

# Oscillations couplées de microbulles sous champ ultrasonore et conséquences hydrodynamiques

Flore Mekki-Berrada

► **To cite this version:**

Flore Mekki-Berrada. Oscillations couplées de microbulles sous champ ultrasonore et conséquences hydrodynamiques. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. <NNT : 2015GREAY069>. <tel-01458915>

**HAL Id: tel-01458915**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01458915>**

Submitted on 7 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique / Physique appliquée**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Flore MEKKI-BERRADA**

Thèse dirigée par **Philippe MARMOTTANT**

préparée au sein du **Laboratoire Interdisciplinaire de Physique (LIPhy)**  
et de l'**Ecole Doctorale de Physique**

## Oscillations couplées de microbulles sous champ ultrasonore et conséquences hydrodynamiques

Thèse soutenue publiquement le **16 octobre 2015**,  
devant le jury composé de :

**M. Nicolas MORDANT**

Professeur UJF, LEGI, Grenoble, Président

**M. Jean-Louis THOMAS**

Directeur de recherche CNRS, INSP, Paris, Rapporteur

**M., Philippe BRUNET**

Chargé de recherche CNRS, MSC, Paris, Rapporteur

**M. Henrik BRUUS**

Professeur, DTU, Danemark, Examineur

**M. Philippe MARMOTTANT**

Chargé de Recherche CNRS, LIPhy, Grenoble, Directeur de thèse

**M. Pierre THIBAUT**

Professeur UJF, LIPhy, Grenoble, Co-Directeur de thèse





*A la mémoire de mes grands-parents...*



# REMERCIEMENTS

---

Ce manuscrit est l'aboutissement de trois années de réflexions et de questionnements sur les bulles, mais surtout trois années pendant lesquelles j'ai rencontré des gens formidables qui m'ont aidé à m'épanouir à Grenoble et à faire avancer mon projet de recherche.

Mon histoire avec les bulles a commencé il y a bien longtemps, lorsque Tata Lulu me versait mon premier verre de champagne, ou plutôt devrais-je dire de "lolo qui pique". A l'époque, je ne connaissais encore rien aux bulles. C'est à Boston que Bavand m'a mise sur le chemin en me montrant les vidéos qui ont rendu Philippe célèbre. Puis un an plus tard, alors que je tentais désespérément de fuir ma ville natale, on m'a conseillé de contacter ceux qui devinrent mes futurs encadrants de thèse, Philippe et Pierre. Un coup de fil à Philippe, une escapade d'une journée à Grenoble, et hop c'est décidé, je m'engage à y faire ma thèse. Philippe, ta voix calme, posée et rassurante y aura été pour beaucoup ! Le projet s'oriente au départ sur les bulles nageuses, puis finalement sur le laser acoustique à bulles, projet beaucoup plus ambitieux, mais après tout c'est ce que je cherchais.

Je ne connaissais encore personne à Grenoble. Yara, je ne saurais assez te remercier de m'avoir trouvée dans ce dédale de couloirs, d'avoir rompu ma solitude et d'avoir égayé mes journées au laboratoire. Grâce à toi Pierre-Yves, nous avons pu découvrir comment fonctionnait le campus, tu as été un guide pour nous, pauvres novices. Mon premier hiver au laboratoire, c'est en compagnie de Pono que je l'ai passé. Pono, les journées de manip auraient semblé bien longues sans toi. Je n'oublierai jamais ta joie de vivre qui emplissait le couloir à ton passage. Avec ce premier hiver vinrent les premiers problèmes expérimentaux. Prem, David, c'est grâce à vous que j'ai pu débloquent mes premières expériences, merci à vous !

Bientôt ce fut le moment des premiers séminaires des doctorants, pour Yara et moi, première rencontre avec les thésards des autres équipes du labo. Voilà Richard embrigadé dans notre trio infernal avec pour objectif de créer un lien entre tous les doctorants du labo. Petit à petit, nous essayions de regrouper les doctorants pour déjeuner. Puis vint le printemps et l'arrivée massive de stagiaires. Jonathan, Thomas, Naty, Amaury, votre passage au labo laissera des traces, ne serait-ce que dans ma mémoire. Et pour les stagiaires qui sont restés, ce fut le début de nombreuses amitiés.

L'arrivée de Diane et Ianis dans le bureau a été un grand soulagement pour moi, une renaissance. Enfin des petits camarades avec qui je pouvais parler de mon projet en détail ! Nos discussions scientifiques m'ont énormément aidée dans mon travail, et m'ont permis de garder le moral. La bonne ambiance qui régnait au bureau était géniale. Diane, tu m'as fait sortir de mon monde en m'initiant à la self-défense puis, voyant que je n'étais pas faite pour tant de violence, en m'emmenant faire du yoga. Nos soirées puzzles m'ont permis de m'évader régulièrement. Mine de rien, ça aide de savoir qu'il existe une solution au problème qu'on souhaite résoudre ! Tu as été une voisine exceptionnelle, et nos discussions scientifiques et non scientifiques me manqueront ! Ianis, tes nombreuses questions m'ont

énormément aidée à comprendre en profondeur la physique de mon projet. Je n'oublierai jamais nos soirées musicales au labo. Tu as été un co-bureau extraordinaire, que ce soit d'un point de vue scientifique ou humain.

Pendant les deux années qui suivirent, la grande troupe des doctorants/post-doc s'est progressivement forgée, incluant les doctorants du bureau d'à côté (Vincent, Marie-C, Vassanti et Matthieu) en compagnie de qui je finissais mes manip dans une ambiance joviale, les bio-opticiens Motivés (Rachel, Mariana, puis Elisa, Katharina), les Maudits de la petite aile (Léo, Chloé, Preeti, Sidd, puis plus tard Loïc, Romain), les évolutionnistes de Biop (Séb, Bernard, Mathieu), sans oublier les spectres Estropiés et les Optimistes du rez-de-chaussée (Johannes, Marine, Mathieu, Tim, Vadim et Medhi). J'ai partagé beaucoup de bons moments avec notre groupe, merci à tous d'avoir répondu présent aux sorties en ville et dans les montagnes, d'avoir joué le jeu aux séminaires des doctorants à l'époque où Mathieu et moi les organisions. Si l'ambiance était bonne au labo, c'est grandement grâce à vous et à vos gâteaux!

Je remercie tout particulièrement Joe pour les soirées tartiflette, Medhi pour les soirées sans tartiflette, Léo pour avoir supporté mes blagues sur les gens de petite taille, Elisabeth pour avoir supporté mes blagues sur les suisses d'origine grecque, et enfin Nico et Alex pour les soirées BBQ.

Au laboratoire, de nombreuses personnes m'ont aidée à mener à bien mon projet. Merci à Danièle Centanni pour la formation salle blanche et plus généralement l'organisation de la salle blanche, Michel Bourriau pour avoir répondu présent toutes les fois où l'automate de la salle était en panne. Merci à tous les utilisateurs de la salle blanche et de la salle de manip de m'avoir supportée lorsque je demandais de ranger et nettoyer (petite pensée pour Thomas P.). Merci à Patrice d'avoir cru en moi (finalement le prix Nobel, ce sera pour une prochaine fois!) et à l'atelier (Ralph, David,...) pour avoir réalisé une grande partie des pièces dont j'avais besoin pour avancer.

Je tiens également à remercier Maxime d'être venu une semaine au labo pour manipuler avec moi. C'est grâce à toi que nous avons entrepris de mieux comprendre les écoulements que nous avons observé. Merci aussi à Boris pour ses quelques semaines passées au labo : ton travail m'a permis de mieux comprendre comment exciter les bulles proprement. Thomas, tu as été un stagiaire formidable, à la fois souriant et efficace. Je te donne aujourd'hui le relais. J'ai énormément apprécié travailler avec toi.

Je voudrais enfin remercier mon directeur de thèse, Philippe Marmottant, et mon co-encadrant, Pierre Thibault, pour m'avoir encadrée pendant ces trois années. Merci d'avoir été disponible pour moi lorsque j'en avais besoin. Votre complémentarité m'aura permis de faire mon petit bout de chemin. Philippe, merci de m'avoir fait confiance, en particulier au début de ma thèse, de m'avoir envoyée sans hésiter en conférence et de m'avoir fait découvrir les différentes facettes du travail de chercheur. Pierre, merci d'avoir pris le temps de réfléchir avec moi lorsque je rencontrais des problèmes expérimentaux, d'avoir suivi mon projet tout en me laissant libre de le mener à bien, et enfin merci pour ton aide précieuse lors de la rédaction des articles. Je n'aurai pas fait de "découverte révolutionnaire" pendant ces trois années, mais j'espère avoir éclairé certaines zones d'ombre dans ce projet.

Je voudrais également remercier les directeurs du labo, Jacques Derouard puis Jean-Louis Barrat et Eric Lacot, pour leur soutien dans toutes les actions menées par les doctorants, et en particulier pour les séminaires des doctorants et le weekend doctorants. Je remercie également les secrétaires du labo, en particulier Jessie qui a mis son âme au

service de l'intégration des nouveaux et qui a fortement contribué à humaniser le labo, Annick, Nadine et Chantal pour leur incroyable gentillesse et toute l'aide administrative qu'elle m'ont apportée. Enfin, merci à Marie-José pour son efficacité lors de ma première inscription.

Pour finir, je souhaite remercier les personnes qui m'ont été les plus proches. Aurélia, ton amitié a une fois de plus été sans faille. C'est avec toi que j'ai découvert les restaurants et brasseries grenoblois. Nos escapades en montagne tout comme à la mer m'ont permis de m'évader. Nicolas, ton parcours m'a beaucoup aidé à gérer ma thèse. Merci pour ton soutien au cours de toutes ces années. Nicoco, toi qui, du haut de ton expérience, me déconseillais de faire une thèse, tu m'as finalement soutenue toutes ces années. J'ai également une pensée pour Simon et Catherine qui ont été très présents au début de ma thèse.

Richard, ton soutien inconditionnel m'a aidée à tenir le coup pendant les moments les plus pénibles de ma thèse. Tu as toujours été à mon écoute, même lorsque je t'exposais mes problèmes physiques et métaphysiques. Ton dévouement pour les autres a toujours été remarquable. J'espère que nos routes continueront à s'entrelacer.

Je remercie enfin toute ma famille. Sans vous, tout cela n'aurait pas été possible !



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
1	<b>Une bulle comme résonateur</b>	18
1.1	Dynamique d'une bulle	18
1.2	La bulle vue comme transformateur d'énergie	19
2	<b>Les enjeux microfluidiques</b>	24
2.1	Le mélange dans des écoulements à bas nombre de Reynolds	24
2.2	Écoulements redressés à proximité d'une paroi solide	26
2.3	Écoulements redressés générés par la vibration d'une bulle	29
3	<b>Les enjeux acoustiques</b>	33
3.1	Le métamatériau à bulles	33
3.2	Le SASER à bulles	35
	<b>Objectifs de la thèse</b>	37
<b>II</b>	<b>Production, excitation et observation de microbulles confinées</b>	<b>39</b>
1	<b>La puce microfluidique</b>	39
1.1	Géométrie des microcanaux	39
1.2	Piégeage des bulles	41
2	<b>Excitation acoustique et détection des modes de vibration</b>	44
2.1	Excitation in-situ à l'aide d'une lame de verre	44
2.2	Excitation externe dans une piscine	47
2.3	Choix du dispositif	50
3	<b>Analyse d'images : la bulle sous toutes ses coutures</b>	51
<b>III</b>	<b>Vibration d'une bulle cylindrique confinée</b>	<b>55</b>
1	<b>Vibration d'une bulle "cylindrique"</b>	55
1.1	Ancrage de la bulle aux murs et dimension de la déformation	55
1.2	La résonance de Minnaert en 2D	57
1.3	Etude expérimentale de la vibration monopole	58
2	<b>Influence de la flexibilité des parois du canal</b>	60
2.1	Modèle 2D avec flexibilité des murs du canal	61
2.2	Influence du point d'ancrage	65
2.3	De l'approximation adiabatique	66
2.4	Influence de la hauteur du canal et friction aux parois	69
2.5	Les différents termes d'amortissement	70
3	<b>Les modes de surface paramétriques</b>	73

3.1	Amplitude et phase temporelle . . . . .	73
3.2	La rotation des modes . . . . .	75
3.3	Domaines d'existence et seuil d'apparition . . . . .	77
3.4	Résonance théorique des modes . . . . .	78
3.5	Dynamique des modes de surface . . . . .	81
3.6	L'oscillateur paramétrique et l'équation de Mathieu . . . . .	82
	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>86</b>
 <b>IV Ecoulement redressé autour de bulles confinées</b>		<b>87</b>
<b>1</b>	<b>Ecoulements autour d'une bulle confinée . . . . .</b>	<b>87</b>
1.1	Effet de la vibration monopole . . . . .	87
1.2	Ecoulement dans la tranche du canal . . . . .	88
1.3	De l'origine de l'écoulement dans la tranche . . . . .	91
1.4	Effet des modes paramétriques . . . . .	94
<b>2</b>	<b>Interaction hydrodynamique de modes . . . . .</b>	<b>96</b>
2.1	Ecoulements redressés autour d'une paire de bulles . . . . .	96
2.2	Interaction entre deux bulles : l'apparition de nouveaux modes . . . . .	98
2.3	L'interaction de modes à l'origine de l'écoulement redressé . . . . .	102
2.4	Prédiction des lignes de courant et du sens de l'écoulement . . . . .	107
	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>111</b>
 <b>V Effets collectifs dans les réseaux de bulles</b>		<b>113</b>
<b>1</b>	<b>Auto-organisation de bulles par couplage acoustique 2D . . . . .</b>	<b>113</b>
1.1	Etat de l'art . . . . .	113
1.2	Forces de Bjerknes dans un cristal de bulles libres . . . . .	115
1.3	Pas du cristal de bulles libres . . . . .	117
1.4	De la bulle libre à la bulle ancrée : adaptabilité du pas du réseau . . . . .	118
<b>2</b>	<b>Amplification et synchronisation dans un réseau de bulles . . . . .</b>	<b>121</b>
2.1	Amplification de la vibration dans un réseau triangulaire ou carré . . . . .	121
2.2	Phase de la bulle suivant son entourage . . . . .	124
2.3	Synchronisation dans un réseau de bulles ancrées . . . . .	125
2.4	Etude expérimentale de la synchronisation . . . . .	127
2.5	De la synchronisation de la rotation des modes . . . . .	130
	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>132</b>
 <b>Conclusions et perspectives</b>		<b>133</b>
 <b>Annexes</b>		<b>139</b>
 <b>A Fabrication des canaux</b>		<b>139</b>

**TABLE DES MATIÈRES** **11**

---

**B Les différentes ondes acoustiques** **141**

**C Obtention de l'amplitude et de l'orientation des modes de vibration** **143**

**D Equation de la vorticité** **145**



# NOTATIONS

---

$\delta$	Épaisseur de la couche limite (m) ou constante d'amortissement adimensionnée <ul style="list-style-type: none"><li>- <math>\delta</math> épaisseur de la couche limite</li><li>- <math>\delta_s</math> épaisseur de la couche interne</li><li>- <math>\delta_{tot}</math> constante d'amortissement totale</li><li>- <math>\delta_{rad}</math> constante d'amortissement radiatif</li><li>- <math>\delta_{th}</math> constante d'amortissement thermique</li><li>- <math>\delta_{vis}</math> constante d'amortissement visqueux</li><li>- <math>\delta_{fric}</math> constante d'amortissement dû à la friction aux parois</li></ul>
$\eta$	Viscosité dynamique du liquide (Pa.s)
$\gamma$	Indice adiabatique du gaz
$\kappa$	Indice polytropique du gaz ou courbure de la bulle ( $m^{-1}$ )
$\lambda$	Longueur d'onde (m)
$\nu$	Viscosité cinématique du liquide ( $m^2/s$ )
$\omega$	Pulsation (rad/s) <ul style="list-style-type: none"><li>- <math>\omega</math> pulsation de l'onde excitatrice ou pulsation du mode de surface d'ordre <math>n</math></li><li>- <math>\omega_M</math> pulsation de Minnaert de la bulle</li><li>- <math>\omega_0</math> pulsation propre de la bulle</li><li>- <math>\omega_n</math> pulsation propre du mode de surface d'ordre <math>n</math></li></ul>
$\omega_{or}$	Largeur de l'orifice du flow-focusing (m)
$\phi$	Potentiel des vitesses ( $m^2/s$ )
$\phi_n$	Phase temporelle du mode $n$ (rad)
$\Psi$	Fonction de courant ( $m^2/s$ )
$\psi_n$	Phase spatiale du mode $n$ (rad)
$\rho$	Contour de la bulle (m)
$\rho_f$	Densité du liquide ( $kg/m^3$ )
$\sigma$	Tension de surface (N/m)
$\theta_n$	Orientation spatiale du mode $n$ (rad ou °)
$A$	Amplitude d'excitation de la pastille piézoélectrique (V)
$A_n$	Amplitude d'oscillation de la bulle (m)
$a_n(t)$	Amplitude instantanée d'oscillation de la bulle (m)
$c$	Vitesse du son (m/s) <ul style="list-style-type: none"><li>- <math>c_l</math> vitesse du son dans le liquide</li><li>- <math>c_{eau}</math> vitesse du son dans l'eau (onde P)</li><li>- <math>c_{PDMS}</math> vitesse du son dans le PDMS (onde P)</li><li>- <math>c_V</math> vitesse des ondes de Lamb dans le verre</li><li>- <math>c_R</math> vitesse des ondes de Rayleigh</li></ul>

$C_P$	Capacité thermique massique du gaz à pression constante (J/kg/K)
$C_V$	Capacité thermique massique du gaz à volume constant (J/kg/K)
$D$	Distance inter-bulles (m)
$d$	Diamètre du trou d'ancrage (m)
$d_b$	Diamètre des billes traceur ( $\mu\text{m}$ )
$D_{th}$	Coefficient de diffusion thermique du gaz ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
$D_{\text{éq}}$	Distance inter-bulles d'équilibre dans un réseau libre de bulles (m)
$E$	Module d'Young du matériau (Pa)
$e$	Hauteur du trou d'ancrage (m)
$f$	Fréquence ( $\text{s}^{-1}$ ) - $f$ fréquence d'excitation de la bulle - $f_{trans}$ fréquence centrale du transducteur
$F_{Bj}^{II}$	Force de Bjerknes secondaire exercée par une bulle sur une autre bulle (N)
$F_B$	Force de Bjerknes secondaire exercée par une bulle sur une particule (N)
$G$	Module de cisaillement du matériau (Pa)
$h$	Hauteur du canal microfluidique (m)
$h_0$	Hauteur du canal microfluidique en absence d'ultrasons (m)
$H_n^{(1)}$	Fonction de Hankel de première espèce et d'ordre $n$
$H_n^{(2)}$	Fonction de Hankel de deuxième espèce et d'ordre $n$
$I$	Intensité acoustique ( $\text{W}/\text{m}^2$ )
$I_n^{(2)}$	Fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre $n$
$K_n^{(2)}$	Fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et d'ordre $n$
$L$	Longueur du canal microfluidique (m)
$l_D$	Longueur de pénétration thermique (m)
$M$	Paramètre de fréquence $M = R_0/\delta$
$N$	Nombre de bulles sur le réseau ou dimension du système
$n$	Ordre du mode de surface
$p$	Pression (Pa) - $p$ pression dans le liquide - $p_L$ pression dans le liquide au niveau de la paroi de la bulle - $p_\infty$ pression dans le liquide loin de la bulle - $p_g$ pression du gaz à l'intérieur de la bulle - $p_{g,0}$ pression du gaz à l'intérieur de la bulle en absence d'ultrasons - $p_0$ pression dans le liquide en absence d'ultrasons - $P_g$ pression de gaz imposée dans le flow-focusing - $P_{ac}$ pression acoustique excitatrice de la bulle - $P_A$ pression acoustique générée par la bulle
$Q_l$	Débit de liquide dans le canal ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

---

$R$	Rayon (m) <ul style="list-style-type: none"><li>- <math>R</math> rayon moyen instantané de la bulle</li><li>- <math>R_0</math> rayon moyen de la bulle</li><li>- <math>R_0^{res}</math> rayon de résonance du mode 0 d'une bulle excitée à une fréquence fixée</li><li>- <math>R_n</math> rayon propre du mode <math>n</math> d'une bulle excitée à une fréquence fixée</li><li>- <math>R_1, R_2</math> rayons des bulles n°1 et 2 de la paire de bulles</li></ul>
$S$	Distance de coupure (m)
$S_0$	Paramètre de synchronisation du mode 0
$S_{\psi_n}$	Paramètre de synchronisation de l'orientation du mode $n$
$T$	Température du gaz à l'intérieur de la bulle (K)
$U$	Vitesse (m/s) <ul style="list-style-type: none"><li>- <math>U_r</math> vitesse radiale du liquide</li><li>- <math>U_\theta</math> vitesse tangentielle du liquide</li><li>- <math>U_g</math> vitesse de glissement (tangentielle à la paroi considérée)</li><li>- <math>U_s</math> vitesse de l'écoulement redressé</li></ul>
$W$	Largeur du canal microfluidique (m)
$X$	Amplitude relative du mode 0



# I. INTRODUCTION

---

Les bulles sont des oscillateurs bien connus de par leurs effets dévastateurs dans le domaine maritime. Apparaissant par cavitation inertielle sur les hélices des bateaux et des sous-marins, elles peuvent concentrer des énergies considérables et créer des dégâts irrémédiables sur les hélices [Brennen, 1995]. Étudiées également pour leur rôle dans le bruit des cascades et des vagues [Minnaert, 1933], leurs propriétés acoustiques sont aujourd’hui utilisées en médecine pour améliorer le contraste des clichés échographiques [Cosgrove, 2006].

