



Mathématiques avancées
L3 Physique – 1ère année Magistère
UFR PHITEM

Mourad ISMAIL

Mourad.Ismail@univ-grenoble-alpes.fr

<http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/Mourad-Ismail>



2016-09-26 15:34:23 +0200
Révision : eedca8d (2016-09-26)

Table des matières

1	Notations et quelques rappels	4
2	Discrétisation d'un problème aux limites 1D	6
2.1	Introduction	7
2.2	Exemples simples de problèmes aux limites et aux valeurs initiales	7
2.3	Un problème de convection-diffusion stationnaire	8
2.4	Méthode de Galerkin	9
2.4.1	Problème discret	10
2.5	Méthode des éléments finis	11
2.5.1	Méthode des éléments finis de degré 1	11
2.5.2	Résolution du système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$	13
2.6	Estimation d'erreur	14
2.6.1	Cas général de la méthode de Galerkin	14
2.6.2	Cas des éléments finis de degré 1	16
2.7	Quelques résultats numériques	17
3	Distributions et espaces de Sobolev	21
3.1	L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$	21
3.2	L'espace dual $\mathcal{D}'(\Omega)$	22
3.3	Dérivées des distributions	24
3.4	Traces et formules de Green	26
4	Problèmes aux limites elliptiques	28
4.1	Problème de Dirichlet	28
4.2	Problème de Neumann	29
4.3	Problèmes variationnels abstraits	29
4.4	Exercices	30

5	Calcul des variations	33
5.1	Introduction	33
5.2	Exemples	34
5.2.1	Chemin le plus court dans un plan euclidien	34
5.2.2	Mécanique analytique	34
5.3	Calcul des variations	34
5.3.1	Différentiation d'une fonctionnelle	35
5.3.2	Exercices	36
5.4	Optimisation sous contraintes	37
5.4.1	Multiplicateurs de Lagrange	39
5.5	Généralisation aux fonctionnelles	40
5.5.1	Minimisation sous contraintes (d'égalité)	41
5.5.2	Application aux équations de Stokes. Formulation point-selle	42
	Annexes	45
A	Formulation variationnelle des équations de Stokes	46

Notations et quelques rappels

Définition 1.1 (*Espace vectoriel sur \mathbb{R}*)

Un espace vectoriel sur \mathbb{R} (ou un \mathbb{R} -espace vectoriel) est un ensemble E muni de deux lois de compositions :

- une loi de composition interne $+$: $E \times E \longrightarrow E$ appelée addition
- une loi de composition externe \cdot : $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ appelée multiplication par un scalaire

telles que :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall u, v \in E$:
 - $1u = u$
 - $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
 - $\beta(\alpha u) = (\beta\alpha)u$
 - $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

Définition 1.2 (*Forme linéaire*)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle une forme linéaire sur E toute application linéaire ℓ de E dans \mathbb{R} .

Définition 1.3 (*Forme bi-linéaire*)

On appelle une forme bi-linéaire sur E toute application $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.

Définition 1.4 (*Produit scalaire*)

On appelle produit scalaire sur E une forme bi-linéaire (\cdot, \cdot) sur E définie positive. C'est-à-dire

$$(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in E \text{ et } (u, u) = 0 \iff u = 0. \quad (1.1)$$

Définition 1.5 (Norme)

Une norme sur E est une application $\| \cdot \|$ de E dans \mathbb{R}_+ telle que :

- $\forall u \in E, \|u\| = 0 \implies u = 0,$
- $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,$
- $\forall (u_1, u_2) \in E \times E, \|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|.$

Remarque 1.1 Un produit scalaire définit sur E une structure d'espace vectoriel normé pour la norme $u \mapsto \|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Théorème 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$), alors on a l'inégalité suivante, dite de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V. \quad (1.2)$$

Définition 1.6 (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.7 (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée.

Définition 1.8 (Espace dual)

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de E , et l'on note E' , l'ensemble des formes linéaires continues sur E , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans \mathbb{R} bornées sur $B_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Pour $f \in E'$, on utilisera la notation $\langle f, x \rangle$ pour désigner $f(x)$. L'espace E' est un e.v.n. pour la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in B_E} \langle f, x \rangle. \quad (1.3)$$

Discrétisation d'un problème aux limites unidimensionnel

2.1 Introduction	9
2.2 Exemples simples de problèmes aux limites et aux valeurs initiales	10
2.3 Un problème de convection-diffusion stationnaire	11
2.4 Méthode de Galerkin	12
2.4.1 Problème discret	13
2.5 Méthode des éléments finis	14
2.5.1 Méthode des éléments finis de degré 1	14
2.5.2 Résolution du système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$	16
2.6 Estimation d'erreur	17
2.6.1 Cas général de la méthode de Galerkin	17
2.6.2 Cas des éléments finis de degré 1	19
2.7 Quelques résultats numériques	20

L'objectif de ce chapitre est de donner une introduction succincte à la formulation variationnelle d'une équation aux dérivées partielles, sa discrétisation et sa résolution numérique. Nous essayons autant que possible de contourner les concepts mathématiques avancés qui feront l'objet de prochains chapitres.

Le processus général présenté ici consiste à mettre en équations un problème physique, leur discrétisation, la résolution numérique du système algébrique sous-jacent et enfin l'erreur d'approximation, son contrôle et sa mise en évidence grâce aux simulations numériques.

2.1 Introduction

La plupart des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques sont régis par des systèmes complexes d'équations aux dérivées partielles. La résolution analytique de tels systèmes est souvent très difficile à réaliser voire impossible. D'où l'un des intérêts de la résolution numérique à l'aide d'ordinateurs. Pour ce faire, ces équations doivent être discrétisées pour se placer en dimensions finies. Cela permettra l'écriture d'un système algébrique sous-jacent.

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer un tel processus en se basant sur un problème simple en une dimension de l'espace.

Commençons d'abord par deux définitions regroupant deux grands types de problèmes modélisant des phénomènes physiques :

- **Les problèmes aux limites** sont des problèmes différentiels posés sur un intervalle $]a, b[$ de la droite réelle, ou sur un ouvert à plusieurs dimensions ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$) et qui nécessitent des informations sur la solution au bord du domaine. Ainsi, les valeurs de l'inconnue (ou de ses dérivées) sont fixées aux extrémités a et b de l'intervalle $]a, b[$ ou sur le bord $\partial\Omega$ dans le cas multidimensionnel. Dans ce dernier cas, le problème différentiel met en jeu les dérivées partielles de la solution par rapport aux coordonnées de l'espace.
- Les équations dépendant du temps (noté t) sont appelées **problèmes aux valeurs initiales**. Pour ce type d'équations, on doit aussi fournir la valeur de la solution à l'instant initial $t = 0$.

2.2 Exemples simples de problèmes aux limites et aux valeurs initiales

- **Équation de Poisson :**

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (2.1)$$

ou (en dimensions supérieures)

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega, \quad (2.2)$$

où f est une fonction donnée et Δ est l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (2.3)$$

- **Équation de la chaleur :**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad x \in]a, b[, \quad t > 0, \quad (2.4)$$

ou (en dimensions supérieures)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \mu \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

où $\mu > 0$ est un coefficient donné, correspondant à la conductivité thermique, et f une fonction donnée.

— **Équation des ondes :**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad x \in]a, b[, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

ou (en dimensions supérieures)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.7)$$

où $c > 0$ est une constante donnée.

2.3 Un problème de convection-diffusion stationnaire

Soient $f : x \in [0, 1] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ et $c : x \in [0, 1] \mapsto c(x) \in \mathbb{R}$ deux fonctions continues données et soit $\mu > 0$ fixé. Nous cherchons une fonction $u : x \in [0, 1] \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$-\mu u''(x) + c(x)u'(x) = f(x) \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (2.8)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.9)$$

Le problème (2.8)-(2.9) est appelé problème de **convection-diffusion stationnaire**. Le terme de diffusion est $-\mu u''(x)$ alors que le terme de convection est $c(x)u'(x)$. Si $c(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$, le problème (2.8)-(2.9) modélise la diffusion de la chaleur stationnaire (c'est-à-dire le problème (2.4) avec $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$). Si nous choisissons $\mu = 0$ dans (2.8), nous obtenons alors un problème de transport stationnaire. L'exemple typique d'une situation physique régie par les équations (2.8)-(2.9) est le problème de la propagation de chaleur stationnaire dans un fluide (unidimensionnel) soumis à des mouvements de convection stationnaire. Dans ce cas, u représente la température du fluide et c sa vitesse.

Remarquons que l'équation (2.8) est une équation différentielle du deuxième ordre dont l'intégration doit faire apparaître deux constantes. Celles-ci peuvent être déterminées grâce aux **conditions aux limites** de type celles données par l'équation (2.9). Le **problème aux limites** ainsi obtenu admet une solution unique.

D'une manière générale, et en dehors de quelques exemples simples, on ne sait pas calculer explicitement la solution $u(x)$ d'un problème aux limites. Il convient donc de trouver un moyen d'approcher les valeurs de la solution d'un tel problème

d'aussi près que l'on veut. Pour ce faire, on peut **discrétiser** notre problème, c'est-à-dire le transformer en un problème qui lui est proche et qui comprend un nombre fini de valeurs à calculer.

