : Faire cela (i) en écrivant l'équation de Legendre sous cette forme pour deux valeurs n et m :

$$\begin{aligned}
[(1-x^2)L_n'(x)]' + n(n+1)L_n(x) &= 0, \\
[(1-x^2)L_m'(x)]' + m(m+1)L_m(x) &= 0;
\end{aligned}$$

(ii) en multipliant la première relation par $L_m(x)$ et la seconde par $L_n(x)$; (iii) en intégrant entre -1 et 1 (il faudra problablement intégrer par partie à un moment ou un autre) ; (iv) en retranchant l'une des égalités ainsi obtenues de l'autre.

Solution de l'exercice 1

1. On vérifie facilement que

$$\left[(1-x^2)L_n'(x)\right]' = (1-x^2)L_n''(x) - 2xL_n'(x).$$

2. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)L_n'(x)\right]' L_m(x)\,dx &= \Big[(1-x^2)L_n'(x)L_m(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1-x^2)L_n'(x)L_m'(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1} (1-x^2)L_n'(x)L_m'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

En suivant la démarche indiquée, on trouve alors

$$\{n(n+1) - m(m+1)\} \int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)L_n'(x)\right]' L_m(x)\,dx - \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)L_m'(x)\right]' L_n(x)\,dx = 0.$$

Pour $n \neq m$, donc $\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)\,dx = 0$; c'est-à-dire, L_n et L_m sont orthogonaux.

Exercice 2 Périodicité

On considère la fonction

$$f(x) = \sin(5\pi x) - \cos(8\pi x).$$

1. Donner la période L de cette fonction.
2. Donner les coefficients de la série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, L]$.

Solution de l'exercice 2

1. On trouve

$$f(x+L) = \sin(5\pi x)\cos(5\pi L) + \cos(5\pi x)\sin(5\pi L) - \cos(8\pi x)\cos(8\pi L) + \sin(8\pi x)\sin(8\pi L).$$

Donc $f(x+L) = f(x)$ pour

$$5\pi L = 2\pi n \text{ et } 8\pi L = 2\pi m \text{ avec } n, m \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire, $L = \frac{2}{5}n = \frac{1}{4}m$. Le plus petits entiers naturels qui permettent d'obtenir cette egalité sont $n = 5$ et $m = 8$. Par conséquent, $L = 2$.

2. La série de Fourier est donnée par

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(2\pi n\frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(2\pi n\frac{x}{L}\right)\right] = -\cos(2\pi \times 8 \times \frac{x}{2}) + \sin(2\pi \times 5 \times \frac{x}{2}).$$

Donc $a_8 = -1$ et $b_5 = 1$ tandis que tous les autres coefficients sont nuls.

Exercice 3 Variation d'une population : Fonction génératrice

On suppose que la taille d'un système varie de façon aléatoire avec une probabilité de passer de n à $n \pm 1$ qui est proportionnelle à n. La probabilité $P_n(t)$ qu'à l'instant t le système ait la taille n obéit à l'équation

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\left\{(n-1)P_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1}(t) - 2nP_n(t)\right\}.$$

Ici $\tau > 0$ est un temps caractéristique. Nous supposons que $P_1(t=0) = 1$ et $P_{n\neq 1}(t=0) = 0$.

Nous allons considérer les probabilités $P_n(t)$ comme les coefficients de la série de Fourier complexe d'une fonction $u(x,t)$ définie sur l'intervalle $\mathcal{I} = [-\pi, \pi]$, c'est-à-dire

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(t)e^{inx}.$$

1. Donner une expression pour $P_n(t)$ en fonction de $u(x,t)$.
2. Utiliser les conditions initiales pour trouver $u(x,0)$.
3. Démontrer que $u(x,t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{2i}{\tau}(\cos x - 1)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{4i}{\tau}\sin^2\frac{x}{2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

4. En faisant les substitutions $T = 2t/\tau$ et $z = 1/\tan(x/2)$, l'équation différentielle prend la forme beaucoup plus simple
$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + i\frac{\partial}{\partial z}\right) u(z,T) = 0.$$
Démontrer que $u(z,T) = f(z - iT)$, où f est une fonction dérivable arbitraire, est une solution de l'équation différentielle.
5. Déterminer $u(z,0) = f(z)$ en utilisant le résultat de 2).
Indication : $e^{ix} = e^{ix/2}/e^{-ix/2}$ et $e^{\pm ix/2} = \cos(x/2) \pm i\sin(x/2)$.
6. Donner la solution $u(x,t)$.
7. Déterminer les probabilités $P_n(t \to \infty)$ pour des temps longs.

Solution de l'exercice 3

1. Avec $L = 2\pi$, on obtient
$$P_n(t) = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{I}} dx\; u(x,t)e^{-i2\pi n\frac{x}{L}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; u(x,t)e^{-inx}.$$
2. Avec $P_n(0) = \delta_{n,1}$, on obtient
$$u(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(0)e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n,1}e^{inx} = e^{ix}.$$
3. En multipliant l'équation différentielle pour $P_n(t)$ par e^{inx} et sommant sur tous les n, on trouve
$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\frac{dP_n(t)}{dt} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\frac{1}{\tau}\left\{(n-1)P_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1}(t) - 2nP_n(t)\right\} \\
\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}P_n(t) &= \frac{1}{\tau}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-1+1)x}(n-1)P_{n-1}(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+1-1)x}(n+1)P_{n+1}(t)\right. \\
&\qquad \left. -2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}nP_n(t)\right\} \\
&= \frac{1}{\tau}\left(e^{ix} + e^{-ix} - 2\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}nP_n(t) = \frac{2}{\tau}(\cos x - 1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\frac{d}{dx}\left(e^{inx}\right)P_n(t) \\
&= -\frac{2i}{\tau}(\cos x - 1)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}P_n(t) \\
\Leftrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= -\frac{2i}{\tau}(\cos x - 1)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t).
\end{aligned}$$
4. On trouve
$$\frac{\partial}{\partial T}f(z - iT) = -if'(z - iT) \qquad et \qquad \frac{\partial}{\partial z}f(z - iT) = f'(z - iT).$$
Donc
$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + i\frac{\partial}{\partial z}\right) f(z - iT) = -if'(z - iT) + if'(z - iT) = 0.$$

5. On trouve

$$u(x,0)=e^{ix}=\frac{e^{ix/2}}{e^{-ix/2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+i}{\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}-i}\qquad\Rightarrow\qquad u(z,0)=\frac{z+i}{z-i}.$$

6. Avec $f(z)=(z+i)/(z-i)$, on obtient

$$u(z,T)=f(z-iT)=\frac{z-iT+i}{z-iT-i}.$$

Donc

$$u(x,t)=\frac{\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}-i2\frac{t}{\tau}+i}{\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}-i2\frac{t}{\tau}-i}=\frac{1+i(1-2\frac{t}{\tau})\tan\frac{x}{2}}{1-i(1+2\frac{t}{\tau})\tan\frac{x}{2}}.$$

7. On trouve

$$u(x,t\to\infty)\to 1.$$

Donc

$$P_n(t\to\infty)\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\;e^{-inx}=\delta_{n,0}.$$