Les mécanismes de couplage dans les milieux à bulles ont fait l’objet de nombreuses études théoriques. Il a notamment été mis en évidence que le couplage radiatif entre les bulles pouvait conduire à des effets de super-résonance [Feuillade, 1995], mais aussi que ces milieux à bulles pouvaient jouer le rôle d’absorbeurs acoustiques [Leroy *et al.*, 2009a] ou encore d’émetteurs cohérents d’ondes acoustiques [Zavtrak, 1996]. Les études expérimentales sont moins nombreuses du fait de la difficulté de contrôler la taille et la position des bulles. En passant à une géométrie bidimensionnelle, nous sommes parvenus à pallier ces difficultés. Dans ce manuscrit, nous proposons une étude à la fois expérimentale et théorique des oscillations de bulles en géométrie 2D. Nous nous intéresserons à la dynamique de vibration d’une bulle confinée dans cette géométrie et aux conséquences de ce confinement sur les effets hydrodynamiques et acoustiques de cette vibration dans des réseaux de bulles particuliers.

Dans ce premier chapitre introductif, nous décrirons tout d’abord l’objet de notre étude : la bulle. Nous montrerons comment une bulle sphérique pulse lorsqu’elle est soumise à un champ acoustique externe. Nous identifierons la gamme de rayons de bulles pour laquelle des termes de couplage radiatif sont susceptibles d’apparaître. Nous verrons alors que des bulles de cette taille sont réalisables en géométrie microfluidique. Nous montrerons dans un deuxième temps que les bulles sont susceptibles de résoudre un des enjeux actuels de la microfluidique : le mélange. Les écoulements générés par la bulle sphérique seront décrits et comparés aux écoulements habituellement observés près de parois et particules solides. Il apparaîtra alors que le couplage entre différents modes de vibration d’une même bulle permet de créer des écoulements importants autour de celle-ci. Enfin, dans une troisième partie, nous nous pencherons plus en détail sur les effets collectifs dans les milieux à bulles.

## 1 Une bulle comme résonateur

Dans cette partie, nous décrirons tout d'abord la pulsation de la bulle comme un oscillateur harmonique. Nous chercherons dans un second temps à comprendre comment l'énergie acoustique incidente est redistribuée par la bulle. Nous détaillerons les différents termes d'amortissement et conclurons sur l'intérêt d'étudier des bulles de rayon quelques dizaines de microns et de se placer dans une géométrie 2D.

### 1.1 Dynamique d'une bulle

Lorsqu'une goutte de pluie tombe sur une étendue d'eau, elle entraîne avec elle une petite quantité d'air dans l'eau. Une bulle se forme sous la surface, produisant alors un son cristallin. C'est dans son article philosophique intitulé "On Musical Air-Bubble and the Sounds of Running Water"[Minnaert, 1933] que Marcel Minnaert répond à la question de la dynamique de la bulle. Au début du  $XX^{\text{ème}}$  siècle, deux théories s'opposent, l'une proposée par Paget qui considère que la bulle est un résonateur à murs rigides se comportant comme une cavité Fabry-Pérot, l'autre proposée par Minnaert voyant la bulle comme un oscillateur harmonique. Les expériences de Minnaert, ainsi que celles réalisées par d'autres ensuite ont pu montrer que l'oscillateur harmonique était la vision la plus réaliste du phénomène.

#### La bulle comme oscillateur harmonique : Rayleigh-Plesset 3D

Considérons une bulle sphérique de rayon moyen  $R_0$ , vibrant librement sans forçage extérieur. Le grossissement de la bulle est limité par l'inertie du liquide qu'elle doit mettre en mouvement pour déplacer sa paroi. Son rétrécissement est quant à lui limité par la compressibilité du gaz contenu dans la bulle.

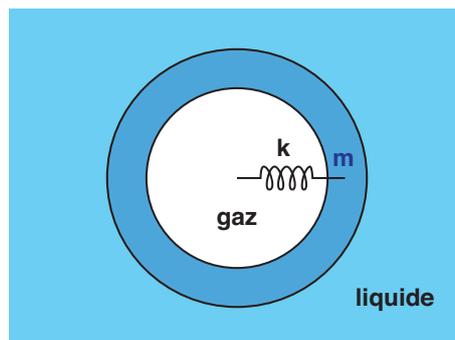


FIGURE I.1 – La bulle comme oscillateur harmonique

L'équation régissant le comportement de la bulle peut être obtenue en écrivant la conservation du débit liquide autour de la bulle et l'équation de Bernoulli dans le liquide. On obtient après développement l'équation de Rayleigh-Plesset pour une sphère pulsante [Plesset et Prosperetti, 1977] :

$$\rho_f \left( R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) + \frac{2\sigma}{R} + 4\eta\frac{\dot{R}}{R} = p_g - p_\infty,$$

où  $R$  désigne le rayon instantané de la bulle,  $\rho_f$  la densité du liquide,  $\sigma$  la tension de surface entre le gaz et le liquide,  $\eta$  la viscosité dynamique du liquide,  $p_g$  la pression du gaz dans la bulle et  $p_\infty$  la pression du liquide loin de la bulle.

Si on suppose que le gaz dans la bulle subit des transformations adiabatiques, c'est-à-dire que l'on néglige les échanges thermiques entre la bulle et le liquide environnant, on a alors :

$$p_g = p_{g,0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma},$$

où  $R_0$  est le rayon moyen de la bulle,  $p_{g,0}$  la pression à l'intérieur d'une bulle de rayon  $R_0$  et  $\gamma$  l'indice adiabatique du gaz ( $\gamma = 1,4$  pour l'air).

Regardons ce que cela donne pour de petites oscillations autour du rayon moyen en posant  $R = R_0(1 + X)$ , avec  $X \ll 1$ . En écrivant la loi de Laplace :  $p_{g,0} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}$  pour la bulle au repos, où  $p_0$  désigne la pression dans le liquide quand la bulle est au repos, on obtient l'équation linéarisée :

$$\rho_f R_0^2 \ddot{X} + \left( 3\gamma p_{g,0} - \frac{2\sigma}{R_0} \right) X = p_0 - p_\infty.$$

On voit ici que la bulle oscille à la manière d'un système masse-ressort, où la masse serait celle du liquide mis en mouvement et la raideur du ressort correspondrait à la compressibilité du gaz contenu dans la bulle.

### La fréquence de Minnaert

La fréquence propre de l'oscillateur est défini comme la fréquence à laquelle le système oscille en absence de force excitatrice externe et de forces dissipatives. Dans le cas d'une bulle sphérique, elle est appelée *fréquence de Minnaert*. Pour des bulles de rayon supérieur à  $1 \mu\text{m}$ , on a généralement  $\sigma/R_0 \ll \gamma p_0$ , et la fréquence de Minnaert s'exprime :

$$f_M = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_f}} \quad (\text{I.1})$$

La fréquence de résonance d'une bulle sphérique est donc inversement proportionnelle à son rayon. Dans le cas de la pluie tombant sur le lac, les bulles créées ont un rayon de l'ordre de  $R_0 \simeq 1 \text{ mm}$ , ce qui donne des fréquences propres de l'ordre de quelques kHz. Les fréquences audibles par l'oreille humaine sont comprises entre 50 Hz et 15 kHz, ce qui nous permet d'entendre le son émis par ces bulles.

### 1.2 La bulle vue comme transformateur d'énergie

Différents phénomènes sont susceptibles de conduire à un amortissement de la pulsation de la bulle. Tout d'abord, lorsque la bulle pulse, elle réémet à son tour une onde acoustique dans le liquide environnant. L'énergie diffusée s'exprime à travers la constante d'amortissement radiatif  $\delta_{rad}$ . D'autre part, le mouvement de la paroi de la bulle peut être freiné par la viscosité du liquide. L'énergie ainsi dissipée s'exprime à travers la constante

d'amortissement visqueux  $\delta_{vis}$ . Enfin, le système n'est pas tout à fait adiabatique : des échanges thermiques peuvent avoir lieu entre le gaz contenu dans la bulle et le liquide environnant. On introduit une troisième constante d'amortissement thermique  $\delta_{th}$  pour tenir compte de ces effets thermiques.

### Les différents types d'amortissement

Ces différents types d'amortissement sont calculés dans [Leroy, 2004]. L'équation décrivant la dynamique d'une bulle sphérique s'écrit finalement, en introduisant les variables complexes  $\bar{X} = \text{Re}(Xe^{i\omega t})$  et  $\bar{p}_\infty = \text{Re}(p_\infty e^{i\omega t})$  :

$$\left[ -\omega^2 + i\omega^2(\delta_{rad} + \delta_{vis} + \delta_{th}) + \omega_0^2 \right] \bar{X} = \frac{p_0 - \bar{p}_\infty}{R_0},$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre du système en présence de dissipation thermique :

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\kappa p_0}{\rho_f}},$$

où  $\kappa$  désigne l'indice polytropique du gaz. Il est défini par :

$$\kappa = \frac{1}{3} \text{Re} \left( \phi \left( \frac{R_0}{l_D} \right) \right),$$

où  $l_D = \sqrt{\frac{D_{th}}{\omega}}$  est la longueur de pénétration thermique,  $D_{th}$  désignant le coefficient de diffusion thermique du gaz et  $\phi(x)$  étant la fonction suivante :

$$\phi(x) = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1) \frac{i}{x^2} \left[ 1 - x\sqrt{i} \coth(x\sqrt{i}) \right]}$$

Les trois constantes d'amortissement présentées ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{rad} = \frac{R_0\omega}{c_f} \\ \delta_{vis} = \frac{4\eta}{\rho_f R_0^2 \omega} \\ \delta_{th} = \frac{1}{3\gamma} \left( \frac{\omega_M}{\omega} \right)^2 \text{Im} \left( \phi \left( \frac{R_0}{l_D} \right) \right) \end{array} \right.$$

où  $c_f$  est la vitesse du son dans le liquide. Ces trois constantes d'amortissement dépendent à la fois du rayon  $R_0$  de la bulle et de sa pulsation d'excitation  $\omega$ . Nous avons tracé sur la figure I.2 l'évolution de ces constantes en fonction du rayon de la bulle, pour une fréquence fixée à  $f = 100 \text{ kHz}$ <sup>1</sup>. A cette fréquence d'excitation, on peut distinguer trois régimes : le régime visqueux aux faibles rayons, le régime thermique pour des rayons compris entre  $R_0 = 4$  et  $54 \mu\text{m}$ , et enfin le régime diffusif aux grands rayons.

1. Les courbes obtenues sont différentes de celles qu'on pourra trouver dans le livre [Leighton, 1994] puisque Leighton y indique la constante d'amortissement pour une bulle excitée à sa pulsation propre  $\omega_0$ , obtenue en résolvant  $\omega^2 = \omega_0^2(\omega, R_0)$ .

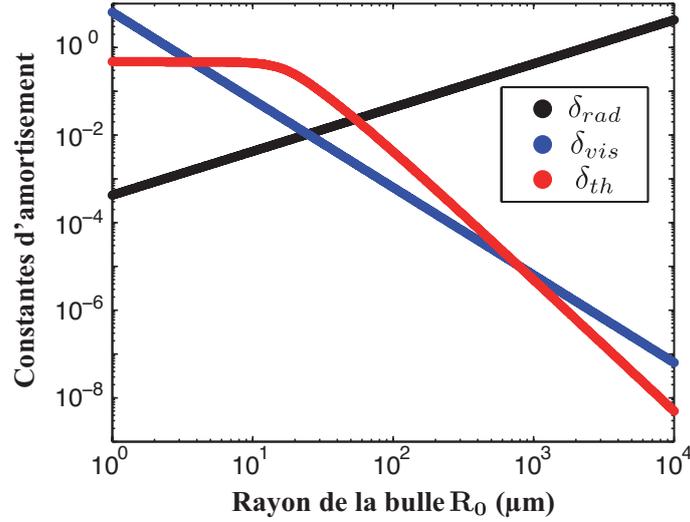


FIGURE I.2 – Constantes d’amortissement radiatif  $\delta_{rad}$ , visqueux  $\delta_{visc}$  et thermique  $\delta_{th}$  pour une bulle d’air sphérique de rayon  $R_0$  vibrant à une fréquence  $f = 100$  kHz dans de l’eau.

Dans les études d’oscillateurs harmoniques amortis, on définit habituellement le facteur de qualité de l’oscillateur comme l’inverse de la constante d’amortissement prise à la résonance :  $Q = 1/\delta_{tot}(\omega_0)$ , où  $\delta_{tot} = \delta_{rad} + \delta_{vis} + \delta_{th}$ . Le facteur de qualité mesure la faculté qu’a un oscillateur à osciller sans s’amortir. Dans le cas présenté figure I.2 où  $f = 100$  kHz, on est en  $\omega = \omega_0$  lorsque  $R_0 = 30 \mu\text{m}$ , rayon pour lequel  $\delta_{tot} \simeq 0,12$ , donnant accès à un facteur de qualité d’environ 8. Pour des fréquences plus faibles, de l’ordre de 100 Hz, correspondant à des rayons de bulle de quelques mm, on pourra même atteindre des facteurs de qualité de plus de 40. On voit ici que la bulle peut être un outil très puissant.

La transition entre les régimes dissipatifs (thermique et visqueux) et le régime diffusif (radiatif) s’effectue lorsque les constantes d’amortissement thermique et radiatif sont égales, c’est-à-dire lorsque le rayon de la bulle vérifie :

$$R_0^3 = \frac{c_f p_0}{\rho_f \omega^3} \text{Im} \left( \phi \left( \frac{R_0}{l_D} \right) \right) \quad (\text{I.2})$$

La figure I.3 représente l’évolution du rayon de transition pour des fréquences d’excitation comprises entre 20 et 200 kHz. Plus la fréquence d’excitation sera élevée et plus la transition aura lieu à des rayons faibles. On aura donc intérêt à se placer à haute fréquence si l’on souhaite rester en régime diffusif. Il est également possible de diminuer le rayon de transition en jouant sur le liquide environnant. Une augmentation de la densité du liquide aura pour effet de diminuer le rayon de transition. Cependant, les liquides beaucoup plus denses que l’eau sont difficilement manipulables et n’apportent qu’une faible diminution du rayon de transition. Quant à la vitesse du son dans le liquide, il faudrait la diminuer d’au moins un ordre de grandeur pour que celle-ci fasse baisser le rayon de transition de façon significative, ce qui ne sera réalisable qu’à condition de changer de type d’onde

excitatrice.

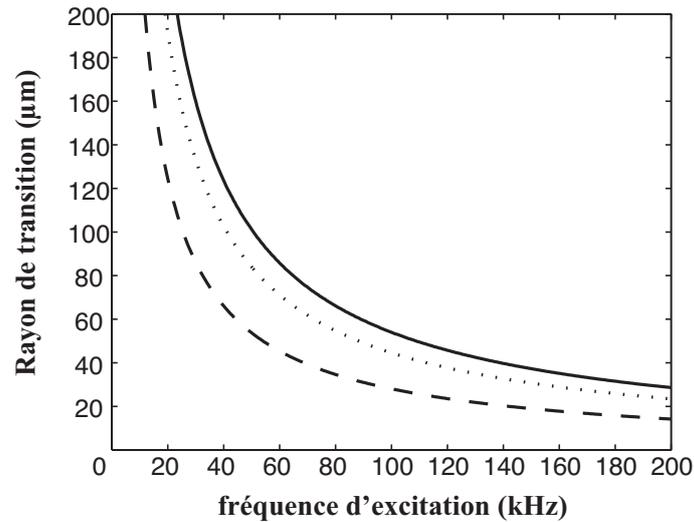


FIGURE I.3 – Rayon de transition entre le régime dissipatif et le régime diffusif, en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  de la bulle : pour une bulle dans de l'eau (trait plein), pour une bulle dans un liquide deux fois plus dense que de l'eau (pointillés) et pour une bulle dans un liquide où la vitesse du son est dix fois plus faible que celle dans l'eau (traits interrompus).

Finalement, on aura intérêt à aller vers des fréquences d'excitation inférieures à 100 kHz si l'on souhaite augmenter le facteur de qualité de la bulle, et vers des fréquences d'excitation supérieures à 100 kHz si l'on souhaite être en régime diffusif. Ainsi, dans la suite de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à des bulles soumises à une excitation dont la fréquence reste comprise entre 20 et 200 kHz. Cette gamme de fréquence fera résonner des bulles de rayon égal à quelques dizaines de microns. Des bulles de cette taille sont facilement produites en utilisant des puces microfluidiques. En revanche, les bulles ainsi produites sont confinées, conduisant à une modification de leur comportement sous ultrasons, qui n'a, à notre connaissance, jamais été étudiée jusqu'à maintenant.