2.4 Méthode de Galerkin

Considérons le problème (2.8)-(2.9) et multiplions sa première équation par une fonction $v \in C^1([0, 1])$. Si nous intégrons sur l'intervalle $[0, 1]$, nous obtenons :

$$-\mu \int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (2.10)$$

En intégrant par partie le premier terme, nous avons :

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \mu u'(1)v(1) + \mu u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (2.11)$$

Si nous imposons à la fonction v d'être nulle en $x = 0$ et $x = 1$, alors nous en déduisons l'égalité :

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (2.12)$$

Définition 2.1 Soit maintenant V l'ensemble de toutes les fonctions g continues, de première dérivée g' continue par morceaux,¹ et telles que $g(0) = g(1) = 0$.

Exercice 2.1 Vérifier que V est un espace vectoriel.

Nous allons maintenant chercher $u \in V$ qui satisfait (2.12) pour toute fonction $v \in V$. Ainsi, on obtient le problème suivant :

trouver $u \in V$ telle que :

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V. \quad (2.13)$$

Le problème (2.13) est appelé **problème faible** ou **problème variationnel**. A priori, les fonctions u solutions du problème (2.13) sont moins régulières que celles solutions du problème différentiel (2.8)-(2.9) (appelé aussi **formulation forte**). En effet, le problème faible (2.13) contient une dérivée première de la solution u alors que le problème différentiel (2.8) contient une dérivée seconde.

1. Ici l'expression « g' continue par morceaux » signifie que g' existe et est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points de l'intervalle $[0, 1]$ où elle pourrait ne pas être définie mais posséderait des limites à gauche et à droite de ces points. Voir figure 2.3 page 13 pour un exemple d'une telle fonction.

Remarque 2.1 *Il est évident que toute solution u du problème différentiel est solution du problème faible. On peut aussi montrer que sous certaines conditions sur c , le problème faible a une et une seule solution u qui est celle du problème différentiel (on reviendra à ce dernier résultat dans les chapitres suivants).*

2.4.1 Problème discret

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont N fonctions de V linéairement indépendantes, on peut construire un sous-espace vectoriel de V , noté V_h , engendré par les combinaisons linéaires des fonctions φ_i . Ainsi, V_h sera l'ensemble de toutes les fonctions g qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x), \quad (2.14)$$

où g_i est un nombre réel pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Il est donc naturel de formuler une approximation du problème (2.13) de la manière suivante : trouver une fonction $u_h \in V_h$ telle que

$$\mu \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h'(x) v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.15)$$

Définition 2.2 *On dira que (2.15) est une **approximation de Galerkin** de (2.13).*

Puisque u_h est cherchée dans V_h , on peut écrire :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x), \quad (2.16)$$

où u_1, u_2, \dots, u_N sont N nombres réels à déterminer. En prenant $v_h = \varphi_j$, $1 \leq j \leq N$, dans le problème discret (2.15), ce dernier est alors équivalent à chercher u_1, u_2, \dots, u_N telles que

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\mu \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad (2.17)$$

pour tout $j = 1, 2, \dots, N$.

Si A est la matrice $N \times N$ de coefficients

$$A_{ji} = \mu \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) dx, \quad (2.18)$$

si \vec{u} est le vecteur de composantes u_1, u_2, \dots, u_N et si \vec{f} est le vecteur dont la $j^{\text{ème}}$ composante est

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \quad (2.19)$$

alors les problèmes (2.15) et (2.17) sont équivalents à chercher \vec{u} tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \quad (2.20)$$

Nous dirons que (2.15), (2.17) et (2.20) sont une discrétisation du problème continu (2.8)-(2.9). Notons qu'après avoir construit la matrice A et le vecteur \vec{f} , la méthode de Galerkin nécessite la résolution d'un système linéaire.

2.5 Méthode des éléments finis

Dans la suite nous étudions en détail une méthode de Galerkin particulière, **la méthode des éléments finis**, qui revient à faire un choix judicieux des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ définissant V_h , de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- La matrice A doit être une **matrice creuse** au sens où elle contient un grand nombre de coefficients nuls.
- La solution u_h du problème (2.15) doit converger, dans un certain sens, vers la solution u du problème (2.13) lorsque le nombre N de fonctions linéairement indépendantes de V devient grand.

2.5.1 Méthode des éléments finis de degré 1

Pour des raisons de simplicité, nous nous plaçons dans le cadre d'une seule dimension de l'espace et nous considérons l'intervalle $[0, 1]$. Nous commençons par diviser $[0, 1]$ en $N + 1$ parties et nous posons $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_i = ih$ avec $i = 1, \dots, N + 1$. Voir figure 2.1.

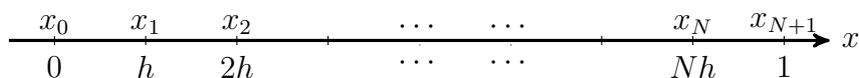


FIGURE 2.1 – Points de discrétisation.

Pour $i = 1, 2, \dots, N$, on définit la fonction suivante :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Le graphe de la fonction φ_i est représenté dans la figure 2.2. Clairement la fonction φ_i est telle que :

- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 0 \leq j \leq N + 1,$
- $\varphi_i|_{[x_{i-1}, x_i]}$ est un polynôme de degré un, $1 \leq i \leq N,$
- $\varphi_i|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré un, $1 \leq i \leq N.$

En outre,

- $\varphi_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, N,$
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 2.2 Justifier que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont effectivement linéairement indépendantes.

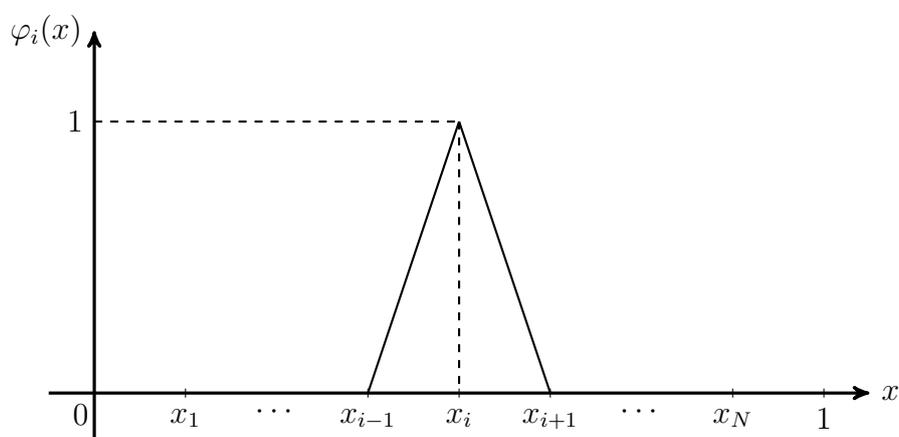


FIGURE 2.2 – Le graphe de la fonction φ_i .

Nous choisissons ces fonctions φ_i pour engendrer l'espace V_h . Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ sont les **nœuds de la discrétisation**,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les **éléments géométriques**,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type **éléments finis de degré 1** associés aux nœuds intérieurs x_1, x_2, \dots, x_N .

Si $g \in V_h$, alors g est une combinaison linéaire des φ_i

$$g = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x), \quad (2.22)$$

et le graphe de g est représenté dans la figure 2.3 page suivante.

En particulier, nous remarquons que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ on a $g(x_j) = g_j$, que $g(0) = g(1) = 0$ et que g est une fonction affine sur chaque élément géométrique. Rappelons que le système linéaire (2.20) est une discrétisation du problème continu (2.8)-(2.9). À présent, nous disposons de toutes les informations nécessaires pour

Le système linéaire sous-jacent est $A\vec{u} = \vec{f}$, où

$$A = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{bmatrix} \quad \text{et } \vec{f} = h \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

On obtient ainsi une matrice A tridiagonale², symétrique et définie positive et donc inversible.

Exercice 2.4 Vérifier qu'une matrice symétrique et définie positive est inversible.

Bien que notre matrice A soit d'une forme très simple, il n'est évidemment pas question de calculer son inverse mais d'utiliser une méthode de résolution de système linéaire. On sait que dans notre cas A admet une factorisation LU ($A = LU$) avec L une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure. En particulier, dans notre cas, L et U doivent être bidiagonales et elles sont données par ces expressions :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_N & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } U = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & \alpha_N \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Les coefficients inconnus α_i et β_i sont déterminés en écrivant l'égalité $LU = A$. Ce qui conduit aux relations de récurrence :

$$\alpha_1 = 2, \quad \beta_i = -\frac{1}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = 2 + \beta_i, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2.26)$$

Avec (2.26), il est facile de résoudre le système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$ en résolvant les deux systèmes bidiagonaux obtenus en remplaçant A par LU . Cette technique est connue sous le nom d'**algorithme de Thomas**. Son coût est de l'ordre de N opérations.

