J. COLLOT ET M. ISMAIL

Exercice 1

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Calculer $I_n = \oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz$ pour tout entier relatif n.

Solution de l'exercice 1

Sur le cercle de centre z_0 et de rayon R, on a $z - z_0 = Re^{i\theta}$. Avec $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} iRe^{i\theta} d\theta = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si} \quad n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Vérifier que la paramétrisation suivante : $\gamma : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$t \longmapsto \begin{cases} (2t-1)a - ib & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ a + ib(2t-3) & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ (5-2t)a + ib & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3 \\ -a + i(7-2t)b & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

   est celle du bord du rectangle $\mathcal{R}$ défini par : $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} / -a \leq \Re(z) \leq a \text{ et } -b \leq \Im(z) \leq b\}$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2. Calculer $\int_\gamma z^n dz$ pour tout entier relatif n.

Solution de l'exercice 2

1. Évident
2. Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{C}^*$, on a

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= 2a \int_0^1 f((2t-1)a - ib)dt \\ &+ 2ib \int_1^2 f(a + ib(2t-3))dt \\ &- 2a \int_2^3 f((5-2t)a + ib)dt \\ &- 2ib \int_3^4 f(-a + i(7-2t)b)dt. \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit en utilisant les changements de variables respectifs : $x = 2t-1$, $y = 2t-3$, $z = 2t-5$ et $u = 2t-7$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= a\int_{-1}^{1} f(ax-ib)dx + ib\int_{-1}^{1} f(a+iby)dy \\ &- a\int_{-1}^{1} f(-az+ib)dz - ib\int_{-1}^{1} f(-a-ibu)du.\end{aligned}$$

D'une part on voit que pour f paire on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Par conséquent, $\boxed{\int_\gamma z^{2k}dz = 0.}$

D'autre part, pour f impaire ($f(z) = z^{2k+1}$ et $k \neq -1$), on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= 2a\int_{-1}^{1} f(ax-ib)dx + 2ib\int_{-1}^{1} f(a+ibx)dx \\ &= 2a\int_{-1}^{1} (ax-ib)^{2k+1}dx + 2ib\int_{-1}^{1} (a+ibx)^{2k+1}dx \\ &= \frac{1}{k+1}\left[(ax-ib)^{2(k+1)}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{k+1}\left[(a+ibx)^{2(k+1)}\right]_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_\gamma z^{2k+1}dz = 0.}$ Finalement, pour $f(z) = 1/z$, on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= 2a\int_{-1}^{1}\frac{dx}{ax-ib} + 2ib\int_{-1}^{1}\frac{dx}{a+ibx} \\ &= 2a\int_{-1}^{1}\frac{ax+ib}{(ax)^2+b^2}dx + 2ib\int_{-1}^{1}\frac{a-ibx}{a^2+(bx)^2}dx \\ &= \int_{-\frac{a}{b}}^{\frac{a}{b}}\frac{2t+2i}{t^2+1}dt + \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}}\frac{2t+2i}{t^2+1}dt \\ &= 4i\left(\arctan(\frac{a}{b}) + \arctan(\frac{b}{a})\right) = 4i\frac{\pi}{2} = 2i\pi.\end{aligned}$$

où l'on a pris $t = ax/b$ comme changement de variables dans la première intégrale et $t = bx/a$ comme changement de variables dans la seconde.

Exercice 3

Calculer $\oint_{|z|=1} f(z)dz$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(z) = |z|^n$ pour $z \in \mathbb{C}^*$, où n est un entier relatif.
2. $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$, où n est un entier relatif.

Solution de l'exercice 3

Sur le cercle γ de centre 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens positif, $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et on a

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta. \tag{1}$$

1. Pour $f(z) = |z|^n$, on a

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} |e^{i\theta}|^n ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta} d\theta = 0.$$

2. Pour $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$, on a

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) - \sin(n\theta)) (i\cos(\theta) - \sin(\theta)) d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) - \sin(n\theta)) \cos(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) - \sin(n\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(\theta) d\theta.\end{aligned}$$

En effet,
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(m\theta)d\theta = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z},$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\sin(m\theta)d\theta = 0 \ \forall n \neq m,$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)^2 d\theta = \pi$ pour $n \neq 0$.

On en déduit

$$\oint_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \text{ et } n \neq -1 \\ (i-1)\pi & \text{si} \quad n = 1 \\ (i+1)\pi & \text{si} \quad n = -1 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère la fonction définie par $f(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ pour les chemins suivants :

1. $\gamma \,:\, t \in [0,1] \longmapsto t + it^2$
2. $\gamma \,:\, t \in [0,2\pi] \longmapsto e^{t+it}$
3. $\gamma \,:\, t \in [0,2\pi] \longmapsto \cos t + i\sin(2t)$

Solution de l'exercice 4

1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 \left((t+it^2)^2 - 1\right)(1+2it)dt \\ &= \int_0^1 (t+it^2)^2(1+2it)dt - \int_0^1 (1+2it)dt \\ &= \left[\frac{(t+it^2)^3}{3} - (t+it^2)\right]_0^1 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} (e^{2t+2it}-1)(1+i)e^{t+it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} e^{3(1+i)t}(1+i)dt - \int_0^{2\pi} (1+i)e^{(1+i)t}dt \\
&= \left[\frac{e^{3(1+i)t}}{3} - e^{(1+i)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} \left((\cos t + i\sin(2t))^2 - 1\right)(-\sin t + 2i\cos(2t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t + i\sin(2t))^2(-\sin t + 2i\cos(2t))dt \\
&- \int_0^{2\pi} (-\sin t + 2i\cos(2t))dt \\
&= \left[\frac{(\cos t + i\sin(2t))^3}{3} - (\cos t + i\sin(2t))\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$