### Intensité acoustique autour d'une bulle

Nous venons de voir que la bulle se comportait comme un redistributeur d'énergie. L'énergie de l'onde incidente peut ainsi être dissipée sous forme thermique ou visqueuse, ou bien être diffusée sous la forme d'une onde acoustique sphérique. La bulle se comporte alors comme une source ultrasonore secondaire.

On définit l'intensité acoustique  $I$  comme l'énergie traversant une unité d'aire pendant une unité de temps. D'après [Leighton, 1994], l'intensité acoustique d'une onde plane ou sphérique s'exprime :

$$I = \frac{P_A^2}{2\rho_f c_f}$$

Or la pression acoustique  $P_A$  générée par une bulle évolue en  $r^{-1}$ , ce qui signifie que l'intensité acoustique décroît en  $r^{-2}$  autour de la bulle.

---

Si on était dans une géométrie 2D avec une bulle cylindrique, on aurait une pression acoustique en  $P_A \propto r^{-1/2}$ , donnant lieu à une décroissance moins rapide de l'intensité acoustique  $I \propto r^{-1}$ . On peut alors se demander s'il ne serait pas plus intéressant de passer en géométrie 2D pour augmenter l'intensité acoustique générée par la bulle. Cette géométrie 2D peut être obtenue en confinant les bulles dans une cellule de liquide d'épaisseur très faible par rapport aux autres dimensions de la cellule, plus généralement appelée cellule de *Hele-Shaw*, que l'on rencontre fréquemment en microfluidique.

## 2 Les enjeux microfluidiques

Nous avons vu dans la partie précédente que la bulle était un résonateur puissant, son facteur de qualité pouvant atteindre des valeurs de quelques dizaines. On peut alors se demander si cette membrane vibrante est capable de générer des écoulements suffisants pour induire du mélange autour d'elle. Cette thématique est particulièrement intéressante dans le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds, pour lesquels les effets visqueux dominent par rapport aux effets inertiels. C'est en particulier le cas dans les systèmes dits "microfluidiques", dans lesquels l'une des tailles caractéristiques de l'écoulement est micrométrique, conduisant à des nombres de Reynolds plus petits que l'unité.

Dans cette partie, nous commencerons par poser le problème du mélange aux bas nombres de Reynolds, puis nous montrerons que la pulsation réversible de la bulle telle que présentée dans la partie précédente ne peut pas induire de mélange. Nous montrerons en revanche que grâce aux non-linéarités de l'écoulement autour d'une paroi solide oscillante, il est possible d'induire un écoulement moyen non nul dans le fluide. Nous présenterons les écoulements ainsi générés autour d'un objet solide cylindrique ou près d'une paroi plane solide. Enfin, nous reviendrons aux bulles et verrons comment on peut malgré tout créer des écoulements moyens non nuls autour de celles-ci.

### 2.1 Le mélange dans des écoulements à bas nombre de Reynolds

L'écoulement hydrodynamique d'un fluide newtonien est décrit par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho_f (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v},$$

dans laquelle on retrouve à gauche les termes inertiels et à droite un terme lié à la viscosité  $\eta$  du fluide,  $\mathbf{v}$  désignant la vitesse d'une particule fluide. On définit le nombre de Reynolds  $Re$  comme le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses :

$$Re = \frac{U_c l_c}{\nu},$$

où  $U_c$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement,  $l_c$  sa taille caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Aux hauts Reynolds ( $Re \gg 1$ ), c'est le terme inertiel qui domine : on dit que l'on est en régime turbulent. Aux bas Reynolds ( $Re \ll 1$ ), ce sont les termes visqueux qui dominent : on dit que l'on est en régime laminaire.

En régime laminaire, les termes inertiels peuvent être négligés et l'équation de Navier-Stokes se simplifie pour donner une équation réversible avec le temps. Autrement dit, si on met un obstacle cylindrique statique dans un écoulement, (une bulle au repos dans un flux de liquide par exemple), le fluide va s'écouler de la même façon, que l'on regarde la vidéo de l'écoulement à l'endroit ou à l'envers en remontant le temps (voir figure I.4). Cela signifie aussi que si on suit une particule fluide autour de la bulle en vibration, la particule fluide reviendra au même endroit après une période de pulsation de la bulle. Si la pulsation de la bulle est linéaire, on ne pourra donc pas créer d'écoulement moyen dans le liquide environnant la bulle : la bulle ne créera donc pas de mélange et ne pourra pas

non plus se déplacer dans le liquide grâce à sa pulsation.

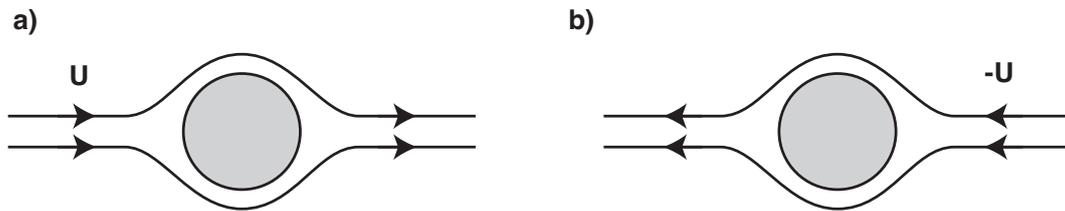


FIGURE I.4 – Schéma de l'écoulement autour d'un cylindre en régime laminaire : (a) écoulement pour une vitesse  $U$  à l'infini; (b) écoulement pour une vitesse  $-U$  à l'infini. L'écoulement est réversible, conduisant aux mêmes lignes de courant que l'écoulement se fasse dans un sens ou dans l'autre, que la vidéo de l'écoulement soit regardée en remontant le temps ou non.

Le mélange en régime laminaire est devenu un enjeu majeur avec le développement des laboratoires sur puce. L'idée est de créer des laboratoires d'analyses médicales et des usines chimiques de taille micrométrique. Cette miniaturisation aurait pour avantage de rendre les systèmes de détection médicale plus efficaces et moins coûteux, mais aussi facilement transportables et commercialisables. Les puces microfluidiques ont déjà prouvé leur utilité dans le domaine des analyses immunologiques telles que le test ELISA [Etshola et Leckband, 2001]. Ces tests permettent la détection d'anticorps dans un échantillon liquide tel que le sang ou les urines. Les systèmes microfluidiques ne requièrent que de faibles volumes de liquide, ce qui est particulièrement utile lorsque l'on ne dispose que de peu d'analyte, ou lorsque de nombreux tests de détection doivent être réalisés. Ils permettent également de diminuer les temps d'analyse en minimisant les distances de diffusion [Rossier et Girault, 2001]. Pour ce qui est de l'usine chimique micrométrique, la faible taille des canaux microfluidiques permet d'augmenter considérablement les vitesses de réaction chimique et donc de produire en quantité plus importante. Mais pour cela, il faut être capable de recréer les outils que nous possédons à l'échelle macroscopique (valve, agitateur magnétique, etc.) à une échelle micrométrique. Or aux bas Reynolds, l'écoulement est réversible, rendant apparemment impossible la génération de tourbillons. Seul le mécanisme de diffusion semble alors permettre le mélange, mais cela implique de faire des canaux suffisamment longs pour que la diffusion ait le temps de faire son travail.

Différentes techniques ont été développées pour créer du mélange à ces petites échelles. [Lee et al., 2011] les classent en deux catégories : les mélangeurs actifs pour lesquels un champ externe vient perturber les écoulements, et les mélangeurs passifs où la géométrie du canal est spécialement choisie pour augmenter la surface et le temps de contact des différents échantillons à mélanger (voir exemples figure I.5). Parmi les mélangeurs les plus efficaces (courte durée et courte distance), on retrouve les mélangeurs actifs acoustiques. Deux types de dispositifs sont utilisés : l'un fait intervenir un champ acoustique près d'une paroi solide [Luong et Phan, 2010], l'autre utilise la vibration de bulles encastrées [Ahmed et al., 2009].

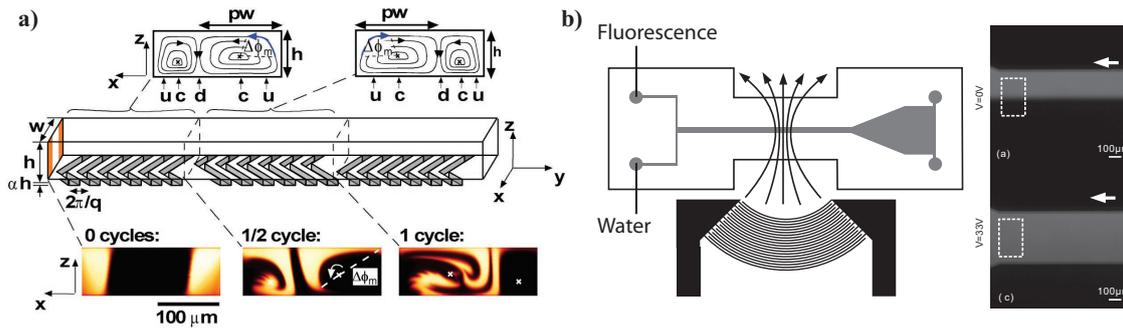


FIGURE I.5 – (a) Mélangeur passif à échelons en forme de chevrons proposé par [Stroock et al., 2002]. Un cycle est formé par deux séquences d'échelons dont le centre du chevron est décalé une fois à gauche, une fois à droite par rapport au centre du canal. Une solution fluorescente est injectée sur les côtés gauche et droite d'une solution transparente. Les images montrent le mélange de ces deux solutions au bout d'un demi-cycle et au bout d'un cycle. (b) Mélangeur actif acoustique proposé par [Luong et Phan, 2010]. Une onde acoustique de surface focalisée est générée par des électrodes inter-digitées circulaires. Les images de droite montre le mélange d'une solution fluorescente avec une solution transparente à l'intérieur du canal.

L'écoulement généré dans ces deux cas est appelé "écoulement redressé" ou "vent acoustique" ("acoustic streaming", "steady streaming" ou "acoustic wind" en anglais). Il s'agit de l'écoulement moyen induit par l'atténuation d'une onde acoustique dans un fluide. Le son est capable de générer différents types d'écoulements redressés : ces écoulements prennent le plus souvent la forme de jets ou de tourbillons.

Dans le cas de l'écoulement en forme de jet, l'atténuation mise en cause est une atténuation visqueuse qui a lieu dans le volume de fluide. On fait référence à cet écoulement dans la littérature sous le nom de "streaming de Eckart". Ces jets apparaissent lorsqu'un faisceau acoustique intense à très haute fréquence traverse un fluide. Ils peuvent être plus ou moins puissants suivant la viscosité du fluide et la dimension du canal. Dans un canal microfluidique, cet écoulement ne pourra se voir qu'aux très hautes fréquences ( $f > 1$  MHz), à condition que la dimension dans laquelle se propage l'onde soit au moins de l'ordre du millimètre [Wiklund et Hertz, 2006].

Aux plus basses fréquences, les effets de paroi vont dominer. On parle d'écoulement de couche limite oscillante car c'est la couche limite visqueuse qui est responsable des écoulements moyens générés. L'interaction de l'onde avec la paroi va générer de la vorticité à proximité de l'interface. Cette vorticité va diffuser sur une certaine distance caractéristique, créant ainsi des tourbillons près de la paroi. Ainsi, quand bien même l'écoulement microfluidique est à bas Reynolds, celui généré par les vibrations haute fréquence près de la paroi correspond à celui d'un fluide à haut Reynolds, autorisant la création de tourbillons près de la paroi qui vont favoriser le mélange. Nous allons maintenant détailler ces écoulements lorsque la paroi est solide.

## 2.2 Écoulements redressés à proximité d'une paroi solide

Deux situations peuvent conduire à l'établissement d'un écoulement redressé à proximité d'une paroi solide. Dans la première, la paroi solide est fixe et une onde acoustique

stationnaire s'établit dans une direction parallèle au plan de l'interface. Dans la seconde, la paroi solide est mise en vibration dans un fluide initialement au repos. Ces deux situations sont équivalentes : on se retrouve dans les deux cas avec une couche limite visqueuse à la surface de la paroi. Elle est nommée couche limite de Stokes ou couche limite oscillante et a une épaisseur :  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ . En dehors de cette couche limite de Stokes, l'atténuation visqueuse est négligeable. [Lighthill, 1978] a démontré que dans cette zone-là, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement au second ordre ne présentent aucun terme de forçage acoustique, ne créant ainsi pas d'écoulement. En revanche, à l'intérieur de la couche limite, on se retrouve avec un gradient de vitesse tangentielle très important entre la paroi solide et l'extrémité de la couche limite. De la vorticité va alors être générée au niveau de la paroi. Cette vorticité va ensuite diffuser un peu plus loin de la paroi, sur une distance caractéristique  $\delta_s$ . A l'intérieur de cette couche, dite couche interne ou encore couche limite stationnaire, des tourbillons vont se développer. L'équation de Navier-Stokes moyenn  e temporellement s'écrit à l'ordre 2 :

$$\eta\Delta\langle\mathbf{v}_2\rangle + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot\langle\mathbf{v}_2\rangle) - \nabla\langle p_2\rangle = \langle\rho_1\partial_t\mathbf{v}_1\rangle + \rho_0\langle(\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_1\rangle,$$

où  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  désignent la vitesse de la particule fluide à l'ordre 1 et à l'ordre 2,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  la densité du fluide à l'ordre 1 et à l'ordre 2. Les termes du premier ordre (partie droite de l'équation) agissent ainsi comme un terme source pour les termes du second ordre (partie gauche de l'équation). C'est donc grâce à la non-linéarité de l'écoulement que l'on pourra avoir un transfert de quantité de mouvement continu vers le fluide.

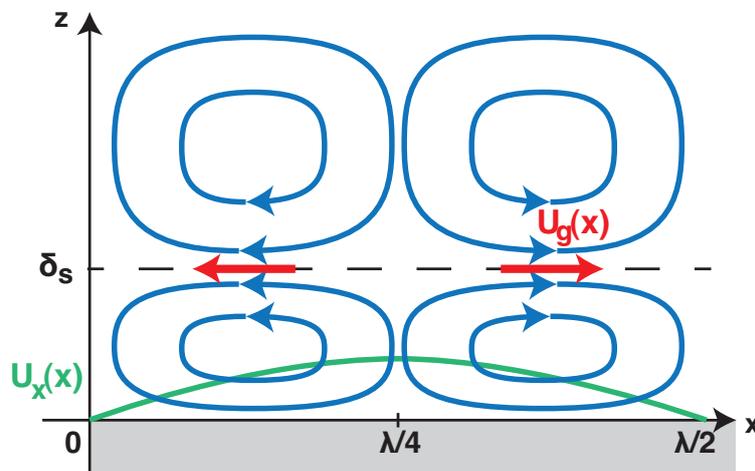


FIGURE I.6 –   coulement redressé    proximité d'une paroi plane plongée dans un champ acoustique stationnaire ou près d'une paroi vibrante, avec une vitesse tangentielle de l'onde ou de la paroi :  $U_x(x) = U_0 \sin(kx)$ . Le gradient de vitesse  $\partial_z U_x$  localisé près de la paroi crée de la vorticité qui va diffuser jusqu'en  $z = \delta_s$ . En  $\delta_s$ , on obtient une vitesse de glissement  $U_g$  dont le signe détermine le sens de rotation des tourbillons internes : le fluide va des noeuds de vitesse (*i.e.* les ventres de pression) vers les ventres de vitesse (*i.e.* les noeuds de pression) lorsqu'il longe la paroi solide. Le tourbillon interne va entraîner le liquide à l'extérieur de la couche interne et y générer un tourbillon contrarotatif. Cette figure est inspirée de [Muller et al., 2012]

On peut définir le nombre de Reynolds de l'écoulement redressé comme :

$$Re_s = \frac{\rho_f U_s l_s}{\eta},$$

où  $\rho_f$  est la densité du fluide à l'ordre 0,  $U_s$  l'amplitude caractéristique de la vitesse de l'écoulement redressé et  $l_s$  la longueur caractéristique du système. Dans la zone où  $Re_s \ll 1$ , le terme visqueux domine et on peut alors déterminer la vitesse de l'écoulement à l'intérieur de la couche interne. Celle-ci est calculée dans [Nyborg, 1958] sous sa forme complète. Sa valeur à l'infini correspond à la vitesse de glissement  $U_g$  au niveau de la limite intérieur/extérieur de la couche interne. Elle est exprimée dans [Lighthill, 1978] par :

$$U_g(x) = -\frac{3}{4\omega} U_x(x) \frac{\partial U_x(x)}{\partial x},$$

où  $U_x(x)$  est la vitesse tangentielle au niveau de la paroi solide et  $x$  l'axe de propagation de l'onde (ou l'axe de vibration de la paroi). Supposons qu'on soit dans le cas d'une onde stationnaire près d'une paroi. On peut la décrire localement par :  $U_x(x) = U_0 \sin(kx)$ , ce qui donne pour la vitesse de glissement :  $U_g(x) = -U_0^2 \frac{3k}{8\omega} \sin(2kx)$ . Les tourbillons de la couche interne vont donc se situer entre les noeuds et les ventres de vitesse de l'onde, le fluide allant des noeuds vers les ventres lorsqu'il longe la paroi, et des ventres vers les noeuds loin de la paroi (voir figure I.6). Ces tourbillons vont alors entraîner, tel un tapis roulant, le fluide situé à l'extérieur de la couche interne. De nouveaux tourbillons vont apparaître dans cette couche externe. On se retrouve finalement avec des paires de tourbillons contrarotatifs, l'un étant dans la couche interne, l'autre dans la couche externe.

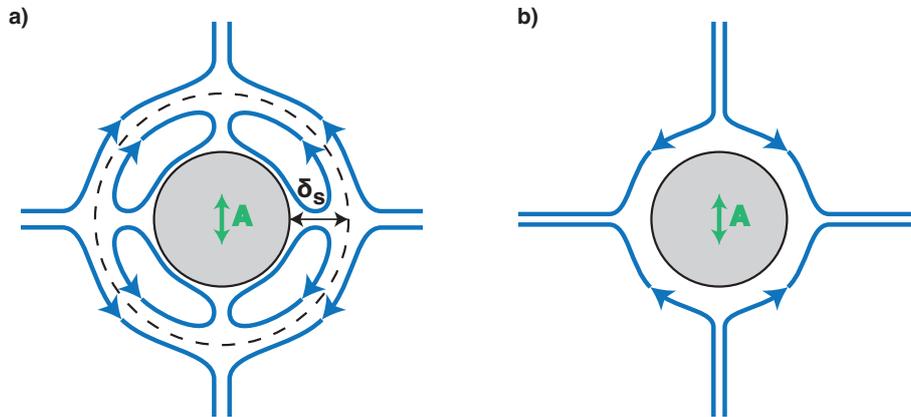


FIGURE I.7 – Écoulement redressé autour d'un cylindre dont la position du centre oscille (son déplacement est indiqué en vert) : (a) lorsque  $M \gg 1$ , deux tourbillons se forment par quadrant autour du cylindre, l'un dans la couche interne, l'autre dans la couche externe. Dans la couche externe, le liquide fuit le cylindre dans la direction de l'oscillation. (b) lorsque  $M \ll 1$ , un seul tourbillon se forme par quadrant autour du cylindre. Ce tourbillon a la même orientation que le tourbillon de la couche interne du cas  $M \gg 1$ .

