TD07 – Transformées de Fourier III

http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail
J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Calculer le produit de convolution $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$, et le représenter graphiquement. Quel est la TF de $\Lambda(x)$?

Solution de l'exercice 1

Avec la définition du produit de convolution, on a

$$\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \Pi(s)\Pi(x-s)$$

$\Pi(s)$ est non-nul pour $-1/2 < s < 1/2$ tandis que $\Pi(s-x)$ est non-nul pour $x-1/2 < s < x+1/2$. Pour avoir un recouvrement des deux intervalles, il faut $-1/2 < x+1/2 \Leftrightarrow x > -1$ et $x-1/2 < 1/2 \Leftrightarrow x < 1$. Donc

$$\Lambda(x) \quad = \quad \int_{-1/2}^{1/2} ds\ \Pi(x-s) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \int_{-1/2}^{x+1/2} ds = 1+x & -1 \leq x < 0, \\ \int_{x-1/2}^{1/2} ds = 1-x & 0 \leq x < 1, \\ 0 & 1 \geq x. \end{cases}$$

La TF d'un produit de convolution est le produit des TFs des deux fonctions,

$$\tilde{\Lambda}(q) = \mathrm{TF}\left[(\Pi * \Pi)(x)\right] = \left(\tilde{\Pi}(q)\right)^2 = 4\frac{\sin^2(q/2)}{q^2}.$$

Exercice 2

Soit le signal $f(x) = \delta(x)+\delta(x-x_0)$, c'est-à-dire deux pics de Dirac distants de x_0. Calculer et tracer le signal mesuré si la fonction de l'appareil est a) Π_l et b) $G_l = \exp[-x^2/2l^2]$. Traiter particulièrement les cas (i) $x_0 \ll l$, (ii) $x_0 \gg l$ et (iii) $x_0 \approx l$ (voir figure). Peut-on déterminer dans le cas de la gaussienne à partir de quel l il n'est plus possible de distinguer deux pics séparés ?

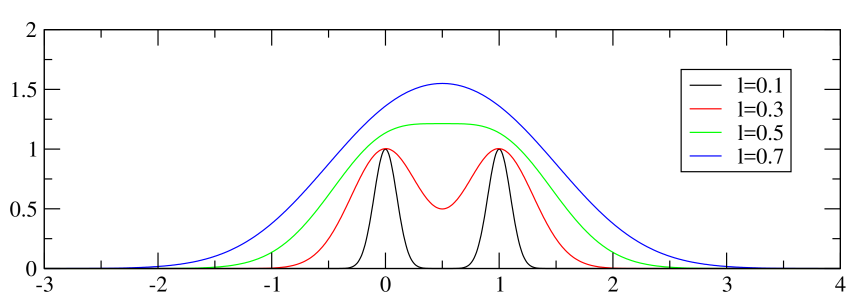

Figure 1 – La convolution du signal $\delta(x) + \delta(x-1)$ par des gaussiennes G_l de différentes largeurs.

Solution de l'exercice 2

Le signal mesuré est la convolution du signal avec la fonction de l'appareil $A_l(x)$,

$$S_l(x) = (f * A_l)(x).$$

a) Pour $A_l(x) = \Pi_l(x)$, on obtient

$$S_l(x) = (f * \Pi_l)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \delta(s)\Pi\left(\frac{x-s}{l}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \delta(s-x_0)\Pi\left(\frac{x-s}{l}\right) = \Pi\left(\frac{x}{l}\right) + \Pi\left(\frac{x-x_0}{l}\right).$$

La limite de résolution de l'appareil est $x_0 \approx l$ (voir figure).

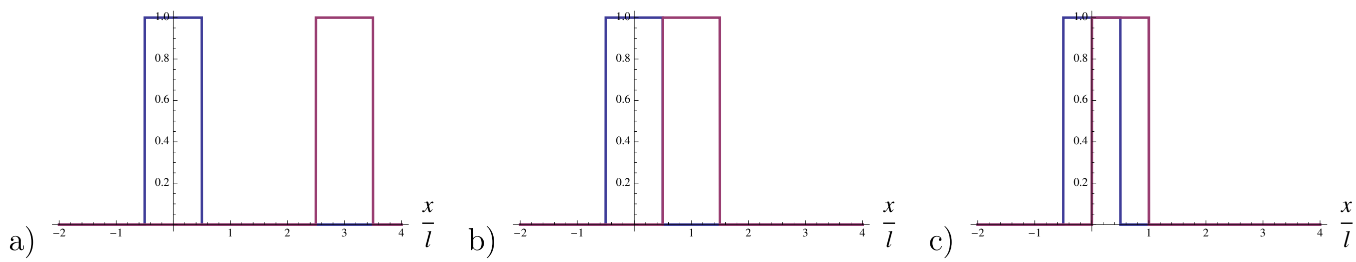

FIGURE 2 – a) $x_0 = 3l$, b) $x_0 = l$ et c) $x_0 = l/2$. Pour $x_0 < l$, les deux signaux se recouvrent.

b) Pour $A(x) = G_l(x)$, on obtient

$$S_l(x) = (f * G_l)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \delta(s)e^{-\frac{(s-x)^2}{2l^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \delta(s-x_0)e^{-\frac{(s-x)^2}{2l^2}} = e^{-\frac{x^2}{2l^2}} + e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2l^2}}.$$

Les deux pics peuvent être distingués si la distance entre les pics est plus grande que leur largeur à mi-hauteur. Avec la largeur à mi-hauteur $\Delta x = 2\sqrt{2\ln 2}\, l$, on trouve que la limite de résolution de l'appareil $x_0 \approx 2\sqrt{2\ln 2}\, l$.

