TD06 – Transformées de Fourier II

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1 Équation de propagation d'un ressort infiniment long

Si $u(x,t)$ représente un petit déplacement d'une partie d'un ressort, parallèlement au ressort au temps t à la position x sur le ressort, alors le ressort est le siège d'oscillations longitudinales décrites par l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

avec $u(x,0) = 0$ et $\partial u(x,t)/\partial t|_{t=0} = (a^2/\tau)\,\delta(x)$, où a est une longueur et τ est un temps fixé par l'expérimentateur.

Soit $\tilde{u}(q,t)$ la transformée de Fourier spatiale de $u(x,t)$.

1. Montrer que $\tilde{u}(q,t)$ obéit à l'équation suivante :
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(q,t)}{\partial t^2} = -c^2 q^2 \tilde{u}(q,t). \tag{2}$$
2. Donner la solution de l'équation Eq. (2) pour $\tilde{u}(q,t)$ dans les cas (i) $q \neq 0$ et (ii) $q = 0$. Discuter des constantes dans ce dernier cas.
3. Montrer alors que $u(x,t)$ peut se mettre sous la forme de d'Alembert,
$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$
4. Que représentent physiquement les fonctions F et G ?
5. En utilisant les conditions aux limites à $t = 0$ tracer $u(x,t)$ à différents instants.
Aide : $1/q = \mathrm{TF}[(i/2)\,\mathrm{sign}(x)]$.

Solution de l'exercice 1

1. Avec $\mathrm{TF}[f'(x)] = iq\,\mathrm{TF}[f(x)$, on trouve la TF de l'équation (1),
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(q,t)}{\partial t^2} = -c^2 q^2 \tilde{u}(q,t).$$
2. (i) Pour $q \neq 0$, on obtient
$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{F}(q)e^{icqt} + \tilde{G}(q)e^{-icqt}$$
où $\tilde{F}(q)$ et $\tilde{G}(q)$ sont des constantes par rapport à t, détérminées par les conditions initiales.
(ii) Pour $q = 0$, l'équation $\partial^2\tilde{u}(0,t)/\partial t^2 = 0$ a la solution $\tilde{u}(0,t) = A_0 + B_0 t$. La constante $B_0 = 0$, sinon la solution diverge pour $t \to \infty$.
3. On prend la TF inverse de la solution trouvée ci-dessus,
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iqx}\left[\tilde{F}(q)e^{icqt} + \tilde{G}(q)e^{-icqt}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iq(x+ct)}\tilde{F}(q) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; e^{iq(x-ct)}\tilde{G}(q) = F(x+ct) + G(x-ct). \end{aligned}$$

4. $F(x+ct)$ représente un paquet d'onde qui se déplace vers la gauche avec vitesse c tandis que $G(x-ct)$ représente un paquet d'onde qui se déplace vers la droite avec vitesse c.
On compare la solution à l'instant $t=0$ à la position $x=x_0$ avec la solution à l'instant $t=t_0$ à la position $x=x_0 \mp ct_0$:

$$\begin{aligned} F(x+ct)\Big|_{x=x_0,t=0} &= F(x_0) &= F(x+ct)\Big|_{x=x_0-ct_0,t=t_0} \\ G(x-ct)\Big|_{x=x_0,t=0} &= G(x_0) &= G(x-ct)\Big|_{x=x_0+ct_0,t=t_0}. \end{aligned}$$

5. Les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} u(x,0) &= F(x)+G(x)=0, \\ u'(x,0) &= cF'(x)-cG'(x)=\frac{a^2}{\tau}\delta(x). \end{aligned}$$

La première équations impose $G(x)=-F(x)$. Pour résoudre la deuxième équation, on utilise les TF :

$$F'(x)=\frac{a^2}{2c\tau}\delta(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{TF}[F'(x)]=iq\tilde{F}(q)=\frac{a^2}{2c\tau}.$$

Donc $\tilde{G}(q)=-ia^2/(2c\tau q)$ et par conséquent

$$G(x)=\frac{a^2}{4c\tau}\mathrm{sign}(x)$$

et finalement

$$u(x,t)=\frac{a^2}{4c\tau}\left\{\mathrm{sign}(x+ct)-\mathrm{sign}(x-ct)\right\}.$$

Exercice 2

Soit la fonction créneau $f(x)=1$ si $-a\leq x\leq a$ et $f(x)=0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $\tilde{f}(q)$. Tracer schématiquement $\tilde{f}(q)$. Soit Δl la demi-largeur du créneau et Δq la demi-largeur de sa TF, calculer la valeur du produit $\Delta l\,\Delta q$.

Solution de l'exercice 2

La TF de la fonction créneau est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{f}(q) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-iqx} f(x) = \int_{-a}^{a} dx\; e^{-iqx} \\ &= \frac{1}{-iq}\left[e^{-iqx}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{-iq}\left(e^{-iqa}-e^{iqa}\right) = \frac{2}{q}\sin(qa). \end{aligned}$$

La demi-largeuer de $f(x)$ est $\Delta l=a$ tandis que la demi-largeur de $\tilde{f}(q)$ est $\Delta q=\pi/a$. Donc $\Delta l\,\Delta q = \pi = \mathit{constante}$.

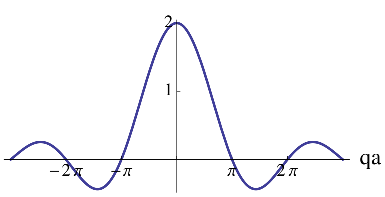

FIGURE 1 – La TF de la fonction créneau.

Exercice 3 Formule de sommation de Poisson

Nous allons démontrer la formule de sommation de Poisson,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{3}$$

avec $\tilde{f} = \mathrm{TF}[f]$.

1. On définit la fonction
$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT).$$
Démontrer que $\phi(t)$ est T-périodique.
2. Donner la série de Fourier complexe $\phi_F(t)$ de $\phi(t)$ sur l'intervalle $\mathcal{I} = [0, T]$.
3. Démontrer que les coéfficients c_k de la série de Fourier complexe sont donnés par
$$c_k = \frac{1}{T}\tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$
[Vous avez le droit de changer l'ordre de la somme et de l'intégrale.]
4. Utiliser $\phi(0) = \phi_F(0)$ pour démontrer la formule de sommation de Poisson (3).
Application : calcul de la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.
5. La TF de $f(t) = 1/(1+t^2)$ est donnée par $\tilde{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Utiliser la formule de sommation de Poisson (3) pour exprimer la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\tilde{f}(\omega)$.
6. Évaluer la somme en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Solution de l'exercice 3

1.
$$\phi(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+T+nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+(n+1)T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t+mT) = \phi(t).$$

2.
$$\phi_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2i\pi k\frac{t}{T}} \qquad \text{avec} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \phi(t)\, e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}\, dt.$$

3.
$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)\, e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^T f(t+nT)\, e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-2i\pi k\frac{t-nT}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2i\pi k\frac{t}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).
\end{aligned}$$

4.
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \phi(0) = \phi_F(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k\frac{2\pi}{T}).$$

Application : calcul de la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

5. Avec $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, on a $T = 1$ et, par conséquent, la formule de sommation de Poisson donne
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi k) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|k|}.$$

6. Finalement,
$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} &= \pi \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-2\pi|k|} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi|k|} \right) = \pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi k} \right) \\ &= \pi \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi}\right)^k - 1 \right) = \pi \left(2 \frac{1}{1-e^{-2\pi}} - 1 \right) = \pi \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \pi \coth \pi.\end{aligned}$$