De nombreuses études, autant expérimentales que théoriques, ont été menées autour d'un cylindre oscillant autour de sa position moyenne. Dans toutes ces études, on considère que l'amplitude d'oscillation  $A$  est petite comparé au rayon  $R_0$  du cylindre. On définit

alors le paramètre de fréquence  $M = R_0/\delta$ . Aux hautes fréquences ( $M \gg 1$ ), on retrouve autour du cylindre les deux tourbillons par quadrant (*i.e.* par quart de longueur d'onde) comme vu précédemment, l'un dans la couche interne, l'autre dans la couche externe (voir figure I.7a). L'épaisseur de la couche interne s'exprime alors :  $\delta_s \simeq \frac{R_0}{A} \frac{1}{M} R_0$  et diminue donc lorsqu'on augmente l'amplitude des oscillations. Dans le cas basse fréquence ( $M \ll 1$ ), la couche interne finit par envahir le liquide. On se retrouve alors avec un unique tourbillon par quadrant qui tourne dans le même sens que celui de la couche interne du cas  $M \gg 1$  (voir figure I.7b). [Petit et Gondret, 1992] montrent qu'il est possible de passer continûment d'un motif à l'autre en faisant varier la fréquence. Qu'en est-il lorsque la paroi n'est pas solide et que la condition de non-glissement à la paroi ne peut plus s'appliquer ?

### 2.3 Écoulements redressés générés par la vibration d'une bulle

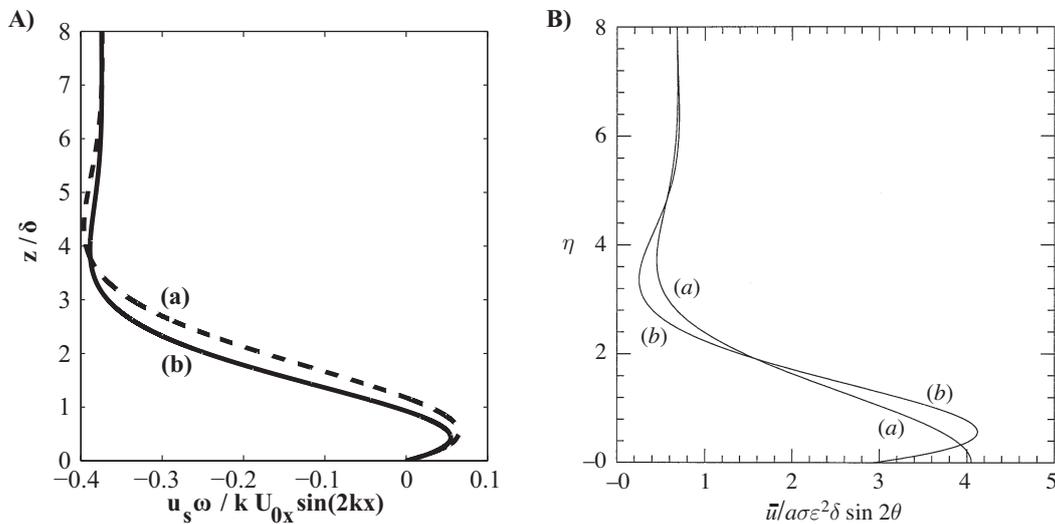


FIGURE I.8 – (A) Écoulement près d'une paroi solide 2D plane : évolution de la vitesse tangentielle  $u_s$  dans le liquide en fonction de l'éloignement  $z/\delta$  de la paroi, calculée à partir des équations (29a) et (29b) dans [Nyborg, 1958]. (B) Écoulement près d'une bulle : évolution de la vitesse tangentielle  $\bar{u}$  dans le liquide en fonction de l'éloignement  $\eta = (r - 1)/\delta$  à la bulle. Figure extraite de [Longuet-Higgins, 1998]. Les courbes (a) et (b) représentent respectivement la vitesse de l'écoulement en représentation eulérienne et lagrangienne.

[Davidson et Riley, 1971] et [Longuet-Higgins, 1998] ont fait le calcul détaillé de la fonction de courant dans le liquide environnant une bulle dont la position oscille. Que ce soit dans le cas  $M \gg 1$  ou  $M \ll 1$ , ils obtiennent un tourbillon par quadrant, avec le même sens d'écoulement que pour le cylindre solide aux basses fréquences (voir figure I.7b). Ce résultat est retrouvé par [Wu et Du, 1997] qui passe par le potentiel des vitesses pour déterminer les lignes de courant à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle, que la viscosité de l'air soit négligée ou non. [Elder, 1958] propose quant à lui une étude expérimentale détaillée des différents écoulements existant autour d'une bulle d'air de taille submillimétrique en contact avec une paroi, pour des liquides plus ou moins visqueux. Pour des bulles de rayon inférieur à  $100 \mu\text{m}$ , le tensioactif présent à l'interface air/liquide a tendance, selon lui, à créer une fine membrane autour de la bulle. Il observe que l'écou-

lement généré par ces bulles à membrane change de sens lorsqu'il augmente l'amplitude d'excitation, et attribue cet effet à la rupture de cette fine membrane. Autrement dit, le sens de l'écoulement n'est pas le même suivant qu'on ait une condition de glissement ou de non-glissement au niveau de la paroi.

Cela se conçoit bien si l'on examine l'évolution de la vitesse tangentielle en fonction de la distance à la paroi. [Nyborg, 1958] montre dans le cas d'une paroi solide que la vitesse tangentielle est nulle à la paroi, commence à augmenter avec la distance, puis diminue en s'annulant autour de  $z = \delta$  (c'est le centre du tourbillon de la couche interne), pour enfin se stabiliser en  $U_g$  (voir figure I.8A). Dans le cas d'une bulle ou d'une goutte, la vitesse tangentielle n'est pas nulle à la paroi, ce qui a globalement pour effet de déplacer la courbe de la vitesse vers le haut. On n'a donc pas d'annulation de la vitesse tangentielle et donc pas de génération de tourbillon dans la couche interne, comme on peut le voir sur la figure I.8B.

[Tho *et al.*, 2007] sont à ma connaissance les seuls à proposer une expérience de translation pure de bulle. Pour une translation rectiligne, ils observent un écoulement de sens opposé à celui de la théorie (voir figure I.9), c'est-à-dire semblable à la figure I.7a mais sans la couche interne, qui selon eux est difficile à observer. Ils attribuent ce changement de sens à la présence d'une membrane autour de la bulle, cette membrane pouvant être due soit à une agrégation de fines particules solides à la surface de la bulle, soit à une forte concentration de surfactant qui rigidifierait alors l'interface eau/air.

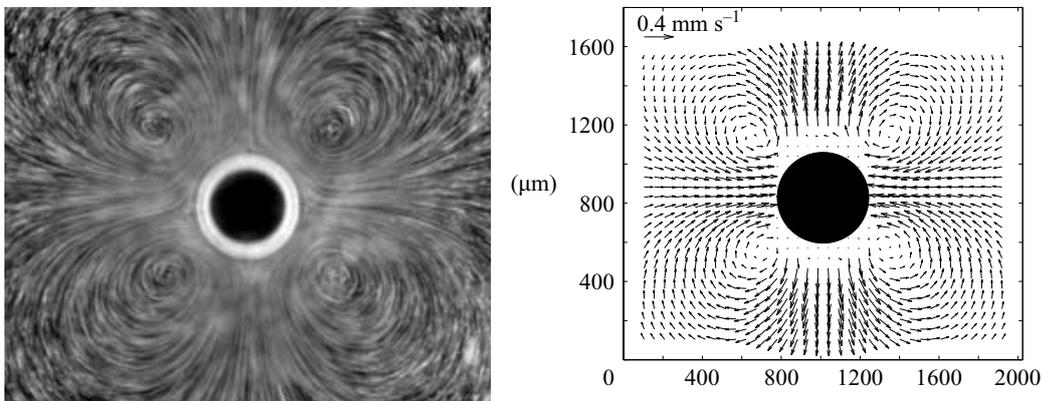


FIGURE I.9 – Écoulement généré autour d'une bulle présentant un mode de translation (la direction de la translation est selon l'axe vertical) : on constate un écoulement dans le sens inverse de celui prédit par la théorie. Les auteurs attribuent cela à la présence d'une membrane fine sur la paroi de la bulle. Figure extraite de [Tho *et al.*, 2007]

[Longuet-Higgins, 1998] montre que la translation seule de la bulle ne génère des écoulements que de faible intensité, comparé aux écoulements autour de cylindres solides oscillants. En revanche, si on y ajoute une pulsation en volume de la bulle, l'écoulement redressé devient bien plus important : il est même maximal lorsque la pulsation en volume est en quadrature de phase avec le mode de translation et peut changer de sens suivant la valeur de ce déphasage. Dans ce cas-là, on obtient un écoulement non plus quadrupolaire,

mais dipolaire autour de la bulle (figure I.10a), comme cela a pu être confirmé expérimentalement pour une bulle pulsant contre un mur [Marmottant et Hilgenfeldt, 2003] (figure I.10b).

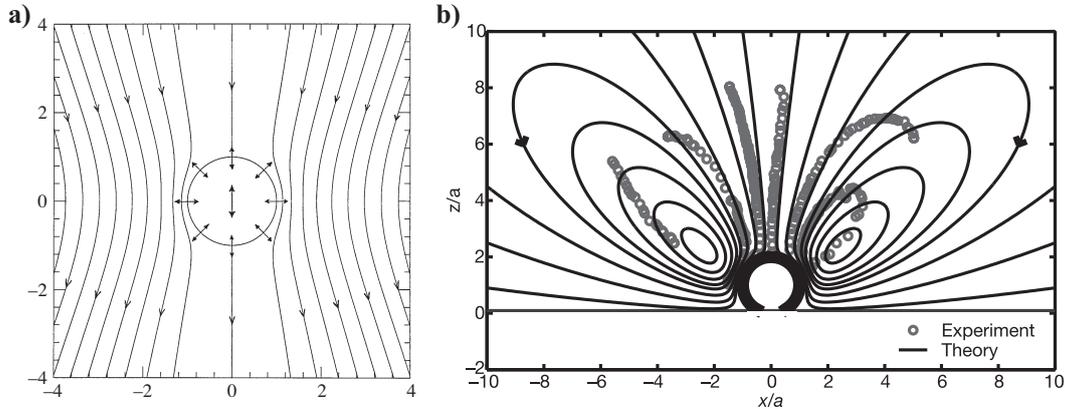


FIGURE I.10 – (a) Écoulement dipolaire théorique autour d'une bulle pulsante en mouvement de translation oscillante. Figure extraite de [Longuet-Higgins, 1998]. (b) Lignes de courant théoriques et expérimentales du liquide autour d'une bulle sphérique de rayon  $a$  au contact d'une paroi excitée avec des ultrasons. Figure extraite de [Marmottant et Hilgenfeldt, 2003].

Les écoulements générés par la vibration des bulles ont fait l'objet de nombreuses études théoriques, d'une part parce qu'ils peuvent causer des dégâts matériels considérables, comme dans le cas des bulles de cavitation inertielle créées par la mise en rotation des hélices de bateau, d'autre part parce qu'ils sont suffisamment puissants pour lyser des cellules ou des micro-organismes tels des bactéries. La plupart des expériences menées mettent en jeu la vibration de bulles contre une paroi solide [Marmottant *et al.*, 2006], ou bien de bulles encastrées dans un mur [Wang *et al.*, 2013]. Ces bulles présentent un mode de translation qui s'explique par le fait qu'elles ressentent l'attraction de leur bulle "image" à travers la paroi solide. Mais la présence de la paroi solide va également générer un écoulement redressé qui va se superposer à celui de la bulle et créer de nouveaux tourbillons [Rallabandi *et al.*, 2014], rendant l'écoulement encore plus complexe. Cependant, ce n'est pas le nombre de tourbillons qui fait un bon mélange. En effet, une fois qu'un tourbillon existe, le liquide à l'extérieur du tourbillon a tendance à rester à l'extérieur du tourbillon. Seul un mécanisme de diffusion peut créer des échanges entre ces deux zones, rendant le mélange peu efficace. Pour mélanger, il suffit alors de choisir deux conditions d'excitation conduisant à des écoulements distincts et de passer d'une condition à l'autre de façon alternée. C'est ce que fait [Wang *et al.*, 2013] soit en passant d'un état avec ultrasons à un état sans ultrasons (figure I.11c), soit en excitant alternativement la bulle à deux fréquences différentes (figure I.11d). Les écoulements induits par la bulle encastrée étant de portée restreinte, il est ensuite possible d'augmenter le nombre de bulles pour créer un écoulement sur toute la largeur du canal [Ahmed *et al.*, 2009, Ahmed *et al.*, 2013].

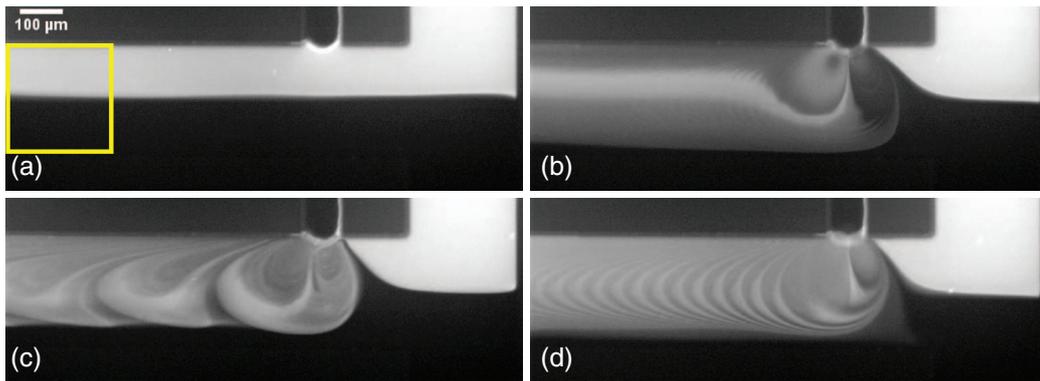


FIGURE I.11 – Écoulement généré par une bulle vibrante encastrée dans un mur (la bulle est en haut de l'image) : (a) quand la bulle n'est pas excitée ; (b) pour une bulle excitée à 27,1 kHz ; (c) pour une bulle alternativement excitée et laissée au repos ; (d) pour une bulle excitée alternativement à 27,1 kHz et 91,3 kHz. L'efficacité du mélange peut être ajustée en jouant sur l'intervalle entre les deux conditions d'excitation. Figure extraite de [Wang *et al.*, 2013].

Finalement, la vibration simple de la bulle ne permet pas de générer des écoulements. En revanche, l'interaction entre différents modes de vibration peut conduire à des écoulements intenses, même si les amplitudes de vibration restent modérées. On retiendra que l'écoulement autour de la bulle n'est pas en deux couches, comme dans le cas d'une paroi solide, mais en une seule couche. D'autre part, on notera que l'état de surface de la bulle peut jouer un rôle important dans le sens de l'écoulement, notamment lorsque la bulle pulse peu et ne fait que se translater.

### 3 Les enjeux acoustiques

Les matériaux complexes montrent de plus en plus d'intérêt dans le domaine de l'acoustique, entre la localisation d'Anderson dans les milieux très désordonnés et les métamatériaux à indice de réfraction négatif. Les effets de résonance jouent un rôle important dans ces phénomènes.

Les bulles sont particulièrement intéressantes à la fois parce qu'elles présentent une fréquence de résonance et parce que leur rayon est bien plus petit que la longueur d'onde à laquelle il faut les exciter pour qu'elles résonnent. De ce fait, les bulles pourraient montrer des effets collectifs impressionnants. Malheureusement, les théories développées sont difficiles à confronter aux expériences car il n'est pas facile de contrôler la position et la taille des bulles à l'échelle d'une expérience. En effet, la poussée d'Archimède conduit les bulles à se regrouper en haut de la cavité de liquide, tandis que les phénomènes de diffusion rectifiée conduit la bulle à grossir ou rétrécir lors de sa vibration.

Dans cette partie, nous nous focaliserons sur deux domaines de recherche dans lesquels les bulles montrent un grand potentiel : la diffusion multiple et l'amplification acoustique.

#### 3.1 Le métamatériau à bulles

[Leroy *et al.*, 2015] ont montré qu'il était possible de tirer partie des propriétés acoustiques des bulles pour créer un matériau super-absorbant. Pour pallier les habituels problèmes expérimentaux, le matériau choisi consiste soit en un bloc de gel dans lequel ont été injectées des bulles d'air, soit en un bloc de polymère dans lequel ont été modélées des cavités cylindriques. La fréquence de Minnaert de ces bulles dépend de la visco-élasticité du matériau :

$$f_M = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0 + 4G}{\rho_f}},$$

$G$  étant le module de cisaillement du matériau. Si on choisit un matériau suffisamment mou, la longueur d'onde du son dans le matériau sera bien supérieure au rayon de la bulle et on pourra faire apparaître des phénomènes collectifs tels que de la diffusion multiple.

Dans [Leroy *et al.*, 2009b], des bulles d'air ont été disposées dans un gel sur un même plan, en réseau à peu près carré. Des pulses gaussiens ont ensuite été envoyés sur le plan de bulles et le signal transmis a été enregistré par un hydrophone. On observe une atténuation forte du signal en sortie du plan de bulles pour une large gamme de fréquences, le minimum de transmission étant obtenu à une fréquence un peu plus élevée que la fréquence de Minnaert.

Un modèle a été développé, basé sur l'hypothèse que le plan de bulles est infini et que l'onde acoustique qui l'excite est une onde plane composée d'une unique longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Le coefficient de transmission s'écrit :

$$T = 1 + KF,$$

où  $K = j \frac{2\pi n}{k}$ ,  $n$  est le nombre de diffuseurs par unité d'aire et  $F$  est la fonction de

diffusion :

$$F = \frac{R_0}{\left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2 - 1 - j\delta},$$

où  $\delta$  la constante d'amortissement, que l'on supposera dominée par le terme radiatif  $\delta_{rad} = kR_0$ .