2.6 Estimation d'erreur

2.6.1 Cas général de la méthode de Galerkin

Afin de simplifier l'analyse, on suppose que nous sommes toujours dans le cas où $c(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $\mu = 1$. Munissons l'espace vectoriel V de la norme $\|\cdot\|_1$

2. Les seuls éléments non nuls sont sur la diagonale principale et sur les premières sur- et sous-diagonales

définie par :

$$\|g\|_1 = \sqrt{\int_0^1 (g'(x))^2 dx} \quad \text{si } g \in V. \quad (2.27)$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition 2.1 *Si u est solution du problème faible (2.13) et si u_h est solution du problème discret (2.15), nous avons l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_h\|_1 \leq \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1. \quad (2.28)$$

Démonstration. Si u est solution du problème (2.13) et si u_h est solution du problème (2.15), nous obtenons, par soustraction de ces deux relations :

$$\int_0^1 (u'(x) - u_h'(x))v_h'(x)dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.29)$$

En posant $e(x) = u(x) - u_h(x)$, qui représente l'erreur entre u et u_h au point x , l'égalité (2.29) devient :

$$\int_0^1 e'(x)v_h'(x)dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.30)$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_1$ et de l'erreur e , nous avons

$$\|e\|_1^2 = \int_0^1 (e'(x))^2 dx = \int_0^1 e'(x)(u'(x) - u_h'(x))dx. \quad (2.31)$$

En tenant compte de (2.30), nous obtenons donc :

$$\|e\|_1^2 = \int_0^1 e'(x)u'(x)dx = \int_0^1 e'(x)(u'(x) - v_h'(x))dx, \quad (2.32)$$

où v_h est un élément quelconque de V_h . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cette dernière expression, nous obtenons :

$$\|e\|_1^2 \leq \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (u'(x) - v_h'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.33)$$

c'est-à-dire

$$\|e\|_1^2 \leq \|e\|_1 \|u - v_h\|_1. \quad (2.34)$$

Il suffit de simplifier par $\|e\|_1$ et de prendre le minimum sur $v_h \in V_h$ pour obtenir (2.28). \square

2.6.2 Cas des éléments finis de degré 1

Si $u \in V$, alors la fonction définie par

$$r_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i \quad (2.35)$$

est l'interpolant de degré 1 par intervalle de la fonction u . C'est-à-dire $r_h u(x_i) = u(x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et $r_h u|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 1.

Par construction, $r_h u \in V_h$ et nous avons bien évidemment :

$$\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq \|u - r_h u\|_1. \quad (2.36)$$

Ainsi, l'estimation d'erreur (2.28) devient :

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - r_h u\|_1. \quad (2.37)$$

Cette dernière inégalité montre que l'erreur entre u et u_h dans la norme $\|\cdot\|_1$ peut être contrôlée si nous savons estimer l'erreur d'interpolation entre u et $r_h u$. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 2.1 *On suppose que $c(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $\mu = 1$. Soit u la solution du problème faible (2.13) et soit u_h la solution du problème discret (2.15) lorsque V_h est engendré par les fonctions de base (2.21). Alors nous avons l'estimation d'erreur :*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch. \quad (2.38)$$

où C est une constante indépendante de N (et donc de h).

Démonstration. L'estimation d'erreur (2.38) est une conséquence de (2.37) à condition de montrer que

$$\|u - r_h u\|_1 \leq Ch, \quad (2.39)$$

où C est une constante indépendante de N . Posons donc maintenant $w = u - r_h u$. Puisque nous avons $r_h u(x_i) = u(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq N + 1$, nous avons donc $w(x_i) = 0$. En utilisant le théorème de Rolle, nous en déduisons qu'il existe $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $w'(\xi_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq N$. Ainsi, puisque $r_h u$ est un polynôme de degré 1 sur chaque élément géométrique $[x_i, x_{i+1}]$ nous obtenons, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$w'(x) = \int_{\xi_i}^x w''(s) ds = \int_{\xi_i}^x u''(s) ds. \quad (2.40)$$

Nous déduisons de cette égalité que, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|w'(x)| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)| ds. \quad (2.41)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons donc, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|w'(x)| \leq \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

$$\leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.43)$$

En élevant au carré cette dernière inégalité et en l'intégrant sur l'élément géométrique $[x_i, x_{i+1}]$, nous obtenons :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds. \quad (2.44)$$

Il suffit maintenant de sommer sur l'indice i pour avoir :

$$\|u - r_h u\|_1^2 = \|w\|_1^2 = \int_0^1 |w'(x)|^2 dx \quad (2.45)$$

$$= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \quad (2.46)$$

$$= h^2 \int_0^1 |u''(s)|^2 ds. \quad (2.47)$$

Ce qui achève la démonstration avec $C = \int_0^1 |u''(s)|^2 ds$. □

Exercice 2.5 Pourquoi on a utilisé $w'' = u''$ dans l'équation (2.40) ?

Remarque 2.2 Le résultat du théorème précédent nous indique clairement que l'erreur d'approximation de la solution u par la fonction u_h dépend de C et de h . Ce qui se traduit par une dépendance de la régularité de la solution u et du nombre de points de discrétisation.

2.7 Quelques résultats numériques

Afin de vérifier que l'on peut retrouver numériquement les résultats théoriques présentés dans les sections précédentes, nous nous intéressons ici à un exemple simple : l'équation de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogène en une dimension de l'espace :

$$-u''(x) = 2, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (2.48)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.49)$$

Nous connaissons bien évidemment la solution analytique de ce problème. Il s'agit du polynôme de second degré :

$$u(x) = x(1 - x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.50)$$

Ce problème est discrétisé en utilisant des éléments finis de degré 1 avec différentes valeurs du pas de maillage

$$h = \frac{1}{N+1} \in \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{100}, \frac{1}{160}, \frac{1}{320}, \frac{1}{640}, \frac{1}{1280}, \frac{1}{2560}, \frac{1}{5120} \right\}.$$

La solution exacte (2.50) ainsi que les solutions calculées en résolvant le système linéaire (2.24) pour $h \in \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100} \right\}$ sont représentées dans les figures 2.4 et 2.5.

Remarque 2.3 *On remarque que plus le pas de maillage h est petit plus la solution calculée est proche de la solution exacte.*

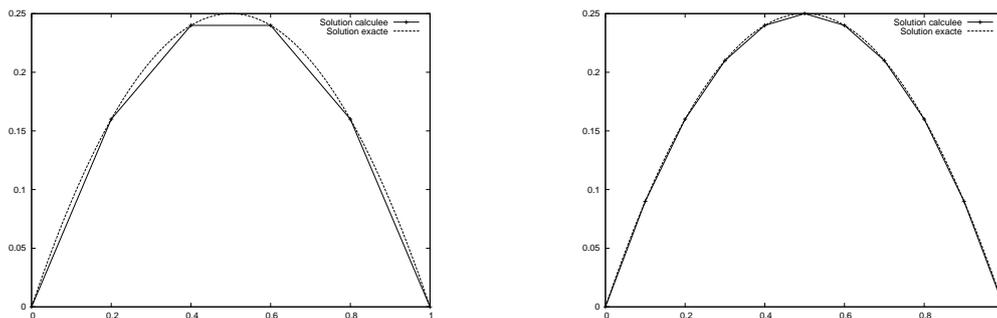


FIGURE 2.4 – Solution exacte et solution calculée pour $h = \frac{1}{5}$ et $h = \frac{1}{10}$.

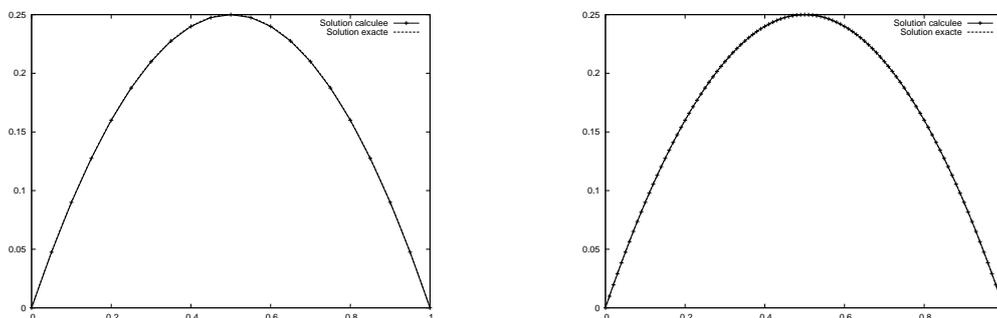


FIGURE 2.5 – Solution exacte et solution calculée pour $h = \frac{1}{20}$ et $h = \frac{1}{100}$.

Pour avoir une idée plus précise sur la vitesse de convergence de la solution calculée vers la solution exacte, nous présentons en échelle logarithmique dans la figure 2.6 l'erreur en norme $\|\cdot\|_1$ (appelée aussi erreur H^1) en fonction de h . Cette courbe est bien évidemment en accord avec l'estimation d'erreur (2.38).