Exercice 3

Démontrer que le produit de convolution de deux gaussiennes de largeurs l et p est encore une gaussienne :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{l^2+p^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2(l^2+p^2)}\right].$$

Pour vraiment apprécier les TF, faire le calcul d'abord dans l'espace direct et ensuite à l'aide des TF.

Rappel : une gaussienne de largeur l est la fonction

$$G_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\exp\left[-\frac{x^2}{2l^2}\right].$$

Solution de l'exercice 3

Par le calcul direct, on trouve

$$\begin{aligned}
(G_l * G_p)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \exp\left[-\frac{s^2}{2l^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}p} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{2p^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi lp} \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \exp\left[-\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)s^2 + \frac{1}{p^2}xs - \frac{1}{2p^2}x^2\right].
\end{aligned}$$

Même astuce que d'habitude,

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)s^2 + \frac{1}{p^2}xs - \frac{1}{2p^2}x^2 &= -\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)\left\{s^2 - 2\frac{l^2}{l^2+p^2}xs + \frac{l^2}{l^2+p^2}x^2\right\} \\
&= -\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)\left\{\left(s - \frac{l^2}{l^2+p^2}x\right)^2 - \frac{l^4}{(l^2+p^2)^2}x^2 + \frac{l^2}{l^2+p^2}x^2\right\} \\
&= -\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)\left(s - \frac{l^2}{l^2+p^2}x\right)^2 + \frac{l^2}{2(l^2+p^2)p^2}x^2 - \frac{1}{2p^2}x^2 \\
&= -\left(\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{2p^2}\right)\left(s - \frac{l^2}{l^2+p^2}x\right)^2 - \frac{1}{2(l^2+p^2)}x^2,
\end{aligned}$$

plus changement de variable $t = s - xl^2/(l^2+p^2)$. Donc,

$$\begin{aligned}
(G_l * G_p)(x) &= \frac{1}{2\pi lp} e^{-\frac{x^2}{2(l^2+p^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{p^2}\right)t^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{l^2+p^2}} e^{-\frac{x^2}{2(l^2+p^2)}}.
\end{aligned}$$

Par les TFs, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\, e^{-\frac{s^2}{2l^2}}\right] &= e^{-\frac{1}{2}l^2q^2}, \\
\mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}p}\, e^{-\frac{s^2}{2p^2}}\right] &= e^{-\frac{1}{2}p^2q^2}, \\
\mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\, e^{-\frac{s^2}{2l^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}p}\, e^{-\frac{s^2}{2p^2}}\right] &= \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\, e^{-\frac{s^2}{2l^2}}\right] \cdot \mathrm{TF}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}p}\, e^{-\frac{s^2}{2p^2}}\right] = e^{-\frac{1}{2}\left(l^2+p^2\right)q^2}.
\end{aligned}$$

En prenant la TF inverse, on obtient

$$(G_l * G_p)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{l^2+p^2}} e^{-\frac{x^2}{2(l^2+p^2)}}.$$

Exercice 4 Algèbre de convolution

1 - Montrer que $(f * \delta')(x) = f'(x)$.

2 - Montrer que $*$ est associatif : $(f * g) * h = f * (g * h)$. Cela permet de donner un sens aux puissances de convolution : $f^{*2} = f * f$, $f^3 = f * f * f$ et ainsi de suite.

3 - Dorénavant, on note $p(x) = \delta'(x)$ pour alléger les notations. Que vaut $f * p^{*n}$? Montrer qu'une équation différentielle $\sum a_n f^{(n)}(x) = b(x)$ peut se mettre sous la forme $(\sum a_n p^{*n}) * f = b$ (où $p^{*0} = \delta$).

Ceci forme le cœur du calcul symbolique inventé par Heaviside. Si on savait définir les opérations "inverses" de $*$ (et donc la distribution p^{-1}), la résolution des équations différentielles se réduirait aux équations algébriques. Cette branche des mathématiques s'appelle "calcul opérationnel".

Solution de l'exercice 4

1 - Avec une intégration par partie, on démontre

$$(f * \delta')(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f(s)\delta'(x-s) = [-f(s)\delta(x-s)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} ds\ f'(s)\delta(x-s) = f'(x).$$

2 - En passant par les TFs, on démontre

$$\mathrm{TF}\left[(f*g)*h\right] = \mathrm{TF}\left[(f*g)\right]\mathrm{TF}\left[h\right] = \mathrm{TF}\left[f\right]\mathrm{TF}\left[g\right]\mathrm{TF}\left[h\right] = \mathrm{TF}\left[f\right]\mathrm{TF}\left[(g*h)\right] = \mathrm{TF}\left[f*(g*h)\right].$$

Donc $(f * g) * h = f * (g * h)$.

3 - En utilisant les résultats des parties 1 & 2, on trouve

$$f * p^{*n} = f^{(n)},$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n de f. Donc l'équation différentielle $\sum a_n f^{(n)}(x) = b(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$\sum a_n(f * p^{*n}) = \sum a_n(p^{*n} * f) = \left(\sum a_n p^{*n}\right) * f = b.$$