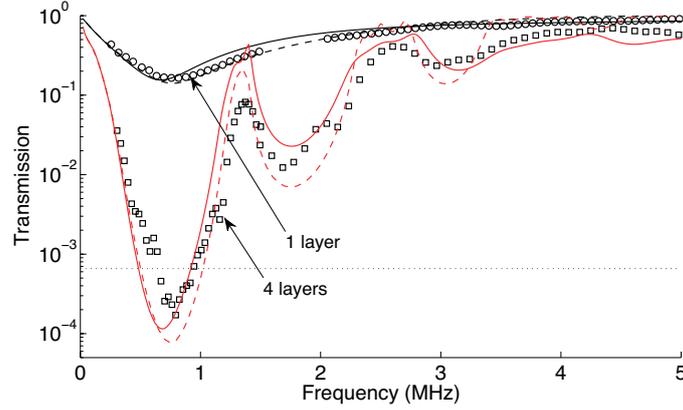


FIGURE I.12 – Transmission du son à travers une couche de bulles en réseau (cercles) et quatre couches de bulles en réseau (carrés), avec un pas de réseau  $D_x = 200 \mu\text{m}$  dans la couche et  $D_z = 360 \mu\text{m}$  entre deux couches successives. Les prédictions du modèle multi-couches et du modèle de diffusion multiple sont représentées respectivement en trait plein et trait interrompu. Figure extraite de [Leroy et al., 2009a].

Pour que le modèle concorde avec les données expérimentales, il faut ajouter le couplage radiatif entre les bulles : en effet, chaque bulle va diffuser l'onde acoustique incidente et agir comme une source acoustique supplémentaire pour ses voisines. [Leroy et al., 2009b] montre alors que le coefficient de transmission devient :

$$T = 1 + \frac{KF}{1 - KF e^{jkb}},$$

où  $b$  est une distance de coupure en dessous de laquelle on peut considérer qu'il n'y a pas de bulle voisine. Pour  $b = D/\sqrt{\pi}$ , on obtient une plutôt bonne corrélation avec les points expérimentaux (trait plein noir, figure I.12). Le coefficient de transmission atteint alors son minimum pour une pulsation environ égale à :

$$\omega_{min} = \frac{\omega_M}{\sqrt{1 - \frac{2\pi R_0}{kd} \sin(k \frac{d}{\sqrt{\pi}})}},$$

qui est supérieure à la pulsation de Minneart. Sa valeur dépend donc à la fois du rayon des bulles et de la distance entre les bulles.

[Leroy et al., 2009a] montre que ce choix de distance de coupure tient pour une superposition de plusieurs plans de bulles (trait plein rouge, figure I.12). Dans le cas de quatre couches superposées, on observe également l'apparition de plusieurs bandes interdites,

dont la position fréquentielle sera proche des multiples de la pulsation  $\omega_{min}$  obtenue pour une couche de bulles.

La diffusion multiple à travers un milieu liquide bulleux a été largement étudiée théoriquement [Kushwaha et al., 1998, Kafesaki et al., 2000], mais peu d'expériences ont été réalisées du fait de la difficulté de maintenir des bulles à une position fixe avec un rayon variant peu. On peut se demander si les effets seraient décuplés si la bulle n'était pas entièrement confinée dans une matrice de polymère, mais pouvait vibrer dans du liquide dans au moins une des dimensions de l'espace. D'autre part, on voit que si on était capable d'avoir un couplage suffisamment puissant entre les bulles pour qu'elles puissent se synchroniser, peu importerait que l'onde incidente soit plane ou non, les bulles pourraient se synchroniser, ce qui amènerait à une amplification de tous ces phénomènes collectifs.

### 3.2 Le SASER à bulles

[Zavtrak, 1995] a théorisé à la fin du siècle dernier la possibilité de créer ce qu'il appelle un "SASER à bulles". Le SASER est ici l'acronyme de "*Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation*", soit en français "*Amplification du son par émission stimulée de rayonnement*". Ainsi, le SASER serait au son ce que le LASER est à la lumière.

Le principe est le suivant : des bulles sont générées par électrolyse dans une cavité remplie d'un liquide diélectrique, comme par exemple de l'eau distillée (voir figure I.13). Ce liquide bulleux compose le milieu actif du SASER. Le pompage est assuré par un champ électrique alternatif ou bien par un transducteur : les bulles vont alors vibrer en volume. La distribution des bulles est supposée initialement uniforme. Si la cavité est résonante, on peut alors exciter un mode de résonance de la cavité. Grâce aux forces de radiation, les bulles vont se retrouver au niveau des ventres ou des noeuds de vibration, induisant ainsi une variation spatiale de la densité de bulles dans le milieu. Elles vont alors synchroniser leur phase, conduisant à une amplification du mode.

On obtient alors un schéma similaire au laser à électrons libres. Des électrons sont tout d'abord accélérés au sein d'un accélérateur de particules, puis le faisceau d'électrons (qui joue le rôle de milieu actif) traverse un onduleur (qui joue le rôle de pompage), composé d'une série d'aimants dont les pôles sont alternés d'un aimant à l'autre. A chaque passage par un aimant, le faisceau est dévié et on a émission d'un rayonnement synchrotron. Des sous-paquets d'électrons vont se former (on appelle cela le *microbunching* en anglais) et seront séparés de la longueur d'onde de la lumière synchrotron produite. Ainsi, on obtient une émission de lumière cohérente temporellement et spatialement.

La théorie du SASER à bulles est détaillée dans [Zavtrak, 1996]. La pression dans le milieu à bulles satisfait l'équation :

$$\Delta p - \frac{1}{c_l^2} \partial_t^2 p = -\rho_f \partial_t^2 \tau,$$

où  $\tau$  est le volume relatif de gaz dans le liquide<sup>2</sup>. La translation de la bulle est supposée

2. Ici, Zavtrak ne considère pas les bulles individuellement mais le milieu effectif constitué par le liquide

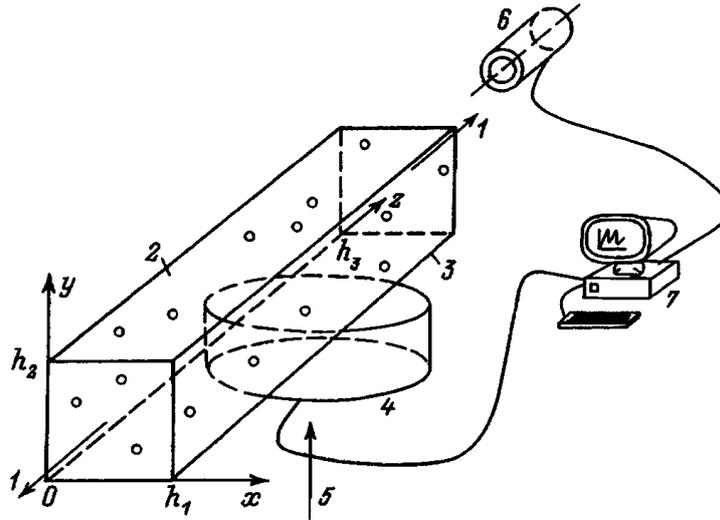


FIGURE I.13 – Dispositif théorique imaginé par Zavtrak pour faire un SASER à bulles. Figure extraite de [Zavtrak et Volkov, 1997].

être due principalement à la force de Bjerknes primaire (c'est la force de radiation agissant sur la bulle du fait de la présence de l'onde primaire) et la force de traînée. La force de Bjerknes secondaire tenant compte de l'interaction acoustique entre les bulles est quant à elle négligée. En faisant l'hypothèse que les bulles sont initialement réparties de façon homogène dans la cavité, et en regardant ce que donne une petite variation par rapport à cet état initial, Zavtrak montre qu'au-delà d'une pression acoustique seuil, une onde va être amplifiée dans la direction perpendiculaire à la propagation de l'onde incidente (dans la direction  $e_z$  de la figure I.13), avec un léger décalage fréquentiel de l'onde ( $\Delta\omega = \omega'$ ) par rapport à l'onde incidente. Cette pression seuil a pour expression :

$$P_{seuil} \simeq c_f \sqrt{\eta \rho_f \delta |\omega'|},$$

où  $\delta$  est la constante d'absorption de la bulle,  $c_l$  la vitesse de l'onde acoustique dans le liquide,  $\eta$  et  $\rho_f$  la viscosité et la densité du liquide. Le décalage fréquentiel  $\omega'$  dépend essentiellement de la longueur de la cavité et de la quantité de bulles dans l'eau.

[Zavtrak et Volkov, 1997] montre que, quelle que soit la forme cylindrique ou cubique de la cavité résonante, que les bulles soient monodisperses ou non, l'amplification sonore est obtenue au-delà d'un seuil d'excitation qui est le même dans tous ces cas, à un seul facteur numérique près.

Le principe du SASER à bulles n'a jusqu'à présent jamais pu être expérimentalement prouvé, notamment du fait que la poussée d'Archimède empêche les bulles d'être réparties de façon homogène dans la cavité. Une solution serait de mettre des bulles dans un microcanal très large et très fin, dans lequel la poussée d'Archimède ne jouerait pas. On peut alors se demander si un tel phénomène d'amplification pourrait être observé.

## Objectifs de la thèse et son plan

Le confinement de microbulles dans un canal dont l'épaisseur est bien plus petite que sa largeur peut donc avoir un grand potentiel, autant pour ce qui est de générer du mélange dans des écoulements laminaires que pour créer des matériaux acoustiques aux propriétés super-absorbantes ou au contraire amplificatrices. Dans tous ces cas, le couplage acoustique des bulles est la clé pour obtenir des effets collectifs puissants.

L'objectif de cette thèse est de comprendre comment ce couplage acoustique peut se faire dans une géométrie microfluidique, et quels sont les effets de ce couplage. La suite de ce manuscrit se compose de quatre chapitres.

Dans le **chapitre II**, nous décrirons en détail le dispositif expérimental. La géométrie des microcanaux utilisée sera exposée dans une première partie. Nous expliquerons comment il est possible de fixer la position des bulles pour mieux les étudier. Dans la deuxième partie, nous discuterons les avantages et inconvénients des deux dispositifs d'excitation acoustique qui ont été imaginés, à savoir l'excitation in-situ à l'aide d'une lame de verre positionnée au plus près des bulles et l'excitation externe, où l'onde sonore est générée par un transducteur positionné loin des bulles. Enfin, la troisième partie sera consacrée à la méthode employée pour analyser les vidéos de pulsation des bulles.

Le **chapitre III** sera dédié à l'analyse et la compréhension de la vibration d'une bulle isolée dans ce microcanal. Dans un premier temps, nous montrerons que la déformation d'une telle bulle confinée sous ultrasons peut être considérée comme bidimensionnelle. Nous commenterons les courbes expérimentales de résonance de la bulle et les comparerons au modèle 2D, où la bulle est considérée comme cylindrique. Pour expliquer les différences obtenues entre expérience et théorie, nous introduirons dans un deuxième temps un nouveau modèle tenant compte de l'élasticité des murs du canal. Nous discuterons les différents termes d'amortissement intervenant dans notre géométrie. Nous montrerons alors que la bulle se comporte comme un réémetteur d'ondes acoustiques, et que ces ondes sont principalement des ondes de surface qui se propagent au niveau du mur du canal. Enfin, dans un troisième temps, nous regarderons ce qu'il se passe quand on excite les bulles à plus forte amplitude : des modes de surface paramétriques apparaissent sur le pourtour de la bulle. Ce sont ces modes que nous étudierons en détail. Nous chercherons à comprendre pourquoi ils apparaissent et quelles sont les conditions pour voir apparaître ces modes.

Le **chapitre IV** traitera de l'écoulement hydrodynamique qui se développe autour de ces bulles confinées. Nous nous attacherons d'abord à comprendre l'écoulement généré par la pulsation d'une bulle seule. Nous verrons que les tourbillons engendrés par cette pulsation d'une part se trouvent soit dans le plan soit dans la tranche du canal, et d'autre part qu'ils sont de faible portée. Pour créer des écoulement de plus grande portée, nous montrerons qu'il est nécessaire de combiner au moins deux modes non paramétriques. Pour cela, il est nécessaire d'avoir soit une deuxième bulle, soit un mur à proximité de la première bulle. Nous montrerons que le couplage des bulles via les ondes de surface a une importance sur la géométrie et sur le sens de l'écoulement généré. Nous expliquerons com-

ment retrouver les lignes de courant associées à ces interactions de modes et comparerons le modèle obtenu aux écoulements observés expérimentalement.

Pour terminer, le **chapitre V** sera consacré aux effets collectifs de bulles. Nous verrons dans une première partie que le couplage des bulles par les ondes de surface a comme conséquence directe une auto-organisation des bulles libres dans le microcanal. Celles-ci se mettent en réseau triangulaire ou carré, avec un pas de réseau dépendant essentiellement de la fréquence d'excitation et des propriétés élastiques du matériau constituant le microcanal. Nous montrerons également qu'il est possible d'ancrer les bulles sans pour autant les empêcher de se déplacer. Nous verrons que le pas du réseau de bulles ancrées est adaptable en faisant varier la fréquence d'excitation. Dans une deuxième partie, nous chercherons à identifier les conditions d'amplification de la pulsation dans un réseau de bulles ancrées. Nous essaierons de comprendre si une synchronisation de la pulsation des bulles est possible dans le cas d'un réseau triangulaire ou carré de bulles et enfin chercherons à voir si des bulles présentant un mode paramétrique se réorientent en interagissant avec leurs voisines.

# II. PRODUCTION, EXCITATION ET OBSERVATION DE MICROBULLES CONFINÉES

Ce chapitre contient une description du dispositif expérimental et des techniques d'analyse utilisées pour décrire la pulsation des bulles. Au cours de ce projet, deux dispositifs expérimentaux ont été considérés. Dans les deux cas, les bulles sont générées et observées dans une puce microfluidique. Le premier type de dispositif consiste à introduire du son au plus près des bulles, en insérant une lame de verre dans la puce pour relayer le son. Le deuxième consiste à immerger la puce dans une piscine d'eau où un transducteur, lui aussi immergé, vient exciter les bulles depuis l'extérieur du canal.

Nous décrivons dans un premier temps les puces microfluidiques utilisées, puis nous précisons les types d'excitation choisis, et enfin nous proposerons une méthode d'analyse des vibrations des bulles.

## 1 La puce microfluidique

### 1.1 Géométrie des microcanaux

Les microcanaux que nous avons utilisés sont composés de deux parties : une jonction en croix, appelée *flow-focusing*, qui permet de produire des bulles monodisperses, et un canal d'observation, où sont relarguées les bulles dans l'optique d'observer leur comportement sous ultrasons (voir figure II.1a).

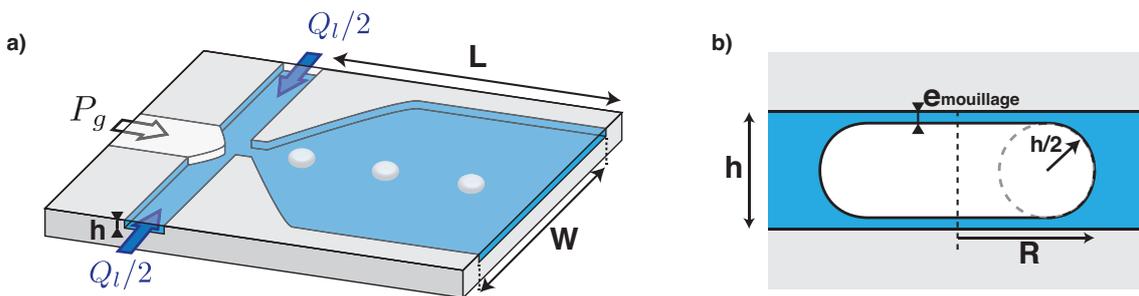


FIGURE II.1 – (a) Puce microfluidique avec le flow-focusing (à gauche) et le canal d'observation (à droite). (b) Vue en coupe de la bulle écrasée entre les deux murs du canal. Un film de mouillage d'épaisseur  $e_{mouillage}$  vient lubrifier la bulle tant que le liquide est en mouvement.

**Le flow-focusing** est l'une des techniques microfluidiques les plus utilisées pour générer des bulles monodisperses. Il s'agit d'une géométrie en forme de croix comportant une arrivée centrale de gaz, deux arrivées transverses de liquide de même débit et un

orifice de sortie. Le gaz et le liquide se rejoignent ainsi en amont de l'orifice au niveau de la jonction. Pour une certaine gamme de débit de liquide  $Q_l$  et de pression du gaz  $P_g$ , l'interface gaz/liquide va se déformer à cause du gradient de pression dans l'axe longitudinal, jusqu'à l'obtention d'une pointe. Cette pointe de gaz va alors rentrer dans l'orifice et le liquide va pincer le jet naissant à l'intérieur de l'orifice, provoquant la formation d'une bulle (figure II.2). Le rayon de la bulle dépend alors du rapport entre la pression du gaz et le débit de liquide [Garstecki *et al.*, 2004].

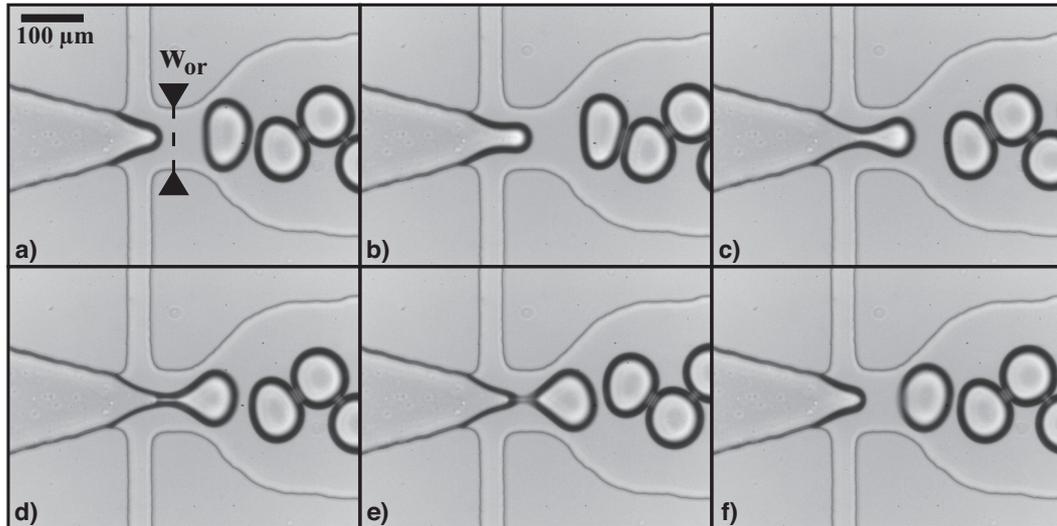


FIGURE II.2 – Formation d'une bulle dans la jonction en croix (flow-focusing) de notre puce<sup>1</sup> : le gradient de pression dans l'axe central va déformer l'interface gaz/liquide et une pointe va se former (a) puis rentrer dans l'orifice (b). A l'intérieur de l'orifice, la pointe va se faire pincer de part et d'autre par le liquide en restant 2D (c) puis le pincement va devenir 3D (d) et le fin filament va finalement se rompre (e) pour enfin donner naissance à une bulle (f). Figure inspirée par [Dollet *et al.*, 2008].

La monodispersité des bulles ainsi produites est caractérisée par l'indice de polydispersité, correspondant au ratio entre l'écart-type et la moyenne du rayon des bulles. D'après [Dollet *et al.*, 2008], l'indice de polydispersité diminue lorsque le rapport d'aspect de l'orifice  $w_{or}/h$  augmente, avec  $w_{or}$  la largeur de l'orifice et  $h$  sa hauteur.