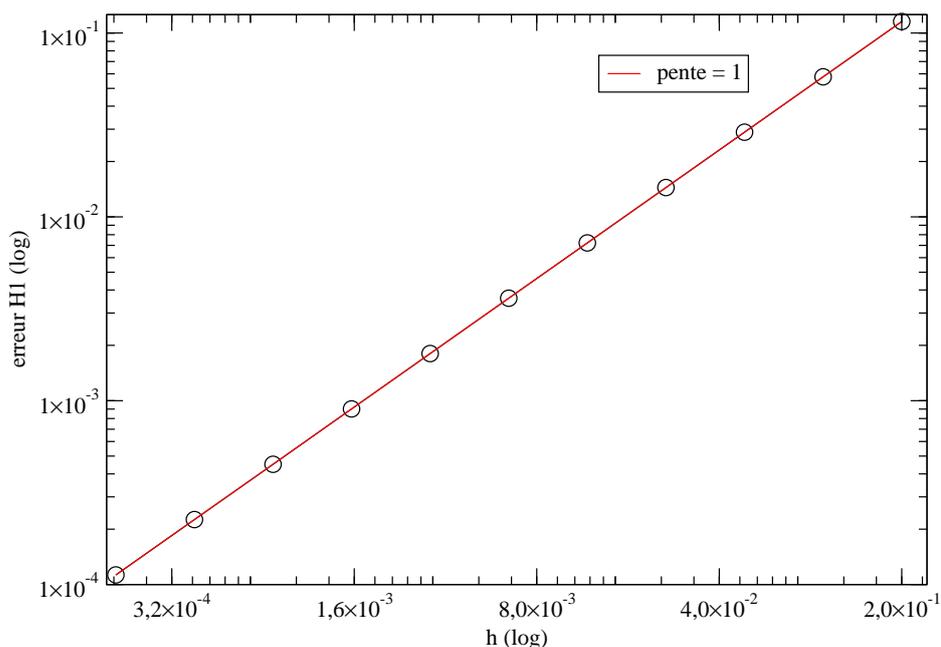


FIGURE 2.6 – Erreur $\|u_{\text{Exacte}} - u_{\text{Calculée}}\|_1$ en fonction de h .

Exercice 2.6 Pourquoi résout-on un système linéaire au lieu de calculer l'inverse de la matrice A ?

Méthode beaucoup plus coûteuse en nombre d'opérations.

Exercice 2.7 Comment résoudre $A\vec{u} = \vec{f}$ en utilisant la factorisation LU ?

$$A\vec{u} = \vec{f} \Leftrightarrow LU\vec{u} = \vec{f} \Rightarrow \begin{cases} L\vec{v} = \vec{f} \\ U\vec{u} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = f_1, & v_i = f_i - \beta_i v_{i-1}, & i = 2, \dots, N \\ u_N = \frac{v_N}{\alpha_N}, & u_i = \frac{v_i + \alpha_i u_{i+1}}{\alpha_i}, & i = N-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Exercice 2.8 Pourquoi la matrice A est-elle creuse? Pourquoi est-elle tridiagonale dans l'exemple présenté?

A contient beaucoup de coefficients nuls parce que l'intersection des supports des fonctions φ_i est souvent vide. Dans notre exemple, pour une fonction φ_i , seuls les supports de φ_{i-1} et de φ_{i+1} ont une partie commune avec celui de φ_i .

Exercice 2.9 De quoi dépend la constante C dans l'estimation d'erreur : $\|u - u_h\|_1 \leq Ch$? Peut-on avoir une approximation de mauvaise qualité de la solution même si on prenait h très petit?

On a $C = \int_0^1 |u''(s)|^2 ds$. Donc C dépend de la régularité de u . On peut avoir une mauvaise approximation de la solution même si $h \ll 1$. Il suffit que la dérivée seconde de u oscille beaucoup.

Exercice 2.10 Que doit-on changer pour avoir une méthode des éléments finis d'ordre 2?

On prend des polynômes de degré 2 comme fonctions de base. On aura besoin de trois points de discrétisation par élément géométrique : les deux extrémités et le point milieu de chaque segment.

Exercice 2.11 Que gagne-t-on avec des éléments finis de degré 2? quel est le prix à payer? donner l'allure des courbes des figures 2.5 et 2.6 dans ce cas.

Si on utilise des éléments finis de degré 2, les courbes de la solution calculée et celle de la solution exacte de la section 6 seront superposées même avec un seul point intérieur ($N = 1$). L'erreur commise sera de l'ordre du zéro machine. Par contre si on choisit une solution analytique qui n'est pas un polynôme de degré 2, la courbe d'erreur en échelle logarithmique sera une droite de pente égale à 2. Le prix à payer réside dans le fait que la matrice du système linéaire est moins creuse et le calcul numérique est légèrement plus coûteux.

Exercice 2.12 Écrivez l'analogie 2D du problème de convection-diffusion présenté dans le texte.

$$-\mu \Delta u(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Distributions et espaces de Sobolev

3.1 L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$	25
3.2 L'espace dual $\mathcal{D}'(\Omega)$	26
3.3 Dérivées des distributions	28
3.4 Traces et formules de Green	31

Le but de ce chapitre est de rappeler (ou introduire) quelques notions élémentaires sur les distributions et les espaces de Sobolev. Ces notions seront d'une grande utilité pour la généralisation de la méthodologie introduite dans le chapitre 2.

Tout au long de ce chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^n .

3.1 L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 3.1 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions \mathcal{C}^∞ sur Ω à support compact¹ inclus dans Ω .*

Définition 3.2 *(Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$)*

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que φ_n converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

- *il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformément vers 0. C'est-à-dire*

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_n(x)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.1}$$

1. Un compact est un ensemble K tel que de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini. Dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finie, les compacts sont les ensembles fermés et bornés.

Avec

- α est le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,
- $D^\alpha \varphi_n = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Exemple 3.1 On peut vérifier que l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas vide. En effet, considérons la fonctions

$$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

On vérifie facilement que $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et que son support est exactement la boule fermée $\overline{B(0,1)}$. Grâce à cette fonction J , on peut construire une infinité d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$.

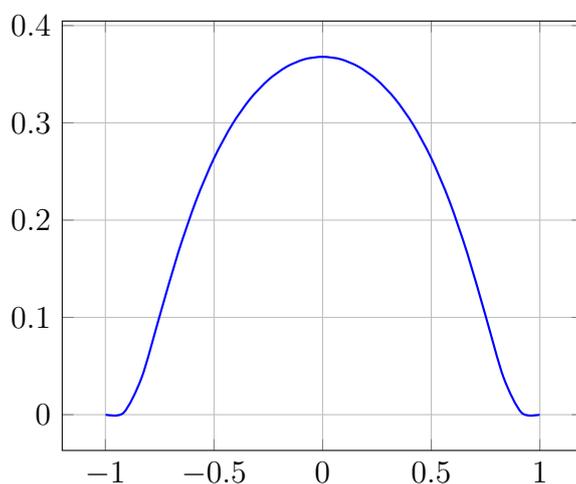


FIGURE 3.1 – Exemple d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Pour $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il est clair que $\varphi : x \longmapsto J\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et a un support égal à $\overline{B(0,\varepsilon)}$.

3.2 L'espace dual $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 3.3 $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $T : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ satisfait

- T est une application linéaire,
- T est continue. C'est-à-dire si φ_n converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge vers 0 dans \mathbb{R} .

T est appelé distribution.

Exemple 3.2 (*Masse de Dirac*)

Si $a \in \Omega$, δ_a désigne la distribution $\delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1 (voir RAVIART et THOMAS, [Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles](#))

- $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.
- $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Rappelons que $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions à carré sommable sur Ω . C'est-à-dire

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}. \quad (3.3)$$

Il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} fg. \quad (3.4)$$

On note aussi par $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norme induite par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$. C'est-à-dire

$$\|f\|_{0,\Omega} = (f, f)_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Étant donnée une fonction $f \in L^2(\Omega)$, on lui associe T_f , la distribution sur Ω , définie par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.6)$$

Remarque 3.1 De la même façon, on peut identifier l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ des fonctions localement intégrables sur Ω à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ mais pour des raisons de simplification nous nous contenterons ici de l'espace $L^2(\Omega)$ (qui est inclus dans $L^1_{loc}(\Omega)$).

Remarque 3.2 Les physiciens utilisaient la masse de Dirac bien avant l'élaboration de la théorie des distributions (par Laurent Schwartz). Ils la définissaient comme une fonction égale à zéro sauf en 0 où elle valait $+\infty$. Il est évident que cette définition ne correspond pas à celle d'une fonction au sens mathématique. En outre, il n'existe aucune fonction f telle que la masse de Dirac coïncide avec la distribution associée à f . En effet, on a le résultat suivant

Proposition 3.2 $\nexists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_0 = T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Démonstration. Supposons qu'une telle fonction existe. On aurait alors

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (3.7)$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[) \cap \mathcal{D}(]-\infty, 0[)$. Ceci implique que f est nulle presque partout. Or, en utilisant à nouveau l'équation (3.7) on a $\varphi(0) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ce qui bien évidemment absurde. \square

3.3 Dérivées des distributions

Si T est une distribution sur Ω , on définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle. \quad (3.8)$$

Puisque $\varphi \mapsto \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ceci définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ en tant que distribution sur Ω .

Remarque 3.3 Notons que, si f est une fonction de classe $C^1(\Omega)$, sa dérivée au sens classique $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coïncide avec sa dérivée au sens des distributions. En effet, par définition de la dérivée des distributions, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (3.9)$$

ce qui devient à l'aide d'une intégration par parties

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (3.10)$$

Notons que l'intégrale sur "le bord de Ω " n'apparaît pas dans cette intégration par parties parce que φ est à support compact dans Ω .

