J. collot, M. Ismail et J. Meyer

Exercice 1

Donner la partie imaginaire des fonctions suivantes :
(i) $f_1(z) = e^{ix}$, (ii) $f_2(z) = z^*z$ et (iii) $f_3(z) = 1/z$ avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned} f_1(z) &= e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ f_2(z) &= (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 \\ f_3(z) &= \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Donc $\Im[f_1(z)] = \sin x$, $\Im[f_2(z)] = 0$ et $\Im[f_3(z)] = -y/(x^2 + y^2)$.

Exercice 2

Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann qui définissent une fonction analytique. Les fonctions suivantes sont-elles analytiques ?

1. $f_1(z) = \overline{z}$;
2. $f_2(z) = z\overline{z}$;
3. $f_3(z) = \sin(z)$;
4. $f_4(z) = \ln|z| + i \arg(z)$.

Solution de l'exercice 2

Pour $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, les conditions de Cauchy-Riemann sont données par

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1 - $u_1(x, y) = x$ et $v_1(x, y) = -y$. Donc

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

f_1 n'est pas analytique.

2 - $u_2(x, y) = x^2 + y^2$ et $v_2(x, y) = 0$. Donc

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$$

pour $x, y \neq 0$. f_2 n'est pas analytique.

3 - $u_3(x,y) = \sin x \cosh y$ et $v_3(x,y) = \cos x \sinh y$. Donc

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v_3}{\partial y} = \cos x \cosh y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_3}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v_3}{\partial x} = -(-\sin x \sinh y).$$

En outre, les dérivées sont continues. f_3 est analytique.

4 - $u_4(x,y) = (1/2)\ln(x^2+y^2)$ et $v_4(x,y) = \arctan(y/x)$. Donc

$$\frac{\partial u_4}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v_4}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_4}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v_4}{\partial x} = -(-\frac{y}{x^2+y^2})$$

pour $x^2+y^2 \neq 0$. f_4 est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercice 3

1. Trouver les parties réelle et imaginaire de $f(z) = 1/(1-z)$.
2. Montrer que $f(z)$ est analytique.
3. Calculer la dérivée de $f(z)$ en utilisant la définition

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}.$$

4. Comparer le résultat ainsi obtenu avec la dérivée de $f(x)$ lorsque x est réel.

Solution de l'exercice 3

1. Pour obtenir les parties réelles et imaginaires de $f(z)$, on écrit

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-x-iy} = \frac{1-x+iy}{(1-x-iy)(1-x+iy)} = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{y}{(1-x)^2+y^2}.$$

Donc

$$u(x,y) = \Re[f(z)] = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = \Im[f(z)] = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}.$$

2. On vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[-((1-x)^2+y^2) - (1-x)(-2(1-x))\right] = \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[(1-x)^2 - y^2\right], \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[-(1-x)(2y)\right], \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[-y(-2(1-x))\right] = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[((1-x)^2+y^2) - y(2y)\right] = \frac{1}{((1-x)^2+y^2)^2}\left[(1-x)^2 - y^2\right] = -\frac{\partial u}{\partial x},
\end{aligned}$$

pour $z \neq 1$. En outre, les dérivées sont continues. On conclut que f est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

3. Avec $f(z+\delta z) \approx 1/(1-z) + 1/(1-z)^2 \delta z + \mathcal{O}(\delta z^2)$, on obtient

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

4. Pour x réel, la dérivé est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Si la dérivée $f'(z)$ existe, elle peut être calculée de la même façon que la dérivée $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $X(x, y) = x^2 - y^2$ est harmonique, c'est-à-dire que $\Delta X = 0$.
2. Trouver les fonctions à valeurs réelles $Y(x, y)$ telles que $Z = X + iY$ soit analytique par rapport à $z = x + iy$ (on pourra écrire les conditions de Cauchy-Riemann), puis exprimer Z en fonction de z.
3. Reprendre la même démarche en partant de $X(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Solution de l'exercice 4

1. Avec $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, on trouve

$$\Delta X = (\partial_x^2 + \partial_y^2)(x^2 - y^2) = 1 - 1 = 0.$$

2. Les conditions de Cauchy-Riemann imposent

$$\begin{aligned} \partial_y Y &= \partial_x X = 2x, \\ \partial_x Y &= -\partial_y X = 2y. \end{aligned}$$