Pour nos canaux, nous avons choisi un orifice de largeur  $w_{or} = 100 \mu\text{m}$ . La hauteur du canal a été prise entre  $h = 25$  et  $60 \mu\text{m}$ , suivant la gamme de rayon de bulle voulue et le confinement souhaité.

Le gaz utilisé ici est de l'azote. Il provient d'une bouteille sous pression à 200 bars (Air Liquide) à la sortie de laquelle se trouve un premier détendeur réglé à une pression de 0,5 bar puis à un deuxième détendeur permettant de contrôler plus finement la pression. La pression à l'entrée de la puce est mesurée à l'aide d'un capteur de pression (40PC, Honeywell) monté en parallèle. Les pressions utilisées sont comprises entre  $P_g = 0$  et 50 kPa. Le liquide quant à lui est un mélange d'eau déionisée et de 5% de tensio-actif (liquide vaisselle Dreet, Procter&Gamble). Celui-ci est injecté dans le canal à l'aide d'un pousse-seringue (11 Pico Plus, Harvard Apparatus). Les débits utilisés sont compris entre

1. Vidéo prise par les étudiants Erasmus Mundus lors de leur venue au laboratoire.

$Q_l = 50$  et  $300 \mu\text{L}/\text{min}$ .

Notons que cette technique de production de bulles nécessite que les murs du canal soient suffisamment hydrophiles pour que ni la pointe de gaz, ni la bulle ensuite formée ne puisse s'accrocher aux murs. C'est pourquoi les deux faces du canal ont été traitées au plasma d'oxygène avant fermeture du canal (voir l'annexe A). En outre, étant donnée la dimension de la jonction, des filtres ont été ajoutés au niveau des arrivées de liquide et de gaz pour éviter que des poussières ne se trouvent au niveau de la jonction en croix et ne gênent la formation de la bulle.

**Le canal d'observation** n'est autre que le canal de sortie du flow-focusing. Pour éviter les interactions entre la bulle générée et les parois du canal, de larges canaux ont été conçus, de longueur  $L = 23$  mm et de largeur  $W = 2$  mm. On se trouve donc dans une configuration de type Hele-Shaw, où l'une des dimensions est bien plus petite que les deux autres :  $h \ll L$  et  $h \ll W$ .

Les bulles générées ont un rayon généralement supérieur à la demie épaisseur du canal,  $R_0 > h/2$ . Elles se retrouvent par conséquent comprimées entre les parois inférieure et supérieure du canal (cf figure II.1b), et adoptent une forme dite de "*pancake*". Grâce à la présence de tensio-actif dans le liquide, un film de mouillage vient séparer la bulle de la paroi du canal. Tant que ce film existe, l'angle de contact de la bulle au niveau de ses bords est nul, ce qui impose que les bords de la bulle soient semi-circulaires, avec un rayon de courbure égal à la demie épaisseur du canal  $h/2^2$ . Ce film de lubrification sera d'autant plus épais que la vitesse du liquide autour de la bulle sera grande [Cantat, 2013].

D'autre part, comme  $h \ll W$ , les parois supérieures et inférieures du canal sont alors moins retenues et peuvent se bomber ou bien s'affaisser selon la pression régnant à l'intérieur du canal. Pour éviter la déformation du canal, il est possible soit d'ajouter des plots pour consolider la structure par en-dessous, soit d'inclure une lame de verre juste au-dessus du canal et la consolider par dessus. Le manque de tension dans la structure du canal n'est cependant pas forcément un problème dans notre cas, étant donné qu'il contribue à la flexibilité des parois, chose qui nous sera utile par la suite.

## 1.2 Piégeage des bulles

Une fois les bulles relâchées dans le canal d'observation, celles-ci sont advectées par le flux de liquide. Pour pouvoir observer le comportement des bulles sous ultrasons sur des temps longs, il faut donc être capable d'immobiliser une, voire plusieurs bulles.

Pour ce faire, nous avons utilisé le système d'ancrage capillaire développé par Abbyad *et al.* dans le cas de gouttes d'eau dans de l'huile [Abbyad *et al.*, 2011], mais qui est également applicable à des bulles, tant qu'un film de mouillage existe entre la bulle et les parois du canal.

Le principe est le suivant : à volume égal, une bulle écrasée entre les deux murs d'un canal a une aire plus importante qu'une bulle non confinée. Par conséquent, comme l'énergie de surface est proportionnelle à l'aire de la bulle, la bulle en forme de pancake

---

2. D'après [Dangla *et al.*, 2013], la forme d'équilibre de l'interface air/liquide loin des murs du canal est une surface à courbure moyenne constante : il s'agit donc plus exactement d'une surface de Delaunay, qui en première approximation donne cette forme semi-circulaire.

aura une énergie de surface supérieure à la bulle sphérique. Supposons maintenant qu'en un endroit du canal, la hauteur du canal augmente. Il peut par exemple s'agir d'un trou cylindrique dans une des parois du canal. Si la bulle en forme de pancake passe au-dessus ou en-dessous de ce trou, la surface de la bulle va se déformer au niveau du trou, donnant lieu à une calotte sphérique dans le cas où  $d/h \leq 2$ , ou à un remplissage du trou dans le cas  $d/h > 2$  [Dangla *et al.*, 2011],  $d$  étant le diamètre du trou (voir figure II.3a). Dans les deux cas, cela induit une diminution de l'énergie de surface et a pour effet de retenir la bulle là où le canal est le moins resserré.

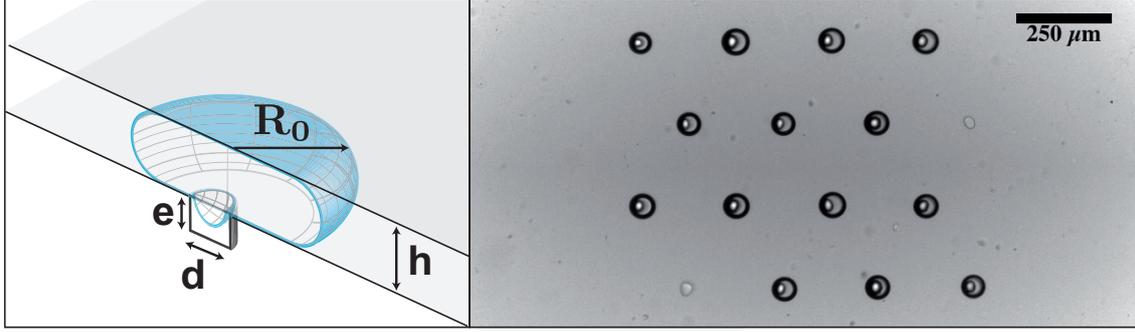


FIGURE II.3 – (a) Vue schématique d'une bulle de rayon  $R_0$  ancrée sur un trou de diamètre  $d$  et de profondeur  $e$ ; (b) Photo (vue de dessus) de bulles ancrées sur un réseau triangulaire de trous de pas  $D = 250 \mu\text{m}$ , pour un débit de liquide  $Q_l = 100 \mu\text{L}/\text{min}$ . Le contour des bulles apparaît en noir, tandis que les trous vides apparaissent en gris clair du fait de la faible différence d'indice de réfraction entre le PDMS et l'eau.

La bulle est également soumise à la force de traînée exercée par le liquide en mouvement. La force capillaire et la force de traînée vont donc entrer en compétition, et on peut montrer qu'au-delà d'un certain débit de liquide, la bulle va se détacher de son trou d'ancrage. Ce débit critique  $Q_c$  va dépendre à la fois du diamètre  $d$  du trou, de la hauteur  $h$  du canal et du rayon  $R_0$  de la bulle. On a plus précisément :

$$Q_c \propto \frac{\sigma h W}{\eta} \left( \frac{h}{R} \right)^2 S \left( \frac{d}{h} \right),$$

où  $S(x)$  est une fonction de  $x$  valable pour  $0 < x \leq 2$ , dont l'expression détaillée est :

$$S(x) = \frac{x}{2} - \frac{4}{3x} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right)^{3/2} \right].$$

$S(x)$  est une fonction positive et croissante. Ainsi, une augmentation du diamètre du trou conduira à une augmentation du débit critique  $Q_c$ .

Dans notre puce microfluidique, nous avons introduit des trous de diamètre  $d = 40 \mu\text{m}$  et de profondeur  $e = 40 \mu\text{m}$  au niveau du canal d'observation. La figure II.3b est une vue de dessus d'un réseau triangulaire de trous sur lesquels des bulles ont été piégées. Les trous apparaissent en clair, alors que la paroi des bulles apparait sombre. Pour que le mécanisme de piégeage fonctionne, il faut que le débit critique de dépiégeage  $Q_c$  soit

supérieur au débit permettant la production des bulles. C'est le cas pour la gamme de débits utilisée ici. Ainsi, il est possible d'immobiliser autant de bulles que l'on souhaite aux emplacements souhaités.

Dans la pratique, la concentration de bulles en sortie du flow-focusing est plus importante au centre du canal d'observation que sur les côtés. Ainsi, les trous situés au centre du canal sont les premiers à capturer des bulles. Pour que les trous situés sur les côtés puissent capturer une bulle, il faut que des bulles soient déviées sur les côtés. Cela peut se produire soit quand le taux de production des bulles est suffisamment important pour que les bulles se répartissent quasi-homogènement sur la largeur du canal, soit quand un dispositif de plots est mis en sortie du flow-focusing pour répartir les bulles uniformément selon la largeur du canal.

Concernant la fabrication du canal, la plaque de trous est assemblée par plasma  $O_2$  avec la plaque comportant le microcanal, de sorte à ce que les trous se situent au milieu du canal d'observation. Pour faciliter l'alignement des deux plaques, des petites encoches ont été ajoutées sur les bords des deux plaques. Le procédé complet de fabrication est décrit en annexe A.

## 2 Excitation acoustique et détection des modes de vibration

Dans notre géométrie confinée, il n'est pas évident de combiner à la fois une excitation acoustique des bulles et une détection acoustique et/ou optique de leur vibration. En effet, le canal doit rester horizontal pour éviter que la poussée d'Archimède ne rentre en jeu, ce qui contraint fortement le reste de notre système. Dans cette section, nous exposerons les deux dispositifs expérimentaux qui ont été envisagés, et nous discuterons leurs avantages et inconvénients.

### 2.1 Excitation in-situ à l'aide d'une lame de verre

Pour exciter une bulle de rayon quelques dizaines de microns, il faut d'après la formule de Minnaert (Eq. I.1) l'exciter à une fréquence de l'ordre de 100 kHz. Nous nous situons donc dans les proches ultrasons. A ces fréquences, une possibilité est d'utiliser une pastille piézoélectrique pour générer les ultrasons.

#### La pastille piézoélectrique et la lame de verre

Pour transmettre les ultrasons de la pastille au canal microfluidique, la pastille est collée à l'aide d'une colle époxy (Araldite) au bout d'une lame de verre encastrée dans le PDMS à environ  $150\ \mu\text{m}$  au-dessus du canal d'observation (voir figure II.4). Un signal électrique sinusoïdal est tout d'abord délivré par un générateur de fonction (AFG3102, Tektronik), puis ce signal est amplifié (7600M, Krohn Hite) avant d'être envoyé à la pastille piézo. La pastille convertit le signal électrique reçu en vibration mécanique, ce qui a pour effet d'exciter des ondes de Lamb (voir annexe B) au niveau de la surface de la lame. Ces ondes vont se réfléchir au niveau des bords de la lame, donnant naissance à des ondes stationnaires.<sup>3</sup>

A nos fréquences d'excitation, la vitesse des ondes de Lamb est d'environ 800 m/s dans le cas du verre [Rabaud et al., 2011]. La longueur d'onde dans la lame sera donc d'environ 8 mm pour une fréquence d'excitation  $f = 100\ \text{kHz}$ . Les lames de verre sont produites en découpant des lames de microscope d'épaisseur 1 mm à l'aide d'un diamant. Cette technique nous permet d'obtenir des lames de longueur variable, et de largeur allant de 2 à 4 mm. Ainsi, pour des fréquences d'excitation inférieures à 100 kHz, nous pourrions considérer que les ondes stationnaires de Lamb sont uni-dimensionnelles, étant donné que la largeur de la lame est inférieure à la demi-longueur d'onde de Lamb. En revanche, pour des fréquences plus élevées, il ne faudra pas oublier que, suivant la largeur de la lame, des ondes stationnaires peuvent également apparaître dans la direction transverse. Les ondes de Lamb vont ensuite se propager dans le PDMS jusque dans le canal et exciter les bulles qui s'y trouvent.

---

3. La lame de verre étant insérée avant moulage du PDMS, la transmission du son (mais aussi de la lumière) se fait correctement, sans ajout de gel couplant.

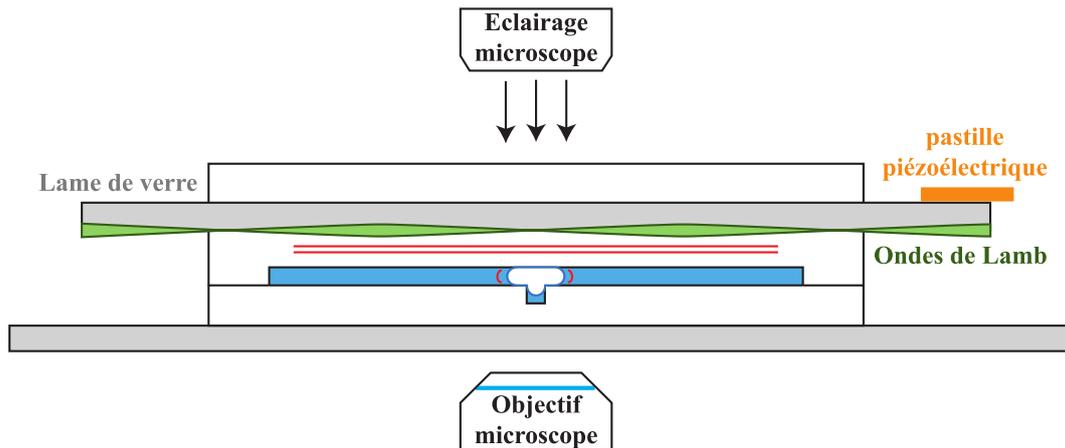


FIGURE II.4 – Schéma du dispositif expérimental (vue en coupe) avec excitation par l'intermédiaire d'une pastille piézoélectrique. La pastille piézo excite les modes de Lamb d'une lame de verre. La lame étant moulée dans le PDMS, l'onde ultrasonore se propage dans la fine couche de PDMS la séparant du canal et vient exciter la bulle préalablement ancrée sur un trou. La pulsation de la bulle sous ultrasons est observée à l'aide d'un microscope inversé.

### Observation de la vibration des bulles

Pour observer la vibration des bulles dans les microcanaux, ce dispositif est placé sous un microscope inversé (Olympus, modèle IX70) avec des objectifs  $\times 4$ ,  $\times 10$ ,  $\times 20$  et  $\times 40$  (une tirette placée sur le côté du microscope permet d'y ajouter un grossissement de  $\times 1,5$ ) et sur lequel a été monté une caméra rapide (Miro 4 ou Miro 310, Vision Research). Les fréquences de vibration des bulles considérées ici sont supérieures à 30 kHz. Ainsi, le temps d'exposition a été pris le plus petit possible pour pouvoir résoudre la forme de la bulle :  $T_{exp} = 2 \mu s$ . D'autre part, la fréquence maximale d'acquisition de la caméra ne permet pas de résoudre la pulsation d'une bulle tout en ayant une résolution suffisamment grande pour pouvoir visualiser tout le contour de la bulle. C'est pourquoi nous avons choisi de faire de la stroboscopie. Pour ce faire, nous envoyons à la pastille piézoélectrique un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{exc}$  légèrement supérieure à la fréquence  $f$  étudiée :  $f_{exc} = f + \Delta f$  avec  $\Delta f \ll f$ , et on déclenche l'acquisition de l'image par la caméra à une fréquence  $f_{strob}$ , où  $f_{strob}$  est un sous-multiple de  $f$  :  $f = N f_{strob}$  où  $N$  est un entier. Dans la pratique, nous avons dans la plupart des cas utilisé  $\Delta f = 5$  Hz et  $f_{strob} = 200$  Hz. Cela nous permet d'accéder à la pulsation de la bulle en régime permanent, à condition que la pulsation soit périodique.

### Ecouter le son des bulles

La faible hauteur du canal rend la mesure du champ acoustique à proximité de la bulle compliquée. Les hydrophones aiguilles dont nous disposons sont au minimum d'1 mm de diamètre, là où le canal est épais de quelques dizaines de microns. Pour récupérer le son émis par les bulles, il faudra donc imaginer un autre dispositif plus adapté.

### Visualisation des écoulements autour des bulles

Pour visualiser l'écoulement du liquide autour des bulles, nous avons ajouté des billes de polystyrène fluorescentes (Yellow-Green Fluoresbrite, Polysciences Inc.) dans le mélange liquide eau/tensio-actif. Plusieurs tailles de billes ont été utilisées :  $d_b = 2 \mu\text{m}$ ,  $3 \mu\text{m}$  et  $6 \mu\text{m}$ ,  $d_b$  étant le diamètre moyen des billes. Une lampe à mercure (Olympus, IX70) permet d'exciter les billes fluorescentes à travers l'objectif du microscope.

Pour savoir si nos billes sont de bons traceurs, on calcule le nombre de Stokes, qui représente le rapport entre l'énergie cinétique de la bille et l'énergie dissipée par frottement visqueux :

$$St = \frac{\rho_f d_b^2 U_c}{\eta L_c},$$

où  $U_c$  et  $L_c$  sont la vitesse et la distance caractéristiques de l'écoulement. Les écoulements qui nous intéressent ici sont tels que  $U_c \leq 1 \text{ cm/s}$  et  $L_c \geq 1 \mu\text{m}$ . On a donc :  $St \leq 0,4$ . Tant que le nombre de Stokes sera strictement inférieur à 0,5, on pourra considérer que nos traceurs suivent suffisamment bien l'écoulement. Ce sera le cas si les billes sont de petite taille ou que les écoulements ne sont pas trop intenses.

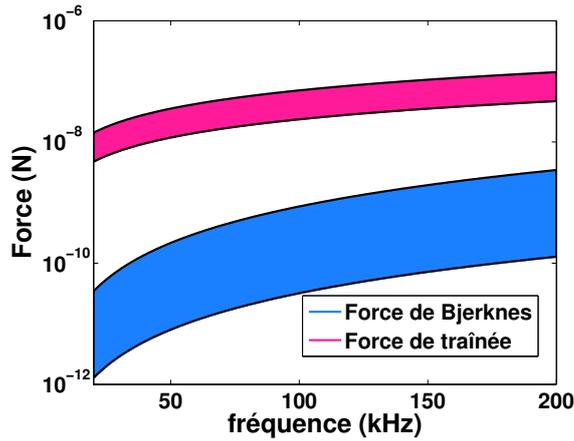


FIGURE II.5 – Force de Bjerknes secondaire et force de traînée exercées sur des billes de polystyrène ( $\rho_b = 1.05 \text{ g/cm}^3$ ) de diamètre compris entre  $d_b = 2$  et  $6 \mu\text{m}$ . Ces deux forces sont calculées dans le cas où la bille est contre la bulle :  $r = R_0 = 20 \mu\text{m}$ . C'est là que la force de Bjerknes secondaire est la plus forte. La vitesse dans le liquide y est estimée par  $U = A_0 \omega$ , avec  $A_0 = 1 \mu\text{m}$ .