D'une manière générale, si T est une distribution sur Ω et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la dérivée au sens des distributions

$$D^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (3.11)$$

de T par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \quad (3.12)$$

Ainsi, une distribution sur Ω est indéfiniment dérivable au sens des distributions.

Exemple 3.3 On définit la fonction de Heaviside H sur \mathbb{R} par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

La dérivée au sens des distributions de H est la masse de Dirac à l'origine. C'est-à-dire

$$DT_H = \delta_0. \quad (3.14)$$

En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle DT_H, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H \varphi' = - \int_0^{+\infty} \varphi' = \varphi(0). \quad (3.15)$$

Remarque 3.4 Remarquons que la dérivée H' (au sens usuel) est nulle sauf en 0. Dans ce cas on a $DT_H \neq T_{H'}$.

Exemple 3.4 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et admettant une dérivée f' continue et bornée dans l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \cup_{j=1}^k \{x_j\}$. Soit $s_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$ le saut de f au point x_j . Alors le résultat précédent se généralise en

$$DT_f = T_{f'} + \sum_{j=1}^k s_j \delta_{x_j}. \quad (3.16)$$

En effet, on a : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle DT_f, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi' = \int_{\mathbb{R}} f' \varphi + \sum_{j=1}^k s_j \varphi(x_j). \quad (3.17)$$

Exemple 3.5 On prend $\Omega = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$. Vérifier que $DT_f = T_{2H-1}$ et $D^2T_f = 2\delta_0$.

Théorème 3.1 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaisant $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Alors T est constante sur chaque composante connexe de Ω .

Définition 3.4 (Gradient)

Soit φ une fonction de classe C^1 de Ω dans \mathbb{R} . On appelle gradient de φ la fonction de Ω dans \mathbb{R}^n définie par

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right). \quad (3.18)$$

Définition 3.5 On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions u dans $L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in L^2(\Omega)^n$ vérifiant

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \varphi v_i, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

On notera alors $\mathbf{v} = \nabla u$.

La fonction ∇u de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n est ainsi définie comme l'unique fonction vectorielle à composantes dans $L^2(\Omega)$ telle que l'identité entre vecteurs de \mathbb{R}^n

$$\int_{\Omega} u \nabla \varphi = - \int_{\Omega} \varphi \nabla u \quad (3.20)$$

soit vérifiée pour toute fonctions test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 3.3 L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad (3.21)$$

est un espace de Hilbert.

D'une manière générale, L'espace

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\} \quad (3.22)$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \quad (3.23)$$

et la norme

$$\|u\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 3.5 $H^2(\Omega)$ peut être défini comme l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles par rapport à l'une des composantes sont elles-mêmes dans $H^1(\Omega)$. On peut aussi définir de façon analogue les espaces $H^m(\Omega)$ pour $m = 3, 4, \dots$

Exemple 3.6 Prenons $\Omega =]-1, 1[$ et $f : x \mapsto |x|$. On a $DT_f = T_{2H-1}$ (voir l'exemple 3.5). La fonction $2H - 1$ n'est pas continue sur $[-1, 1]$ mais elle appartient bien à $L^2(]-1, 1[)$ et on vérifie que

$$\int_{-1}^1 |2H(x) - 1|^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2. \quad (3.25)$$

Ainsi, la fonction f est bien dans $H^1(]-1, 1[)$. Par contre elle n'est pas dans $H^2(]-1, 1[)$ car $D^2T_f = 2\delta_0$ et on sait qu'il n'existe pas de fonction g dans $L^2(]-1, 1[)$ telle que $\delta_0 = T_g$ (voir proposition 3.2).

Proposition 3.4 si $u \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)^n$, alors $u \in H^1(\Omega)$ et le gradient de u au sens classique s'identifie au gradient au sens des distributions.

3.4 Traces et formules de Green

Nous avons considéré jusqu'à présent des ouverts réguliers notés génériquement par Ω . Les frontières de tels ouverts étant de mesure nulle, on ne peut donc parler de restriction de fonctions au bords de Ω (noté $\partial\Omega$ ou Γ). Néanmoins, nous allons voir dans cette section qu'on peut donner un sens à cette notion de traces dès lors que les fonctions considérées sont suffisamment régulières.

Proposition 3.5 Si Ω est un ouvert borné de frontière Γ Lipschitzienne alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. En outre, l'application $\gamma_0 : \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \mapsto \varphi|_{\Gamma}$ se prolonge par continuité en une application linéaire de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Définition 3.6 (L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ l'image de l'application $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$. Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\gamma_0 v = g} \|v\|_{1,\Omega}. \quad (3.26)$$

Proposition 3.6 Si on note par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on montre (voir RAVIART et THOMAS, [Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles](#)) que cet espace est constitué des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ est nulle. Plus précisément

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (3.27)$$

Définition 3.7 (Dérivée normale)

Soit Ω un domaine de frontière Lipschitzienne. On note \mathbf{n} le vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω . Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on définit sa dérivée normale par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}. \quad (3.28)$$

Définition 3.8 Pour $u \in H^2(\Omega)$, sa dérivée normale sur Γ est définie par

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \quad (3.29)$$

où γ_1 est l'application

$$\gamma_1 : u \in H^2(\Omega) \longmapsto \nabla u \cdot \mathbf{n} \in L^2(\Gamma). \quad (3.30)$$

Proposition 3.7 (Première formule de Green)

Si Ω est un ouvert borné de frontière Lipschitzienne, et si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, alors on a

$$\int_{\Omega} v \nabla u = - \int_{\Omega} u \nabla v + \int_{\Gamma} uv \mathbf{n}. \quad (3.31)$$

Proposition 3.8 (Deuxième formule de Green)

Si Ω est un ouvert borné de frontière Lipschitzienne, et si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, alors on a

$$- \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v. \quad (3.32)$$

Problèmes aux limites elliptiques

4.1 Problème de Dirichlet	33
4.2 Problème de Neumann	34
4.3 Problèmes variationnels abstraits	35
4.4 Exercices	35

4.1 Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ Lipschitzienne. Étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie dans Ω et solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \tag{4.1}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{4.2}$$

On suppose que la solution u de (4.1)-(4.2) est suffisamment régulière ($u \in H^2(\Omega)$ par exemple). En multipliant l'équation (4.1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v. \tag{4.3}$$

En utilisant la deuxième formule de Green (??) et en tenant compte du fait que la trace de v sur Γ est nulle on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

D'autre part, la condition aux limites (4.2) et la proposition 3.6 nous donnent $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 4.1 *Le problème (4.1)-(4.2) est remplacé par la formulation variationnelle suivante : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (4.4).*

Démonstration. Par construction de la formulation variationnelle, si $u \in H^2(\Omega)$ est solution du problème (4.1)-(4.2) alors u vérifie (4.4). Inversement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (4.4), alors on a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.5)$$

En effet, par définition, $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ □

4.2 Problème de Neumann

On garde les mêmes hypothèses que dans le cas du problème de Dirichlet et on considère le problème suivant : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver une solution u définie dans Ω et solution de

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (4.7)$$

En faisant le même calcul que dans le cas du problème de Dirichlet, on obtient

Proposition 4.2 *Le problème (4.6)-(4.7) est remplacé par la formulation variationnelle suivante : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.8)$$

4.3 Problèmes variationnels abstraits

Le but de cette section est de donner un cadre général pour les formulations variationnelles. Pour ce faire, on se donne

- un espace de Hilbert H ,
- une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ continue sur $H \times H$. C'est-à-dire il existe une constante strictement positive M telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall (u, v) \in H \times H, \quad (4.9)$$

- une forme linéaire $\ell : v \mapsto \ell(v)$ continue sur H .

On considère alors le problème variationnel général : trouver $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H. \quad (4.10)$$

L'existence d'une solution au problème (4.10) est basée sur la coercivité de la forme bilinéaire a :

Définition 4.1 On dit qu'une forme bilinéaire a est coercive sur H (ou H -elliptique) si et seulement si il existe une constante α strictement positive tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H. \quad (4.11)$$

Théorème 4.1 (Lemme de Lax-Milgram)

Si la forme bilinéaire a est coercive, alors le problème (4.11) admet une solution unique $u \in H$. De plus on a l'estimation

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{H'}. \quad (4.12)$$

En outre, si a est symétrique, u est l'unique élément de H qui réalise le minimum de la fonctionnelle

$$v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v). \quad (4.13)$$

4.4 Exercices

Exercice 4.1 Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné et $f \in L^2(I)$. On se propose de trouver une fonction $u \in H^2(I)$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } I, \\ u'(a) = 0, \\ u'(b) = 0, \\ \int_a^b u(x) dx = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

1. Vérifier que si (4.14) a une solution, alors le second membre f satisfait aussi

$$\int_a^b f(x) dx = 0. \quad (4.15)$$

2. On introduit l'espace

$$H = \{v \in H^1(I); \int_a^b v(x) dx = 0\}, \quad (4.16)$$

muni du produit scalaire de $H^1(I)$.

Vérifier que H est une espace de Hilbert.