Pour que $Z = X + iY$ soit analytique, il faut donc $Y = 2xy + \text{cste}$. C'est-à-dire,

$$Z = x^2 - y^2 + 2ixy + \text{cste} = z^2 + i\,\text{cste}.$$

3. Pour $X(x, y) = x^3 - 3xy^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_y Y &= \partial_x X = 3x^2 - 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y(x, y) = 3x^2 y - y^3 + c_y(x), \\ \partial_x Y &= -\partial_y X = 6xy \qquad \Rightarrow \qquad Y(x, y) = 3x^2 y + c_x(y). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Z = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3 + \text{cste}) = z^3 + i\,\text{cste}.$$

Exercice 5 Intégrale curviligne

On considère la function $f(z) = z + z^{-1}$. Calculer l'intégrale de $f(z)$ le long des contours suivants :

1. un cercle de rayon $R = 2$ autour de l'origine $z_0 = 0$ dans le sens positif.
2. un carré avec les angles situés à $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 + i$ et $z_4 = -1 - i$ dans le sens $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_4$.

Indication :

$$\int_a^b \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{2}{a} \arctan \frac{b}{a}$$

Solution de l'exercice 5

1. Un cercle de rayon $R = 2$ autour de l'origine $z_0 = 0$ est paramétrisé par $z = 2e^{i\theta}$ avec θ qui varie entre 0 et 2π. On trouve $dz = 2ie^{i\theta}d\theta$. Donc

$$\begin{aligned}\oint_{\text{cercle}} f(z)\,dz &= 2i\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i\theta}\left[2e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right] = 4i\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{2i\theta} + i\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\left[e^{2i\theta}\right]_0^{2\pi} + i\,[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i.\end{aligned}$$

2. Ici le contour consiste en 4 parties. De z_1 à z_2, on a $z = 1 + it$ avec $t : -1 \to 1$ et $dz = idt$. De z_2 à z_3, on a $z = -t + i$ avec $t : -1 \to 1$ et $dz = -dt$. De z_3 à z_4, on a $z = -1 - it$ avec $t : -1 \to 1$ et $dz = -idt$. De z_4 à z_1, on a $z = t - i$ avec $t : -1 \to 1$ et $dz = dt$. Donc

$$\begin{aligned}&\oint_{\text{carre}} f(z)\,dz \\ &= \int_{-1}^{1} dt\left[i\left(1 + it + \frac{1}{1+it}\right) - \left(-t + i + \frac{1}{-t+i}\right) - i\left(-1 - it + \frac{1}{-1-it}\right) + \left(t - i + \frac{1}{t-i}\right)\right] \\ &= 2\int_{-1}^{1} dt\left[\frac{i}{1+it} + \frac{1}{t-i}\right] = 4\int_{-1}^{1} dt \frac{t+i}{1+t^2} = 4i\int_{-1}^{1} dt \frac{1}{1+t^2} = 8i\arctan(1) = 2\pi i.\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit la fonction analytique $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ en coordonnées polaires (ρ, φ). Avec $z = \rho e^{i\varphi}$.

1. Comment s'écrivent les conditions de Cauchy-Riemann en fonction de ρ et φ traduisant le fait que f est analytique ?
2. En déduire les fonctions analytiques dont la partie réelle ne dépend que de $|z|$.

Solution de l'exercice 6

1. Avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta} &= -\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \rho^{-1}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho^{-1}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.\end{aligned}$$

Donc les conditions de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} - \rho^{-1}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} &= \sin\theta\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^{-1}\cos\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}, \\ \cos\theta\frac{\partial v}{\partial\rho} - \rho^{-1}\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta} &= -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} - \rho^{-1}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta},\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \rho^{-1}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\rho^{-1}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. Si u dépend seulement de $|z|$, la dérivée $\partial_\theta u = 0$. Les conditions de Cauchy-Riemann imposent donc $\partial_\rho v = 0$ aussi. C'est-à-dire, v dépend de θ seulement. La deuxième condition impose $\rho\partial_\rho u = \partial_\theta v$. Le côté gauche de cette équation dépend de ρ seulement tandis que le côté droite de cette équation dépend de θ seulement. Donc il s'agit d'une constante,

$$\rho\partial_\rho u = \partial_\theta v = A.$$

On obtient

$$u = \int d\rho\, \frac{A}{\rho} = A\ln\rho + c_\rho, \qquad v = \int d\theta\ A = A\theta + c_\theta.$$

Donc

$$f \;=\; u + iv = A(\ln\rho + i\theta) + \text{cste}.$$

[Si f dépend seulement de $|z|$, les dérivées $\partial_\theta u = \partial_\theta v = 0$. Les conditions de Cauchy-Riemann imposent donc $\partial_r u = \partial_r v = 0$ aussi. C'est-à-dire, $f(z) = \text{cste}$.]