La pulsation de la bulle va également générer une force de radiation sur les billes. Cette force est appelée force de Bjerknes secondaire. D'après [Rogers et Neild, 2011], elle s'exprime :

$$F_B = 4\pi\rho_f \frac{\rho_f - \rho_b}{\rho_f + 2\rho_b} \frac{R_0^4 R_b^3}{r^5} \omega^2 A_0^2,$$

où  $r$  est la distance séparant la bille de la bulle,  $\rho_b$  la densité des billes,  $R_b$  leur rayon moyen et  $A_0$  l'amplitude de vibration de la bulle, généralement de l'ordre du micron. Cette force agira sur les billes, sauf si elle est dominée par la force de traînée :  $F_D = 6\pi\eta U R_b$ . Nous avons tracé sur la figure II.5 la plage de valeurs obtenues pour ces deux forces en fonction de la fréquence d'excitation de la bulle, pour des billes de diamètre compris entre  $d_b = 2$  et  $6 \mu\text{m}$ , à proximité de la paroi d'une bulle de rayon  $R_0 = 20 \mu\text{m}$  : la force de

Bjerknes s'appliquant sur les billes est au moins deux ordres de grandeur plus faible que la force de traînée. On pourra donc la négliger.

On pourra donc considérer que les billes sont de bons traceurs. Cependant, comme les lignes de courant ont tendance à se resserrer à proximité de la bulle, la bille ne pourra pas forcément continuer à suivre sa ligne de courant, notamment si son rayon est plus gros que la distance séparant la paroi de la bulle et la ligne de courant de la bille [Wang *et al.*, 2011]. Ainsi, si la bille est trop grosse, on pourra voir passer la bille d'une ligne de courant à une autre lorsqu'elle longera la paroi de la bulle.

### Avantages et inconvénients du dispositif

Le spectre fréquentiel d'une pastille piézoélectrique est une succession de pics de résonance à des fréquences comprises entre 30 et 200 kHz. Ce dispositif permet ainsi d'avoir de fortes amplitudes d'excitation au niveau des bulles grâce aux fortes résonances de la pastille combinées à l'intensité des ondes stationnaires. On peut ainsi atteindre des amplitudes d'excitation allant jusqu'à plus d'1 bar, tout en gardant la visibilité sur les bulles, puisque la lame de verre est transparente.

En revanche, le spectre fréquentiel du dispositif d'excitation n'est pas continu, ce qui empêche de travailler à toutes les fréquences voulues. D'autre part, des réflexions multiples peuvent avoir lieu dans la puce microfluidique. Ainsi, si la pastille piézoélectrique est alimentée par un signal sinusoïdal continu, l'onde qui va arriver au niveau de la bulle sera le fruit de multiples interférences. Si l'on fait varier la fréquence d'excitation, d'une part les ventres et noeuds de l'onde de Lamb stationnaire dans la lame vont se déplacer, d'autre part les interférences vont aussi modifier la carte du champ acoustique. Ainsi, avec ce dispositif, il n'est pas possible de faire varier la fréquence à position fixée dans le canal sans changer les conditions d'amplitude et de phase de l'excitation.

Pour conclure, ce dispositif est idéal pour étudier la pulsation des bulles excitées avec de fortes amplitudes, mais l'amplitude et la phase de l'excitation primaire ne sont pas suffisamment bien contrôlées en position. Par conséquent, on ne pourra pas faire de balayage en fréquence, mais il sera possible d'étudier le comportement de la bulle à fréquence fixée en faisant varier son rayon. D'autre part, ce système sera adéquat pour étudier l'écoulement autour des bulles.

### 2.2 Excitation externe dans une piscine

Pour pouvoir balayer le système en fréquence, il faut que le dispositif d'excitation ait un spectre fréquentiel continu. Pour cela, nous avons utilisé un transducteur à immersion (The Ultran Group) fonctionnant aux fréquences d'excitation voulues. La membrane du transducteur est immergée dans une piscine cylindrique en plexiglas dans laquelle on a placé la puce microfluidique (voir figure II.6). L'étanchéité a été réalisée à l'aide d'un joint silicone. Une bande de téflon a été enroulée autour d'un cache en plastique, le tout servant à ne laisser passer les ultrasons qu'au niveau des bulles.

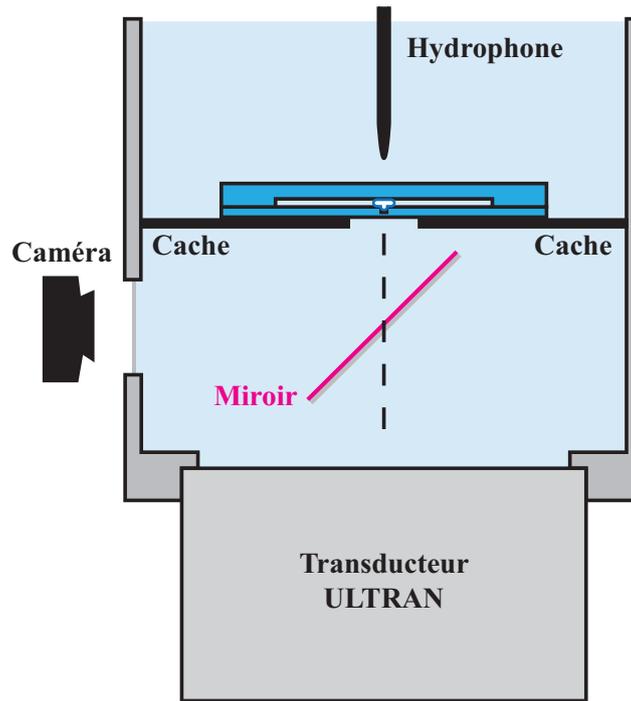


FIGURE II.6 – Schéma du dispositif expérimental (vue en coupe) avec excitation par l'intermédiaire d'un transducteur, la puce microfluidique étant immergée dans une piscine d'eau cylindrique.

### Le transducteur

Le spectre fréquentiel des transducteurs Ultran à notre disposition sont lisses et continus, contrairement à celui de la pastille, ce qui permet le balayage fréquentiel de notre système. Nous disposons de transducteurs centrés en  $f_{trans} = 50$  et  $100$  kHz et de largeur spectrale environ égale à 50% de la fréquence centrale. Le diamètre de ces transducteurs est comparable à la taille de la puce microfluidique. Pour que la puissance acoustique qui arrive au niveau du canal soit suffisante, il faut à la fois se placer au point focal du transducteur, mais aussi diminuer au maximum l'épaisseur de PDMS à traverser.

### Observation de la vibration des bulles

L'observation des bulles se faisant mieux par transmission que par réflexion de la lumière, nous avons choisi d'éclairer le système par le dessus de la piscine. La lumière traverse d'abord l'interface air/eau, puis la puce microfluidique. Elle est ensuite réfléchiée par une lamelle de microscope (d'épaisseur  $170 \mu\text{m}$ ) disposée avec un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale et sur laquelle a été déposée une fine couche d'aluminium. Cette lame de verre doit être suffisamment fine pour laisser passer une grande partie des ultrasons. La lumière passe enfin à travers une fenêtre en verre, positionnée au même niveau que le miroir, ce qui nous permet d'observer la puce depuis l'extérieur de la piscine à l'aide d'une caméra montée sur un rail horizontal.

### Ecouter le son des bulles

Pour étudier le champ acoustique transmis par un réseau de bulles, nous avons placé un hydrophone (ONDA) au-dessus du canal (voir figure II.6). L'onde sonore émise par le transducteur peut se réfléchir sur les parois de la piscine, ce qui conduit alors à des échos. Pour éviter ces échos, nous avons choisi d'envoyer des pulses gaussiens, de forme :

$$s(t) = s_{ac} \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}\right) \cos(2\pi f_{ac}(t-t_0)).$$

Cette fonction  $s(t)$  a une largeur temporelle d'environ  $3\sigma$ , et sa transformée de Fourier est une gaussienne centrée en  $f_{ac}$  et de largeur spectrale  $1/\sigma$ . Cela permet donc de contrôler la répartition fréquentielle de l'énergie émise.

Pour s'affranchir des fonctions de transfert  $H_{hydro}$  de l'hydrophone,  $H_{pisc}$  de la piscine, et  $H_{hydro}$  de l'hydrophone et  $H_{trans}$  du transducteur, l'expérience est menée une première fois en absence de bulle, et une seconde fois en présence de bulles. On notera  $V_{hydro}^0$  le signal fourni par l'hydrophone en l'absence de bulles dans le canal, et  $V_{hydro}$  celui obtenu en présence de bulles. A condition que les échos dans la piscine soient négligeables, leur transformée de Fourier peut s'écrire :

$$\bar{V}_{hydro}^0(\omega) = H_{hydro}(\omega) \cdot H_{pisc}(\omega) \cdot H_{syst}(\omega) \cdot H_{trans}(\omega) \cdot \bar{V}_{trans}(\omega),$$

et

$$\bar{V}_{hydro}(\omega) = H_{hydro}(\omega) \cdot H_{pisc}(\omega) \cdot H_{syst+bulles}(\omega) \cdot H_{trans}(\omega) \cdot \bar{V}_{trans}(\omega),$$

où  $\bar{V}_{trans}(\omega)$  est la transformée de Fourier du signal envoyé au transducteur et  $H_{syst}$  est la fonction de transfert de la puce microfluidique sans bulle à l'intérieur,  $H_{syst+bulle}$  en présence de bulles. On peut alors définir la fonction de transmission  $\bar{T}$  du réseau de bulles :

$$\bar{T}(\omega) = \frac{\bar{V}_{hydro}(\omega)}{\bar{V}_{hydro}^0(\omega)} = \frac{H_{syst+bulle}(\omega)}{H_{syst}(\omega)}$$

En supposant que la contribution du canal en PDMS peut être négligée, cette fonction de transmission correspond alors à la transmission du son à travers un réseau de bulles 1D.

### Avantages et inconvénients du dispositif

Ce dispositif permet donc d'avoir accès au balayage fréquentiel, étant donnée la large bande passante des transducteurs à immersion. En revanche, l'intensité acoustique sera modérée au niveau des bulles, étant donnée la forte absorption acoustique du PDMS, l'absence a priori d'onde stationnaire et la grande distance entre le transducteur et les bulles. D'autre part, ce système permet de faire des expériences de transmission acoustique, tout en gardant un oeil sur la vibration des bulles.

### 2.3 Choix du dispositif

En conclusion, il faudra donc, suivant l'expérience menée, trouver le bon compromis entre avoir de la puissance acoustique mais un spectre fréquentiel piqué et avoir moins de puissance acoustique mais un spectre fréquentiel large et continu.

Pour ce qui est de l'étude de la vibration de la bulle confinée, nous chercherons à accéder à de fortes amplitudes d'excitation. Enfin, pour étudier l'écoulement autour de la bulle, il nous faudra utiliser le microscope pour voir les billes en épifluorescence. Ainsi, dans ces deux cas, le dispositif d'excitation in-situ sera privilégié.

Pour ce qui est de l'étude des effets collectifs, le dispositif d'excitation externe sera plus adapté étant donné qu'il permet a priori d'avoir accès au champ acoustique transmis par les bulles. Cependant, ce dispositif expérimental est toujours en voie de développement. Seuls des essais préliminaires ont été réalisés, ce qui explique que nous ne montrions pas de résultat associé à ce dispositif dans ce manuscrit. Le dispositif d'excitation in-situ nous permettra cependant de faire une première exploration des paramètres en vue d'effets collectifs à grand nombre de bulles.

### 3 Analyse d'images : la bulle sous toutes ses coutures

Dans cette section, nous allons chercher à décrire le contour de la bulle avec le minimum de paramètres possibles. Pour ce faire, nous allons décomposer ce contour en série de Fourier et chercher à déterminer l'amplitude, la phase et l'orientation des différents modes de vibration de la bulle.

#### Paramètres décrivant le contour d'une bulle à un instant donné

A un instant  $t_0$  donné, le contour extérieur d'une bulle peut être repéré par ses coordonnées polaires  $\{\rho(\theta, t_0), \theta\}$ . Ici,  $\rho(\theta, t_0)$  désigne la distance entre le centre de la bulle à l'instant  $t_0$  d'une part et la position du contour à l'angle  $\theta$  d'autre part, la référence des angles étant prise suivant l'axe (Ox), comme indiqué sur la figure II.7a.

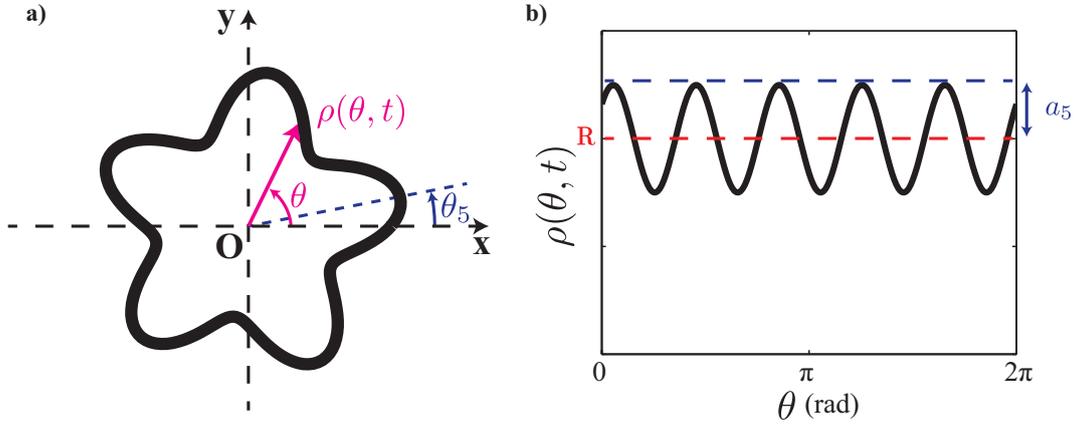


FIGURE II.7 – (a) Schéma montrant un contour  $\rho(\theta, t_0) = R + a_5 \cos(5(\theta - \theta_5))$ , avec  $a_5 = 0,25.R$ . (b) Dépliage angulaire de ce même contour  $\rho(\theta, t_0)$  en fonction de l'angle  $\theta$ .

La bulle étant un contour fermé,  $\rho$  est par conséquent une fonction  $2\pi$ -périodique de  $\theta$ . De plus,  $\rho$  est continûment dérivable sur  $\theta \in [0; 2\pi]$ . D'après le théorème de Dirichlet, la fonction  $\rho(\theta, t_0)$  est donc décomposable en série de Fourier suivant  $\theta$  :

$$\rho(\theta, t_0) = R(t_0) + \sum_{n \geq 1} a_n(t_0) \cos(n\theta + \psi_n(t_0)). \quad (\text{II.1})$$

Dans cette décomposition,  $R(t_0)$  désigne le rayon moyen instantané de la bulle à l'instant  $t_0$ . Les termes présents dans la somme sont appelés *modes de surface*, l'ordre du mode étant donné par l'entier  $n$ . Il s'agit de modes de déformation de la bulle présentant un axe de symétrie d'ordre  $n$ . L'amplitude du mode  $n$  à l'instant  $t_0$  est notée  $a_n(t_0)$  et sa phase spatiale,  $\psi_n(t_0)$ . A partir de la phase spatiale, on peut déduire l'orientation du mode :  $\theta_n = -\psi_n/n$ , qui correspond à l'angle du pic du mode le plus proche de l'axe (Ox).

La figure II.7a donne une représentation schématique d'un mode de surface  $n = 5$  pour une amplitude de mode égale à  $R/4$  et une orientation du mode  $\theta_5 = 10^\circ$ . L'ordre du mode détermine l'ordre de la symétrie et donc le nombre de pics présents sur le périmètre de

la bulle. Ainsi un mode  $n = 5$  donnera une forme d'étoile de mer à 5 branches. Sur la figure II.7b, on a tracé la fonction  $\rho(\theta, t_0)$  en fonction de  $\theta$ . On y retrouve l'amplitude et la phase spatiale du mode 5.

### Paramètres décrivant l'évolution temporelle du contour de la bulle

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution temporelle de ces différents modes de vibration. Dans l'équation II.1, trois termes sont susceptibles d'évoluer avec le temps : le rayon instantané  $R$ , l'amplitude  $a_n$  des modes et enfin leur phase spatiale  $\psi_n$ . Une décomposition en série de Fourier du contour à chaque instant  $t_0$  permet de récupérer leur évolution temporelle. Une transformée de Fourier nous permet alors de connaître le spectre fréquentiel de chaque mode de vibration.

Lorsqu'une bulle est excitée acoustiquement, deux termes vont généralement dominer. On aura essentiellement une composante continue à laquelle va s'ajouter une composante à la fréquence fondamentale du mode, la seconde harmonique étant moins marquée. Dans le cas où seules ces deux termes dominent, on pourra écrire pour le rayon instantané :

$$R(t) = R_0 + A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Autrement dit, le rayon instantané  $R$  peut dans ce cas être décrit comme la somme du rayon moyen  $R_0$  de la bulle et d'un rayon oscillant d'amplitude  $A_0$  et de pulsation  $\omega_0$ , correspondant à une vibration isotrope, que l'on nommera dans la suite *vibration monopole* ou *mode de respiration*.

Dans le cas des modes de surface, on distinguera également la partie continue de la partie oscillant à la fréquence fondamentale :

$$\rho(\theta, t) = R_0 + A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \sum_{n \geq 1} \left[ \bar{A}_n \cos(n\theta + \bar{\psi}_n) + A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \cos(n\theta + \psi_n) \right],$$

où  $\bar{A}_n$  et  $\bar{\psi}_n$  sont l'amplitude et la phase spatiale de la composante continue du mode  $n$ , et  $A_n$  et  $\psi_n$  celles de la composante oscillant à la pulsation fondamentale  $\omega_n$  du mode  $n$ .

En conclusion, chaque contour de bulle sera décrit par une série de paramètres qui sont : le rayon moyen  $R_0$ , l'amplitude  $A_n$  des modes de vibration, les phases temporelle  $\phi_n$  et spatiale  $\psi_n$  des différents modes. L'obtention numérique de ces paramètres est détaillée en annexe C.

### La particularité du mode de translation

Le mode  $n = 1$  est particulier puisqu'il s'agit d'un mode de translation. Tant que son amplitude reste petite devant  $R_0$ , il se traduit par le déplacement d'un cercle de rayon  $R_0$  de part et d'autre de l'origine (voir figure II.8b).