3. Donner la formulation variationnelle du problème (4.14). C'est-à-dire, définir la forme bilinéaire a sur H et la forme linéaire ℓ telles que (4.14) soit équivalent (du moins formellement) à : trouver $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H. \quad (4.17)$$

-
4. Montrer que la forme bilinéaire a est continue et coercive et que la forme linéaire ℓ est continue. En déduire l'existence et l'unicité de la solution $u \in H$ de (4.17).
 5. Établir la décomposition $H^1(I) = H \oplus V_0$, où V_0 désigne l'ensemble des fonctions constantes.
 6. On suppose maintenant que f satisfait (4.15). Montrer que la solution u de (4.17) satisfait alors

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x), \quad \forall v \in H^1(I). \quad (4.18)$$

En déduire que $u \in H^2(I)$ et est solution de (4.14).

Indication : pour montrer la coercivité de la forme bilinéaire, on pourra utiliser le résultat général suivant : si Ω est un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n à bord lipschitzien alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C \left(|v|_{1,\Omega} + \left| \int_{\Omega} v(x)dx \right| \right). \quad (4.19)$$

Avec $|\cdot|_{1,\Omega}$ désigne la semi norme de $H^1(\Omega)$ définie par

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2. \quad (4.20)$$

Exercice 4.2 Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ un rectangle ouvert et borné de \mathbb{R}^2 . Mettre sous forme variationnelle le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{dans } \Omega, \\ u(a, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, y) = 0 & \text{si } c < y < d, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, c) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, d) = x & \text{si } a < x < b. \end{cases} \quad (4.21)$$

Exercice 4.3 Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n à frontière suffisamment régulière. Pour $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \left(\int_{\Omega} u \right) \left(\int_{\Omega} v \right). \quad (4.22)$$

1. Montrer que a est coercive.
2. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ au problème

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.23)$$

Montrer alors que

$$\int_{\Omega} u = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f, \quad (4.24)$$

où $|\Omega|$ désigne la mesure de Ω .

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 dx. \quad (4.25)$$

3. En particulier, si $\int_{\Omega} f = 0$, quelle l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u .

Exercice 4.4 *Formulation variationnelle des équations de Stokes*

Voir annexe **A** page **46**

5.1 Introduction	39
5.2 Exemples	39
5.2.1 Chemin le plus court dans un plan euclidien	39
5.2.2 Mécanique analytique	40
5.3 Calcul des variations	40
5.3.1 Différentiation d'une fonctionnelle	41
5.3.2 Exercices	42
5.4 Optimisation sous contraintes	43
5.4.1 Multiplicateurs de Lagrange	44
5.5 Généralisation aux fonctionnelles	45
5.5.1 Minimisation sous contraintes (d'égalité)	47
5.5.2 Application aux équations de Stokes. Formulation point-selle	48

5.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctionnelles J (fonctions de fonctions) qu'on cherche à minimiser (ou à maximiser). Par exemple, si on prend $J : \mathcal{C}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$J(f) = \int_0^1 [f(x)^2 + f'(x)^2] dx, \tag{5.1}$$

et on cherche une fonction f pour laquelle $J(f)$ est maximale. À titre d'exemple, si on prend $f : x \mapsto \sin(x)$, $J(f) = 1$ et si on prend $f : x \mapsto e^x$, $J(f) = e^2 - 1$.

5.2 Exemples

5.2.1 Chemin le plus court dans un plan euclidien

Pour trouver le chemin le plus court entre les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , il suffit de minimiser la fonctionnelle

$$J(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5.2)$$

En effet, on prend $J = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} ds$ où s désigne l'abscisse curviligne et on remplace $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ par $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

5.2.2 Mécanique analytique

Prenons une particule de masse m qui part du point $x = 0$ à l'instant $t = 0$ et arrive au point $x = x_1$ à l'instant $t = t_1$. Cette particule est soumise à un potentiel $V(x)$.

La fonction qui minimise

$$J(x) = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - V(x(t)) \right] dt \quad (5.3)$$

est la trajectoire suivie par la particule. C'est-à-dire, on considère toutes les trajectoires possibles reliant $(0, 0)$ et (t_1, x_1) et on choisit celle minimisant la fonctionnelle J .

Cette formulation est bien évidemment équivalente à la formulation Newtonienne dans laquelle nous résolvons l'équation différentielle $ma = F$ (où $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ et $F = -\frac{dV}{dx}$) pour remonter à la trajectoire $x(t)$ (voir exercice 5.1).

5.3 Calcul des variations

D'une manière générale, on considère la fonctionnelle

$$J(f) = \int_a^b \mathcal{L}[f(t), f'(t), t] dt \quad (5.4)$$

et on cherche une fonction f pour laquelle $J(f)$ est maximale (ou minimale). Ainsi la fonction f est dite un extremum de la fonctionnelle J .

Pour que ce problème soit bien posé, on a besoin des conditions de type $f(a) = y_0$ et $f(b) = y_1$. La fonction \mathcal{L} est appelé le Lagrangien.

Par exemple, si $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2$, on $\mathcal{L}[f(t), f'(t)] = f(t)^2 + f'(t)^2$. En plus, nous pouvons calculer les dérivées partielles de \mathcal{L} . Ainsi, dans cet exemple, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$. Il est usuel de noter ces dérivées partielles par $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}$ (cela veut simplement dire qu'on dérive \mathcal{L} par rapport au premier et au deuxième arguments). Plus précisément

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 2f(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = 2f'(t). \quad (5.5)$$

Comme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}$ est une fonction de t , on peut aussi calculer sa dérivée

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) = 2f''(t). \quad (5.6)$$

5.3.1 Différentiation d'une fonctionnelle

Pour trouver un extremum de J , nous avons besoin de donner un sens à la "dérivée d'une fonctionnelle". Rappelons que pour une fonction f , on peut écrire $df = f(x+h) - f(x) = hA(x) + o(h)$. La fonction A (le terme de proportionnalité entre df et h) n'est autre que $f'(x)$ et on sait que x est un extremum de f si $f'(x) = 0$.

D'une manière analogue, nous essayons de suivre la même méthodologie pour une fonctionnelle J . Si nous pouvons écrire

$$J(f + hg) = J(f) + A[f, g]h + o(h) \quad (5.7)$$

nous dirons que f est un extremum de J si $A[f, g] = 0$ pour toute fonction (test) g .

Dans le cas qui nous intéresse, les fonctions f que nous cherchons doivent vérifier $f(a) = y_0$ et $f(b) = y_1$. Par conséquent, nous choisissons comme fonctions (test) g celles qui vérifient $g(a) = g(b) = 0$. Ainsi,

$$J(f + hg) = \int_a^b \mathcal{L}[f(t) + hg(t), f'(t) + hg'(t)] dt \quad (5.8)$$

$$= J(f) + h \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} g(t) dt + h \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} g'(t) dt + o(h), \quad (5.9)$$

où nous avons utilisé

$$\mathcal{L}(x + h, y + k) = \mathcal{L}(x, y) + h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) + o(h, k). \quad (5.10)$$

En intégrant par parties la deuxième intégrale de l'équation (5.9), on a

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} g'(t) dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} g(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) g(t) dt \quad (5.11)$$

$$= - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) g(t) dt \quad (\text{car } g(a) = g(b) = 0). \quad (5.12)$$

Ainsi,

$$J(f + hg) = J(f) + h \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) \right] g(t) dt + o(h). \quad (5.13)$$

ou encore

$$A[f, g] = \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) \right] g(t) dt. \quad (5.14)$$

Or, nous voulons que $A[f, g] = 0$ pour toute fonction g vérifiant $g(a) = g(b) = 0$. Ce qui implique

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) = 0. \quad (5.15)$$

L'équation (5.15) s'appelle l'équation d'Euler-Lagrange.

5.3.2 Exercices

Exercice 5.1 Mécanique analytique

Reprenons l'exemple de la mécanique analytique de la section 5.2.2 et écrivons l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. D'une part, dans le cadre de cet exemple, le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) - V(x(t)). \quad (5.16)$$

D'autre part, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (5.17)$$

ou encore

$$-\frac{dV}{dx} - \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0. \quad (5.18)$$

C'est-à-dire

$$F - m\ddot{x} = 0 \quad (5.19)$$

car $F = -\frac{dV}{dx}$. On retrouve ainsi l'équation différentielle

$$ma = F \quad (5.20)$$

où $a = \ddot{x}$.

Exercice 5.2 Chemin le plus court dans un plan euclidien

Reprenons l'exemple de la section 5.2.1 dans lequel on cherchait le chemin le plus court entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans un plan euclidien. Le Lagrangien est défini par

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2} \quad (5.21)$$

où l'on a noté $y' = \frac{dy}{dx}$. L'équation d'Euler-Lagrange correspondante est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0. \quad (5.22)$$

C'est-à-dire

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0, \quad (5.23)$$

ou encore

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0. \quad (5.24)$$

Ce qui implique

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C. \quad (5.25)$$

L'équation (5.25) peut être réécrite

$$y'^2 = C^2(1 + y'^2), \quad (5.26)$$

ou encore $y' = a$. On retrouve ainsi l'équation $y = ax + b$ qui montre que le chemin le plus court entre deux points dans un plan euclidien est un segment de droite.

5.4 Optimisation sous contraintes

Laissons de côté les fonctionnelles et revenons au cas plus simple de fonctions à plusieurs variables. En particulier les fonctions à deux variables réelles (la généralisation aux fonctions à plusieurs variables se fait sans beaucoup de difficultés supplémentaires).

