J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1 Diffusion de corrélations

Soit une fonction $c(x,t)$ (représentant par exemple une concentration, une probabilité...) obéissant à l'équation de diffusion,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Et soit la fonction d'auto-corrélation spatiale,

$$G(y;t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x,t)c(x+y,t)dx.$$

Démontrer que G obéit également à une équation de diffusion, mais avec un coefficient de diffusion de $2D$. [Indication : le calcul est plus simple dans l'espace de Fourier.]

Solution de l'exercice 1

Dans l'espace de Fourier,

$$\tilde{G}(q,t) = \tilde{c}^*(q)\tilde{c}(q).$$

La TF de l'équation différentielle est donnée par

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = -Dq^2\tilde{c},$$

avec solution

$$\tilde{c}(q,t) = A(q)e^{-Dq^2t}.$$

Donc

$$\tilde{G}(q,t) = A^*(q)A(q)e^{-2Dq^2t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = -2Dq^2\tilde{G}.$$

Après TF inverse, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 2D\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

Exercice 2

1. On considère deux variables aléatoires x et y de densités respectives $f(x)$ et $g(y)$. On cherche la densité de la moyenne $z = (x+y)/2$. Démontrer que celle-ci est donnée par $h(z) = 2(f*g)(2z)$.
2. Soient deux variables aléatoires de densités gaussiennes de même largeur. Quelle est la densité de leur moyenne ?

Solution de l'exercice 2

1. $h(z)dz$ est la probabilité de trouver la V.A. entre z et $z+dz$. Pour un x donné, il faut donc que y soit dans l'intervalle

$$y \in [-x+2z, -x+2z+2dz].$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} h(z)dz &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) \int_{-x+2z}^{-x+2z+2dz} dy\ g(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)g(-x+2z)\cdot 2dz = 2(f*g)(2z)dz \end{aligned}$$

2. Pour le cas où les fonctions f et g sont des gaussiennes de largeur l, on obtient (en utilisant la solution de l'exercice 3 TD7)

$$h(z) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2l^2}}e^{-\frac{(2z)^2}{2(2l^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}l}e^{-\frac{z^2}{l^2}}.$$

Donc la largeur est multipliée par le facteur $\sqrt{2}$.

Exercice 3

Soit x une variable aléatoire (V.A.) et $\rho_x(x)$ la fonction de distribution associée. La fonction caractéristique de x a pour définition :

$$\phi_x(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(x)e^{iqx}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $\phi_x(q)$ s'écrit comme une série des moments $\overline{x^n}$ de la distribution $\rho_x(x)$.
2. Montrer que si z est une V.A. somme de deux V.A. x et y indépendantes, $z = x + y$, alors

$$\rho_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(x)\rho_y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Que peut-on en déduire concernant $\phi_z(q)$?

Solution de l'exercice 3

1. Avec $\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_x(x)f(x)$, on a

$$\phi_x(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_x(x)e^{iqx} = \overline{e^{iqx}},$$

soit

$$\phi_x(q) = \overline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iqx)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iq)^n\,\overline{x^n}.$$

2. La démonstration a été faite dans l'exercice 2 : $\rho_z(z)dz$ est la probabilité de trouver la V.A. entre z et $z + dz$. Pour un x donné, il faut donc que y est dans l'intervalle

$$y \in [-x+z, -x+z+dz].$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\rho_z(z)dz &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_x(x) \int_{-x+z}^{-x+z+dz} dy\ \rho_y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_x(x)\rho_y(-x+z)\cdot dz = (\rho_x * \rho_y)(z)dz\end{aligned}$$

et on trouve $\rho_z(z) = 2(f*g)(2z)$.
Alternativement, on peut utiliser la fonction caractéristique. C'est-à-dire,

$$\phi_z(q) = \overline{e^{iqz}} = \overline{e^{iq(x+y)}} = \overline{e^{iqx}e^{iqy}}.$$

Comme x et y sont indépendantes,

$$\phi_z(q) = \overline{e^{iqx}e^{iqy}} = \overline{e^{iqx}} \cdot \overline{e^{iqy}} = \phi_x(q)\phi_y(q).$$

Donc

$$\phi_z(z) = (\rho_x * \rho_y)(z).$$

3. Comme démontré ci-dessus,

$$\phi_z(q) = \phi_x(q)\phi_y(q).$$

Exercice 4

Soit une V.A. x de distribution uniforme $\rho_x(x)$ entre $-a$ et $+a$.

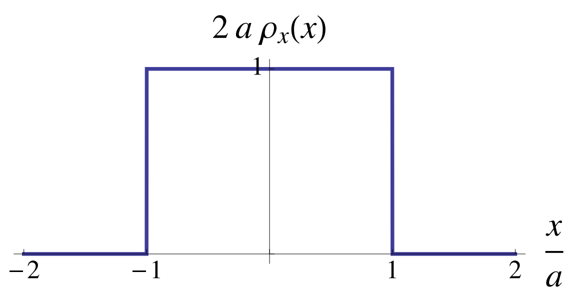
1. Représenter $\rho_x(x)$.
2. Donner l'expression de $\phi_x(q)$.
3. Donner l'expression des moments pairs et impairs de la distribution $\rho_x(x)$.

Solution de l'exercice 4

1. On a

$$\rho_x(x) = \frac{1}{2a}\Pi_{2a}(x).$$

$\rho_x(x)$ est tracée dans la figure ci-dessous :



2. Pour $\phi_x(q)$, on trouve

$$\begin{aligned}\phi_x(q) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho_x(x)e^{iqx} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dx\ e^{iqx} \\ &= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{iq}e^{iqx}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2iqa}\left(e^{iqa} - e^{-iqa}\right) = \mathrm{sinc}(aq).\end{aligned}$$

3. sinc(aq) est une fonction paire,

$$\mathrm{sinc}(aq) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (aq)^{2n}.$$

En particulier,

$$\phi_x(q) = \mathrm{sinc}(aq) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n a^{2n} q^{2n}. \tag{1}$$

Dans l'exercice 3, on a démontré

$$\phi_x(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iq)^n \, \overline{x^n},$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \phi_x(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iq)^{2n} \, \overline{x^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (iq)^{2n+1} \, \overline{x^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n \, \overline{x^{2n}} \, q^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n \, \overline{x^{2n+1}} \, q^{2n+1}. \end{aligned}$$

La comparaison avec l'équation (1) nous permet d'identifier,

$$\overline{x^{2n}} = \frac{a^{2n}}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \overline{x^{2n+1}} = 0.$$

Donc tous les moments impairs sont nuls.