TD05 – Transformées de Fourier I

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail

J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Calculer la transformée de Fourier $\tilde{f}(q)$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp[-x^2/\alpha^2]$. On calculera la largeur à mi-hauteur de la fonction $f(x)$ et de sa transformée de Fourier $\tilde{f}(q)$. Quelle conclusion tirez-vous ? (On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2]\, dx = \sqrt{\pi}$)

Solution de l'exercice 1

$$\tilde{f}(q) = \mathrm{TF}[f(x)] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-iqx} f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-iqx - \frac{1}{\alpha^2}x^2}$$

On note

$$-iqx - \frac{1}{\alpha^2}x^2 = -\frac{1}{\alpha^2}\left(x^2 + i\alpha^2 qx\right) = -\frac{1}{\alpha^2}\left\{\left(x + \frac{i}{2}\alpha^2 q\right)^2 + \frac{1}{4}\alpha^4 q^2\right\} = -\frac{1}{\alpha^2}\left(x + \frac{i}{2}\alpha^2 q\right)^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 q^2.$$

Donc

$$\tilde{f}(q) \quad = \quad \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(x + \frac{i}{2}\alpha^2 q\right)^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 q^2}.$$

La substitution de variable $u = x/|\alpha| + (i/2)|\alpha| q$ donne

$$\tilde{f}(q) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{sign}(\alpha) e^{-\frac{1}{4}\alpha^2 q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du\; e^{-u^2} = \mathrm{sign}(\alpha) e^{-\frac{1}{4}\alpha^2 q^2}.$$

[On note sans démonstration que le fait que la nouvelle variable u a une partie imaginaire ne change pas le résultat de l'intégration.]

La largeur à mi-hauteur est donnée par

$$f(x^*) = \frac{1}{2} f(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(x^*)^2} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}.$$

Donc

$$x^* = \alpha\sqrt{\ln 2}.$$

De même,

$$\tilde{f}(q^*) = \frac{1}{2}\tilde{f}(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{sign}(\alpha) e^{-\frac{1}{4}\alpha^2 (q^*)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\alpha).$$

Donc

$$q^* = \frac{1}{\alpha} 2\sqrt{\ln 2}.$$

Par conséquent,

$$x^* q^* = 2 \ln 2$$

ne dépend pas de α.

Exercice 2

1. Montrer que $\tilde{f}_1(q) = \pi e^{-a|q|}$ est la transformée de Fourier de $f_1(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$.
2. En déduire les transformées de Fourier $\tilde{f}_2(q)$ et $\tilde{f}_3(q)$ des fonctions suivantes :

$$\text{(i)}\;\; f_2(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \text{(ii)}\;\; f_3(x) = \frac{a^3 - 3ax^2}{(x^2+a^2)^3}.$$

Indication : Pour calculer les transformées de Fourier de $f_2(x)$ et $f_3(x)$ on remarquera que ces fonctions s'obtiennent par dérivation par rapport à x de la fonction $f_1(x)$.

Solution de l'exercice 2

1. Au lieu de calculer

$$\tilde{f}_1(q) = \mathrm{TF}[f_1(x)] \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-iqx} \frac{a}{x^2+a^2},$$

il est plus facile de calculer la TF inverse

$$\begin{aligned}
f_1(x) = \mathrm{TF}^{-1}[\tilde{f}_1(q)] \;\; &= \;\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iqx} \times \pi \exp[-a|q|] \\
&= \;\; \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{0} dq\; e^{iqx+aq} + \int_{0}^{\infty} dq\; e^{iqx-aq} \right\} \\
&= \;\; \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{ix+a} e^{iqx+aq} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{ix-a} e^{iqx-aq} \right]_{0}^{\infty} \right\} \\
&= \;\; \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{ix+a} - \frac{1}{ix-a} \right\} = \frac{a}{x^2+a^2}.
\end{aligned}$$

2. (i) On remarque que

$$f_2(x) = -\frac{1}{2a} \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^2+a^2} \right) = -\frac{1}{2a} f_1'(x).$$

Comme $\mathrm{TF}[f'(x)] = iq\,\mathrm{TF}[f(x)]$, on obtient

$$\tilde{f}_2(q) = -\frac{i\pi q}{2a} e^{-a|q|}.$$

(ii) On remarque

$$f_3(x) = a \frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} = a f_2'(x).$$

Donc

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{\pi}{2} q^2 e^{-a|q|}.$$

Exercice 3

1. Démontrer que pour une fonction $f(x)$ quelconque, il est faux de supposer que
$$\Re\{\mathrm{TF}[f(x)]\} = \mathrm{TF}[\Re\{f(x)\}].$$

2. À quelle condition cette relation est-elle vraie ?

Solution de l'exercice 3

1. Le membre de gauche de l'équation est donné par
$$\Re\{\mathrm{TF}[f(x)]\} = \frac{1}{2}\left\{\tilde{f}(q) + \tilde{f}^*(q)\right\}$$
tandis que le membre de droite de l'équation est donné par
$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[\Re\{f(x)\}] &= \mathrm{TF}\left[\frac{1}{2}(f(x)+f^*(x))\right] = \frac{1}{2}\{\mathrm{TF}[f(x)] + \mathrm{TF}[f^*(x)]\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int dx\ f(x)e^{-iqx} + \int dx\ f^*(x)e^{-iqx}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\int dx\ f(x)e^{-iqx} + \left(\int dx\ f(x)e^{iqx}\right)^*\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\tilde{f}(q) + \tilde{f}^*(-q)\right\}.
\end{aligned}$$

2. Les deux sont égaux seulement si $\tilde{f}(q) = \tilde{f}(-q)$, c'est-à-dire si $\tilde{f}$ est une fonction paire.

Exercice 4 Transformation de Fourier d'une gaussienne

1. Démontrer la relation de dérivation suivante pour la TF :
$$i\frac{d\tilde{f}(q)}{dq} = \mathrm{TF}[xf(x)].$$

2. Soit $\tilde{f}(q) = \mathrm{TF}[\exp(-\frac{x^2}{2a})]$ où a est un réel positif. Comme $f'(x) = -\frac{x}{a}\exp(-\frac{x^2}{2a})$, en déduire une équation différentielle à laquelle obéit $\tilde{f}(q)$. Donner l'expression de $\tilde{f}(q)$.

Solution de l'exercice 4

1. Avec $xe^{-iqx} = i\partial_q e^{-iqx}$, on trouve
$$\mathrm{TF}[xf(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-iqx}xf(x) = i\frac{\partial}{\partial q}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-iqx}f(x) = i\frac{\partial}{\partial q}\tilde{f}(q).$$

2. La fonction f obéit à l'équation différentielle
$$\frac{d}{dx}f(x) = -\frac{x}{a}f(x).$$
Avec les résultat de la partie 1, on trouve donc
$$iq\tilde{f}(q) = -i\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial q}\tilde{f}(q) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial q}\tilde{f}(q) = -aq\tilde{f}(q).$$
Donc $f(x)$ et $\tilde{f}(q)$ obéissent à la même équation différentielle avec $a \to 1/a$. On obtient
$$\tilde{f}(q) = Ae^{-\frac{1}{2}aq^2} \qquad \text{avec} \qquad A = \tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{x^2}{2a}} = \sqrt{2\pi a}.$$