Considérons une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ pour laquelle on cherche un extremum. Nous rappelons qu'au point extremum les termes linéaires des variations de f doivent s'annuler. Plus précisément, si on écrit

$$df = f(x + h, y + k) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) h + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) k + o(h, k) \quad (5.27)$$

on sait qu'on doit avoir au point extremum $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Supposons maintenant que nous ne cherchons pas un extremum absolu de f mais un point (x^*, y^*) satisfaisant en plus une contrainte $g(x^*, y^*) = 0$. Par exemple, nous savons que le minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est le point $(0, 0)$. Par contre, si en plus nous imposons à notre extremum de satisfaire la contrainte $y = ax + b$ (avec $b \neq 0$), il est clair que $(0, 0)$ n'est plus l'extremum recherché. Par contre, dans ce cas simple, on peut très bien trouver un point (x^*, y^*) tout en restant assujetti à la contrainte $y = ax + b$. En effet, il suffit de minimiser la fonction

$\ell(x) = x^2 + (ax + b)^2$ dans la quelle nous prenons en compte la fonction f et la contrainte g .

Dans le cas général, il n'est pas toujours possible d'expliciter y en fonction de x grâce à la contrainte g . Dans ces cas, on utilise les variations de f et g pour calculer l'extremum (x^*, y^*) . Ainsi, au lieu d'imposer à ce que les variations de f doivent être nulles pour tout déplacement (h, k) , on se restreint uniquement aux déplacements compatibles¹ avec la contrainte $g(x, y) = 0$. De ce fait, vu que $g(x+h, y+k) = g(x, y) = 0$ (déplacements compatibles avec la contrainte $g(x, y) = 0$), h et k doivent satisfaire

$$\frac{\partial g}{\partial x}h + \frac{\partial g}{\partial y}k = 0. \quad (5.28)$$

Par ailleurs, nous savons qu'un extremum de f doit aussi satisfaire

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k = 0 \quad (5.29)$$

pour tout déplacement (h, k) et en particulier ceux qui sont compatibles avec la contrainte $g(x, y) = 0$ (les déplacements h et k vérifiant (5.28)).

Nous écrivons k en fonction de h en utilisant l'équation (5.28) et nous la remplaçons dans l'équation (5.29) nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y} \left(- \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} h \right) = 0, \quad \forall h. \quad (5.30)$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (5.31)$$

Ainsi l'équation (5.31) constitue une condition supplémentaire pour trouver l'extremum (x^*, y^*) .

Exemple 5.1 Nous reprenons l'exemple de minimisation de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $g(x, y) = y - ax - b = 0$. L'équation (5.31) nous donne

$$x + ay = 0 \quad (5.32)$$

que nous associons avec la contrainte $y = ax + b$ pour obtenir l'extremum

$$x^* = -\frac{ab}{1 + a^2}, \quad y^* = \frac{b}{1 + a^2}. \quad (5.33)$$

1. Méthode des travaux virtuels

5.4.1 Multiplicateurs de Lagrange

Nous présentons dans cette section la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui est très utile dans le cadre de l'optimisation sous contraintes. Le problème modèle consiste toujours à minimiser une fonction $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

La méthode du multiplicateur de Lagrange consiste à introduire une variable supplémentaire λ (le multiplicateur de Lagrange) et de considérer la fonction

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Le problème d'optimisation sous contraintes devient un problème d'optimisation libre (sans contraintes) de la fonction F . Ainsi, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x, y) = 0. \quad (5.36)$$

Exemple 5.2 Nous reprenons encore une fois l'exemple de minimisation de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $g(x, y) = y - ax - b = 0$. La fonction F est définie par $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(y - ax - b)$.

Les équations (5.34)-(5.36) nous donnent

$$2x + \lambda a = 0, \quad (5.37)$$

$$2y - \lambda = 0. \quad (5.38)$$

On retrouve ainsi l'équation (5.32) et par suite le même extremum (x^*, y^*) (voir (5.33)). On peut même calculer le multiplicateur de Lagrange correspondant

$$\lambda^* = 2y^* = \frac{2b}{1 + a^2}. \quad (5.39)$$

Exemple 5.3 Mécanique quantique. Particule dans une boîte.

Nous considérons une particule de masse m dans une boîte parallélépipédique de côtés a , b et c . Nous savons que l'énergie de la particule est donnée par cette expression

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \quad (5.40)$$

Le problème consiste à trouver la forme optimale de la boîte (une condition sur a , b et c) en minimisant l'énergie E sous la contrainte du volume constant ($V(a, b, c) = abc = V_0$).

5.5 Généralisation aux fonctionnelles

Nous essayons de donner dans cette section une brève présentation de la généralisation du concept de l'optimisation avec et sans contraintes dans le cas où s'intéresse à des fonctionnelles quelconques. Pour ce faire, nous considérons une fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ où H désigne un espace de Hilbert.

Définition 5.1 On dit que J est différentiable (au sens de Fréchet) en $u \in H$ s'il existe $\varphi \in H'$ (H' étant le dual de H) tel que l'on ait, pour tout $h \in H$ au voisinage de 0,

$$J(u+h) = J(u) + \langle \varphi, h \rangle + o(h). \quad (5.41)$$

Si un tel φ existe, on le note $J'(u)$ qu'on peut l'identifier à un élément de H appelé gradient de J en u . On peut aussi le noter $\nabla J(u)$.

On dira que J est différentiable si elle admet une différentielle en tout point, et que J est de classe C^1 si l'application $u \mapsto J'(u)$ est continue.

En pratique, il est plus simple de calculer la dérivée directionnelle

$$j'(0) = \langle J'(u), w \rangle, \text{ où } j(t) = J(u + tw) \text{ avec } u, w \in H \text{ et } t \in \mathbb{R}. \quad (5.42)$$

Exemple 5.4 Soient $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive, et $\ell(\cdot)$ une forme linéaire continue. On définit une fonctionnelle J par l'expression suivante

$$J : v \in H \mapsto J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v) \quad (5.43)$$

et on considère le problème de minimisation

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v). \quad (5.44)$$

Il est facile de vérifier que le problème de minimisation (5.44) est équivalent à la formulation variationnelle (5.45)

$$a(u, w) = \ell(w), \quad \forall w \in H. \quad (5.45)$$

En effet,

$$J(u + tw) = \frac{t^2}{2}a(w, w) + t(a(u, w) - \ell(w)) + J(u). \quad (5.46)$$

Ainsi,

$$j'(t) = ta(w, w) + a(u, w) - \ell(w). \quad (5.47)$$

Et par conséquent

$$\langle J'(u), w \rangle = j'(0) = a(u, w) - \ell(w). \quad (5.48)$$

L'équation $J'(u) = 0$ (équation d'Euler) donne la formulation variationnelle (5.45).

Réciproquement, pour tout $u \in H$ et pour tout $w \in H$,

$$J(u+w) = \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(u) \quad (5.49)$$

$$= J(u) + a(u,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}a(w,w) \quad (5.50)$$

$$> J(u) + a(u,w) - \ell(w), \quad \text{si } w \neq 0. \quad (5.51)$$

Ce qui donne en particulier,

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v). \quad (5.52)$$

Exercice 5.3 Pour tout $v \in L^2(\Omega)$, on définit la fonctionnelle J par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 - \int_{\Omega} f v. \quad (5.53)$$

Retrouver la formulation variationnelle dont $u = \inf_{v \in L^2(\Omega)} J(v)$ est solution.

Exercice 5.4 Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on définit la fonctionnelle J par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v. \quad (5.54)$$

Retrouver la formulation variationnelle dont $u = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$ est solution.

5.5.1 Minimisation sous contraintes (d'égalité)

Ajoutons au problème de minimisation d'une fonctionnelle J la contrainte $g(v) = 0$ avec $g : v \in H \mapsto g(v) = (g_1(v), \dots, g_n(v)) \in \mathbb{R}^n$ est une application différentiable. C'est-à-dire, nous nous intéressons au problème suivant : trouver $u \in H$ tel que

$$u = \inf_{v \in H, g(v)=0} J(v). \quad (5.55)$$

Ce problème peut être réécrit sous la forme

$$u = \inf_{v \in K} J(v). \quad (5.56)$$

Avec $K = \{v \in H, g(v) = 0\} = \ker g$ est un sous-ensemble de H appelé l'ensemble des fonctions admissibles. Nous nous limitons ici au cas où K est un sous-espace vectoriel fermé de H (sous cette hypothèse, le lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème (5.56)).

Pour généraliser la notion des multiplicateurs de Lagrange au cas de la fonctionnelle J , nous introduisons une nouvelle variable $\mu \in \mathbb{R}^n$ (multiplicateur de Lagrange) et nous définissons le lagrangien du problème (5.55) comme suit

$$\mathcal{L}(v, \mu) = J(v) + \sum_{i=1}^n \mu_i g_i(v) = J(v) + \mu \cdot g(v), \quad \forall (v, \mu) \in H \times \mathbb{R}^n. \quad (5.57)$$

Théorème 5.1 *On suppose que J et g sont continûment dérivables au voisinage de $u \in H$ tel que $g(u) = 0$. Si u est un minimum local et si $(g'_i(u))_{1 \leq i \leq n}$ sont linéairement indépendants, alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, \lambda) = J'(u) + \lambda \cdot g'(u) = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(u, \lambda) = g(u) = 0. \quad (5.58)$$

Le couple $(u, \lambda) \in H \times \mathbb{R}^n$ défini par (5.58) peut être calculé en tant que point-selle de \mathcal{L} sur $H \times \mathbb{R}^n$. C'est-à-dire vérifiant (5.59)

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda), \quad \forall v \in H. \quad (5.59)$$

En effet, la condition de point-selle (5.59) nous donne

$$\forall \mu \in \mathbb{R}^n, \quad J(u) + \mu \cdot g(u) \leq J(u) + \lambda \cdot g(u) \leq J(v) + \lambda \cdot g(v), \quad \forall v \in H. \quad (5.60)$$

Par conséquent, la première inégalité de (5.60) implique que u vérifie la contrainte $g(u) = 0$. Ensuite, la deuxième inégalité de (5.60) se réduit à

$$J(u) \leq J(v) + \lambda \cdot g(v), \quad \forall v \in H, \quad (5.61)$$

ou encore

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K. \quad (5.62)$$

C'est-à-dire u est un minimum de J sur K (donc solution des problèmes (5.55) et (5.56)). Ainsi, on a la relation suivante

$$\inf_{v \in H, g(v)=0} J(v) = \inf_{v \in K} J(v) = \inf_{v \in H} \sup_{\mu \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(v, \mu). \quad (5.63)$$

5.5.2 Application aux équations de Stokes. Formulation point-selle

Nous donnerons dans cette section différentes formulations des équations de Stokes sans trop s'attarder sur les détails mathématiques.

On considère un écoulement d'un fluide incompressible et visqueux (de viscosité ν) régi par les équations de Stokes. On suppose que cet écoulement se fait dans un domaine borné Ω (assez régulier). Ainsi, le champ de vitesses \mathbf{u} et la pression p vérifient le problème suivant

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \quad (5.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (5.65)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (5.66)$$

Avec $\partial\Omega$ désigne le bord de Ω et \mathbf{f} une force extérieure (la gravité par exemple).

On admet dans le cadre de ce cours que le problème (5.64)-(5.65)-(5.66) admet une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$. Dans la suite on utilisera les espaces fonctionnels suivants :

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\}, \quad (5.67)$$

$$L_0^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} f = 0\}, \quad (5.68)$$

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \nabla f \in L^2(\Omega)\}, \quad (5.69)$$

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega); f = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \quad (5.70)$$

La première étape consiste à écrire la formulation variationnelle du problème (5.64)-(5.65)-(5.66). Avant de le faire, nous introduisons le tenseur des taux de déformations τ qui va nous être utile dans la suite

$$\tau(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t). \quad (5.71)$$

Remarquons que grâce à la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, on a

$$\Delta \mathbf{u} = 2\nabla \cdot \tau(\mathbf{u}). \quad (5.72)$$

(En effet, on peut vérifier facilement que $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + {}^t(\nabla \mathbf{u})) = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$)

Ainsi, le problème (5.64)-(5.65)-(5.66) peut être réécrit de la manière suivante : *Trouver* $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ *tel que* :

$$-2\nu \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \quad (5.73)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega. \quad (5.74)$$

À l'aide d'un calcul simple (voir annexe A pour les détails) on peut montrer que le problème (5.73)-(5.74) est équivalent à la formulation variationnelle : *Trouver* $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ *such that* :

$$2\nu \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : \tau(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (5.75)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (5.76)$$

On introduit deux formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ définies respectivement sur $H \times H$ et $H \times M$ et une forme linéaire $\ell(\cdot)$ définie sur H de sorte le problème (5.75)-(5.76) s'écrit sous cette forme

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H, \quad (5.77)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in M. \quad (5.78)$$

Dans notre cas $H = H_0^1(\Omega)^2$, $M = L_0^2(\Omega)$

La forme bilinéaire b introduit implicitement deux applications linéaires. La première, que nous noterons B , est définie sur H à valeurs dans M' (le dual de M) par $B : \mathbf{v} \in H \mapsto B\mathbf{v} \in M'$. Plus précisément,

$$\langle B\mathbf{v}, q \rangle = b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \forall q \in M. \quad (5.79)$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une forme linéaire continue sur M et dont le noyau est défini par

$$\ker B = \{ \mathbf{v} \in H; B\mathbf{v} = 0 \} \quad (5.80)$$

$$= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2; - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall q \in M \} \quad (5.81)$$

$$= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \}. \quad (5.82)$$

La deuxième forme linéaire donnée par b , que nous noterons B^T , est définie sur M à valeurs dans H' par $B^T : q \in M \mapsto B^T q \in H'$. Plus précisément,

$$\langle \mathbf{v}, B^T q \rangle = b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H. \quad (5.83)$$

Il est alors évident que

$$\langle B\mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{v}, B^T q \rangle = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H, \quad \forall q \in M. \quad (5.84)$$

De même, le noyau de B^T est donné par

$$\ker B^T = \{ q \in M; B^T q = 0 \} \quad (5.85)$$

$$= \{ q \in M; - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 \} \quad (5.86)$$

$$= \{ q \in M; \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 \} \quad (5.87)$$

$$= \{ q \in M; \nabla q = 0 \}. \quad (5.88)$$

Notons que pour avoir l'expression (5.87), on a fait une intégration par parties en utilisant le fait que les fonctions de $H_0^1(\Omega)^2$ s'annulent au bord $\partial\Omega$. Cette dernière expression implique en particulier que le noyau de B^T est constitué des fonctions constantes sur Ω .

Remarque 5.1 *On peut chercher directement le champ de vitesse \mathbf{u} en se mettant dans le noyau de B (5.82). C'est-à-dire en considérant des fonctions à divergence nulle. Dans ce cas, le problème de Stokes peut être formulé de la manière suivante : Trouver $\mathbf{u} \in \ker B$ tel que*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \ker B, \quad (5.89)$$

ou encore

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \ker B} J(\mathbf{v}). \text{ Avec } J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}). \quad (5.90)$$

Quant à la formulation point-selle, il suffit de considérer le lagrangien défini par

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - \ell(\mathbf{v}). \quad (5.91)$$

Le point-selle (\mathbf{u}, p) est caractérisé par les équations suivantes :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, p), \mathbf{v} \right\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H \quad (5.92)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\mathbf{u}, p), q \right\rangle = 0, \quad \forall q \in M, \quad (5.93)$$

qui sont équivalentes à la formulation variationnelle (5.77)-(5.78). Ainsi, la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (5.77)-(5.78) est caractérisé par le point-selle du lagrangien \mathcal{L} . C'est-à-dire

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) = \inf_{\mathbf{v} \in H} \sup_{q \in M} \mathcal{L}(\mathbf{v}, q). \quad (5.94)$$

Exercice 5.5 Vérifier qu'on retrouve bien (5.77)-(5.78) à partir des équations (5.92)-(5.93).

Formulation variationnelle des équations de Stokes

La formulation variationnelle du problème (5.73)-(5.74) est obtenue en prenant le produit scalaire de l'équation (5.73) avec une fonction test $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ et en multipliant l'équation (5.74) par une fonction test fonction $q \in L_0^2(\Omega)$. Ce qui donne le problème suivant : *trouver* $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ *tel que* :

$$-2\nu \int_{\Omega} (\nabla \cdot \tau(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (\text{A.2})$$

L'intégration par parties de l'équation (A.1) donne

$$\begin{aligned} 2\nu \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - 2\nu \int_{\partial\Omega} \tau(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où l'on a noté par \mathbf{n} le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$. Or, sachant que \mathbf{v} est nulle sur le bord $\partial\Omega$ ($\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$), le problème (A.1)-(A.2) est maintenant équivalent à : *trouver* $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ *tel que* :

$$2\nu \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (\text{A.5})$$

Notons que $\tau(\mathbf{u})$ est symétrique ($\tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \tau(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v})^t$) qui implique en particulier $\tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \tau(\mathbf{u}) : \tau(\mathbf{v})$. Finalement, la formulation variationnelle de notre problème

initial (5.64)-(5.65) s'écrit : trouver $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$2\nu \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : \tau(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (\text{A.7})$$

Remarque A.1 Comme on a

$$\tau(\mathbf{u}) : \tau(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^t : \nabla \mathbf{v}, \quad (\text{A.8})$$

la première intégrale de l'équation (A.6) peut être réécrite sans utiliser le tenseur des déformations en utilisant cette identité

$$\int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : \tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}. \quad (\text{A.9})$$

En effet, en faisant une intégration par parties et en utilisant la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, on a $\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^t : \nabla \mathbf{v} = 0$.

Bibliographie

- ARFKEN, G-B. et H-J. WEBER. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2005.
- BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- HOUCMANDZADEH, B. “Cours de Mathématiques pour la Physique”. Polycopié. 2013. URL : <http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Math/M4Phys2016.pdf>.
- MAURY, B. “Méthode des éléments finis en élasticité”. Cours de l'école polytechnique. URL : <http://www.math.u-psud.fr/~maury>.
- NICAISE, S. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 2000.
- RAPPAZ, J et M PICASSO. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- RAVIART, P.-A. et J.-M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1993.