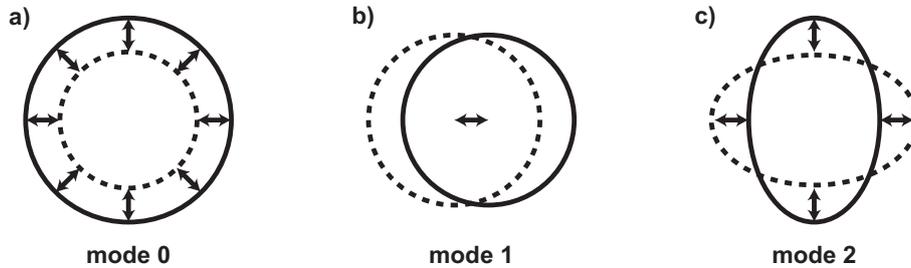


FIGURE II.8 – Schéma de la vibration d'un mode (a)  $n = 0$ , (b)  $n = 1$  et (c)  $n = 2$ . Seul le mode  $n = 1$  a son centre qui bouge au cours du temps.

Pour pouvoir le détecter, il faut veiller à prendre comme référentiel le barycentre de la bulle au cours d'une période de vibration du mode  $n = 1$ . L'amplitude du mode de translation pouvant être très faible (de l'ordre du  $\mu\text{m}$ ), il est donc nécessaire de prendre un objectif de microscope plus fort (typiquement un objectif x40) pour pouvoir résoudre cette vibration et diminuer l'incertitude sur la position de l'origine.



# III. VIBRATION D'UNE BULLE CYLINDRIQUE CONFINÉE

---

Avant de parler de couplage, nous allons tout d'abord chercher à comprendre comment une bulle confinée dans un microcanal réagit aux ultrasons. Pour des amplitudes d'excitation modérées, deux classes de vibration prennent le dessus : la bulle commence par exhiber une vibration axisymétrique, appelée "*vibration monopole*" ou "*mode respiratoire*", aux faibles amplitudes d'excitation, à laquelle s'ajoutent des vibrations en forme d'étoiles, appelées "*modes de surface*", aux plus fortes amplitudes.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la pulsation monopole de la bulle confinée. La première partie sera dédiée à l'étude expérimentale de cette vibration. Nous verrons que la déformation de la bulle se fait principalement dans le plan du canal. Nous chercherons à expliquer les différences observées par rapport à la pulsation de la bulle sphérique, et introduirons un modèle de vibration 2D simple. Nous verrons que ce modèle n'explique pas tout à fait les résultats expérimentaux. Dans une deuxième partie, nous compléterons donc ce modèle en y ajoutant la déformation des murs du canal en PDMS. Nous détaillerons alors les différents termes d'amortissement afin de déterminer lesquels dominant à notre échelle. Enfin, la troisième partie sera consacrée à une étude expérimentale et théorique des modes de surface. Nous chercherons à déterminer le domaine d'existence de chaque mode et le seuil de pression acoustique externe à partir de laquelle les différents modes apparaissent.<sup>1</sup>

## 1 Vibration d'une bulle "cylindrique"

Dans cette partie, nous allons tout d'abord chercher à montrer que la bulle se déforme essentiellement dans le plan du canal. Nous dirons que la bulle est quasi-2D, ou "cylindrique", du fait de sa symétrie axiale. Nous verrons ensuite comment l'équation de Rayleigh-Plesset se trouve modifiée dans cette dimension.

### 1.1 Ancrage de la bulle aux murs et dimension de la déformation

Les bulles que nous étudions ici sont des bulles écrasées entre les murs supérieur et inférieur d'un canal. Nous avons vu dans la partie II.1 que tant que le liquide environnant la bulle est en mouvement, un film de mouillage existe entre le mur du canal et la paroi de la bulle. La figure III.1a montre une photo d'une telle bulle prise sous microscope inversé. L'éclairage de la bulle se faisant par transmission, toute interface courbée de la bulle apparaît en noir sur l'image. C'est pourquoi on observe une bande sombre au

---

1. Les résultats présentés dans cette partie sont réunis dans l'article intitulé "Acoustic pulsation of a microbubble confined between elastic walls" actuellement en cours de révision.

niveau du pourtour de la bulle, de largeur légèrement inférieure à la demie hauteur du canal. Lorsqu'on excite la bulle avec des ultrasons, cette bande sombre se déplace en bloc (figure III.1a, droite). Nous en déduisons que le film de mouillage présent entre la bulle et le mur du canal résiste à la pression de la bulle. Le liquide présent dans le film de mouillage étant supposé incompressible, tout se passe comme si la bulle appuyait directement sur la paroi du canal. Celle-ci étant en PDMS, elle a une résistance à la pression bien plus importante que le liquide. C'est pourquoi on peut considérer que la déformation de la bulle se fait principalement dans le plan du canal et est donc "*quasi-2D*".

Cependant, pour des amplitudes d'excitation ultrasonore proches du bar, on voit apparaître des disques sombres sur la partie plane de la paroi de la bulle, suggérant une rupture du film de mouillage entraînant la formation de gouttelettes à la surface du mur de PDMS (voir figure III.1b). Dans cette configuration-ci, la bulle est ancrée aux murs du canal : il existe donc un angle de contact non nul entre la bulle et le mur du canal. La vibration de la bulle sous ultrasons montre alors un déplacement maximal de la paroi de la bulle au niveau de la mi-hauteur du canal, la ligne de contact avec le PDMS restant ancrée (figure III.1b, droite). La paroi de la bulle n'est donc pas uniformément mise en mouvement. Au contraire, on a un gradient de vitesse dans la tranche du canal. La déformation de la bulle est alors 3D.

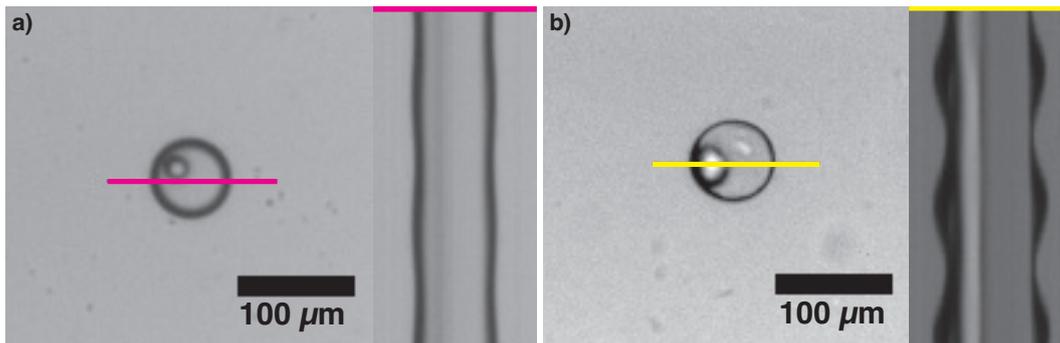


FIGURE III.1 – (a) Photo (à gauche) d'une bulle non ancrée sur les murs du canal avec l'évolution (à droite) d'une coupe de la bulle avec le temps, montrant un déplacement en bloc de la paroi de la bulle. Le diamètre du trou d'ancrage vaut  $d = 25 \mu\text{m}$ . (b) Photo (à gauche) d'une bulle ancrée sur les murs du canal avec l'évolution (à droite) d'une coupe de la bulle avec le temps, montrant l'ancrage à la paroi. Cette situation apparaît aux très fortes amplitudes d'excitation. Le diamètre du trou d'ancrage vaut  $d = 35 \mu\text{m}$ .

Si maintenant on regarde ce qu'il se passe au niveau du trou, deux cas sont possibles : soit le gaz entre entièrement dans le trou, soit il y entre partiellement, l'interface gaz/liquide formant une calotte sphérique. Dans les deux cas, on se retrouve avec du liquide extrêmement confiné, comparé à ce qu'il se passe dans le plan du canal. La résistance dans le trou étant supérieure à celle dans le canal, l'interface gaz/liquide ne vibrera pas dans le trou en présence d'ultrasons. C'est en effet ce que l'on observe si l'on zoome sur le trou. La zone sombre due à la courbure de la calotte n'est pas déformée lors de l'excitation acoustique.

Dans toute la suite, nous considérerons des bulles pour lesquelles le film de mouillage

subsiste lorsque la bulle est soumise aux ultrasons. Ainsi, la déformation de la bulle sera considérée comme bidimensionnelle, se faisant essentiellement dans le plan du canal. Nous allons maintenant voir comment la vibration de la bulle peut être décrite dans cette dimension  $N = 2$ .

## 1.2 La résonance de Minnaert en 2D

Dans la partie 1.1, nous avons introduit l'équation d'évolution du rayon de la bulle (Rayleigh-Plesset) pour une bulle sphérique. Or nous avons vu dans la section précédente que la déformation de la bulle pouvait être considérée en première approximation comme 2D. Comment l'équation de Rayleigh-Plesset est-elle alors modifiée en supprimant une dimension du problème ? [Prosperetti, 2004] décrit la pulsation d'une bulle quel que soit la dimension  $N$  de la déformation de la bulle. Reprenons ce développement dans le cas  $N = 2$ .

Considérons l'anneau de liquide allant de la paroi de la bulle jusqu'à une distance  $r$  du centre de la bulle, et notons  $\mathbf{v} = U_r(r)\mathbf{e}_r$  la vitesse du liquide à cette distance. La conservation de la masse s'écrit alors :

$$rU_r(r) = R\dot{R}$$

Le potentiel des vitesses  $\phi$  est défini par  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ . Il s'écrit donc :

$$\phi = R\dot{R}\ln r$$

Si on suppose que l'écoulement est incompressible et irrotationnel, on peut alors écrire l'équation de Bernoulli :

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho U_r^2 + p = \text{cst},$$

où  $p$  est la pression dans le liquide à la distance  $r$ .

Sachant que  $\phi$  est proportionnel à  $\ln r$ , l'équation de Bernoulli n'est pas intégrable entre  $R$  et l'infini. Prosperetti introduit alors une distance de coupure  $S$  correspondant à la distance pour laquelle on a  $p = p_\infty$ .

L'expression de  $p$  au niveau de la paroi de la bulle nous est donnée par l'équation de Laplace :

$$p = p_{g,0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\gamma} - \sigma\kappa.$$

où  $\kappa = 1/R + 2/h$  est la courbure de la bulle. En intégrant l'équation de Bernoulli entre  $r = R_0$  et  $r = S$ , on obtient alors l'équation de Rayleigh-Plesset 2D :

$$\rho_f(R\ddot{R} + \dot{R}^2)\ln\left(\frac{S}{R}\right) - \frac{1}{2}\rho_f\dot{R}^2 - p_{g,0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2\gamma} + \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{h}\right) = -p_\infty \quad (\text{III.1})$$

Tout comme dans le cas tridimensionnel, on peut linéariser cette équation en posant  $R = R_0(1 + X)$  et en ne gardant que les termes du premier ordre. Au repos, lorsque  $R = R_0$ , l'équation de Laplace nous donne également :  $p_{g,0} = p_0 + \sigma\kappa$ , où  $p_0$  est la pression dans le liquide en l'absence de son. On obtient alors :

$$\rho_f R_0^2 \ln\left(\frac{S}{R_0}\right) \ddot{X} + \left[2\gamma\left(p_0 + \sigma\left(\frac{1}{R_0} + \frac{2}{h}\right)\right) - \frac{\sigma}{R_0}\right] X = -p_\infty + p_0 \quad (\text{III.2})$$

Pour des canaux d'épaisseur supérieure à  $10 \mu\text{m}$ , les termes de tension superficielle sont négligeables devant  $p_0$ . On obtient alors avec ce modèle une fréquence de Minnaert 2D :

$$f_M^{(2D)} = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_f \ln\left(\frac{S}{R_0}\right)}}$$

On n'a alors plus une relation simple entre la fréquence propre de la bulle et son rayon, comme dans le cas 3D.

Le problème qui se pose à présent est de définir le paramètre  $S$ . Sachant que le canal s'apparente à une cellule de Hele-Shaw infinie, il est difficile de se représenter ce que pourrait être ce paramètre. Pour en avoir une idée, regardons ce que cela donne dans notre système.

### 1.3 Etude expérimentale de la vibration monopole

Dans la littérature, les expériences permettant de déterminer l'amplitude et la phase du mode de respiration  $n = 0$  sont habituellement faites à rayon de bulle fixé en faisant varier la fréquence d'excitation. Dans notre dispositif expérimental avec lame de verre intégrée, nous avons vu que les résonances de la pastille piézoélectrique et de la lame de verre ne permettaient pas d'exciter les bulles en variant continûment la fréquence. En revanche, en se plaçant à fréquence d'excitation fixe et en faisant varier le rayon, il est possible de contourner ce problème et de finalement retrouver la réponse de la bulle. C'est ce que nous avons fait ici. La position de la bulle étant fixée à l'aide du trou d'ancrage, l'amplitude et la phase de l'onde excitatrice est supposée rester constante lorsque le rayon de la bulle varie. Elles ne se trouveront modifiées que lorsque l'on changera la fréquence d'excitation de la bulle.

Le signal envoyé au piézoélectrique est une succession de signaux sinusoïdaux de durée  $t_{burst} = 850 \text{ ms}$  et répétés à une fréquence de 1 Hz. La diffusion du gaz dans la bulle permet une croissance lente du rayon de la bulle, la vitesse de croissance étant comprise entre 0,1 et  $1 \mu\text{m/s}$ , ce qui nous permet de balayer différents rayons au cours d'une même acquisition. Pour chaque séquence de signal, le rayon moyen  $R_0$  de la bulle a été mesuré. Par le procédé d'analyse vu précédemment, on a accès à l'amplitude  $A_0$  et la phase  $\phi_0$  de la bulle. L'expérience a été réalisée à trois fréquences différentes  $f = 30 \text{ kHz}$ ,  $40 \text{ kHz}$  et  $50 \text{ kHz}$ . Les trois expériences étant faites dans les mêmes conditions de confinement (même canal et même position dans le canal), les trois courbes devraient se superposer suivant une courbe maîtresse. Mais comme l'amplitude et la phase d'excitation ne sont pas les mêmes suivant la fréquence d'excitation de la pastille piezo, les trois courbes ne se superposent pas. Pour obtenir une courbe maîtresse, il nous faut donc choisir des valeurs de référence  $A_{ref}$  et  $\phi_{ref}$  pour obtenir une superposition. Les trois fréquences étant proches de la fréquence de résonance de la bulle, nous avons pris pour  $A_{ref}$  l'amplitude maximale obtenue à la fréquence donnée, soit  $A_0^{max}$ . La phase de référence a quant à elle été choisie

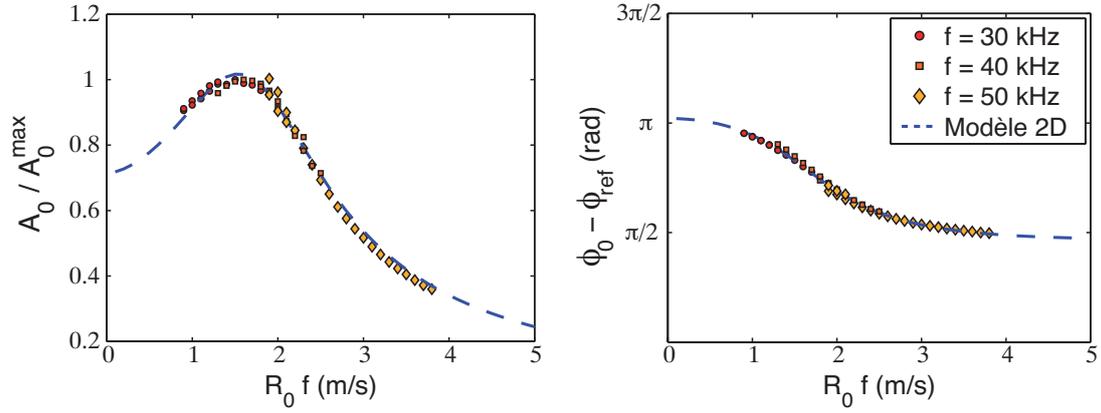


FIGURE III.2 – Vibration monopole : amplitude adimensionnée  $A_0/A_0^{max}$  (a) et phase temporelle  $\phi_0 - \phi_{ref}$  (b) du mode 0 à trois fréquences différentes :  $f = 30, 40$  and  $50$  kHz. Pour chacune de ces fréquences, une gamme de rayons compris entre  $R_0 = 30$  et  $65 \mu\text{m}$  a été explorée. Une courbe maîtresse est obtenue en prenant le produit  $R_0 f$  comme abscisse. La courbe a été ajustée avec le modèle 2D (équation III.15) tenant compte de la déformation du PDMS (trait interrompu) et donne accès à la vitesse des ondes de Rayleigh :  $c_R = 40$  m/s.

pour avoir une superposition des trois courbes au niveau des zones de recouvrement. La courbe maîtresse obtenue est représentée figure III.2 en fonction du produit  $R_0 f$ .

La résonance de la bulle est obtenue en  $R_0 f = 1.5$  m/s, soit la moitié de ce que la théorie prévoit pour une bulle sphérique. D'autre part, la phase temporelle du mode 0 fait un saut de  $-\pi/2$  entre les bas et les hauts rayons, au lieu du saut de  $\pi$  prévu par le modèle 2D classique (voir équation III.2). Cela signifie qu'il existe un terme d'amortissement qui domine lorsque  $R_0 f$  est grand. Sachant qu'on a déjà un terme en  $(R_0 f)^2$  dans l'équation III.2 dû à la masse de liquide à mettre en mouvement, ce terme d'amortissement doit être d'ordre au moins 2 en  $R_0 f$ . Dans la partie suivante, nous allons chercher à comprendre comment on peut améliorer ce modèle pour se rapprocher des résultats expérimentaux.

## 2 Influence de la flexibilité des parois du canal

Nous avons vu dans la partie précédente que le modèle simple 2D ne suffisait pas pour décrire la pulsation monopole de la bulle. Entre autres choses, l'étude expérimentale nous montre qu'il existe un terme d'amortissement d'ordre supérieur à deux en  $R_0 f$ . Revenons aux termes d'amortissements introduits dans la partie 1.1. Dans le cas de la bulle sphérique, le seul terme d'ordre supérieur à 2 en  $\omega$  est le terme radiatif. Mais comment l'amortissement radiatif s'exprime-t-il dans notre cas ? Etant donnée la géométrie de la puce microfluidique, cet amortissement peut soit provenir d'une radiation 3D dans le PDMS, soit d'une radiation 2D dans l'eau, soit d'une radiation 2D à l'interface entre l'eau et le PDMS. Aux vues des observations faites par [Rabaud *et al.*, 2011] sur la mise en réseau de bulles confinées dans un microcanal sous champ acoustique, cette dernière pourrait bien prédominer. En effet, il a été montré que les bulles confinées interagissaient les unes avec les autres lorsqu'elles sont à suffisamment courte distance l'une de l'autre. La distance d'équilibre  $d_{eq}$  entre les bulles dépend alors de la fréquence d'excitation des bulles, donnant lieu à une vitesse caractéristique  $d_{eq} f \simeq 30$  m/s, attribuée aux ondes de Rayleigh générées par la bulle excitée. Le mécanisme imaginé est celui représenté figure III.3 : lorsque la bulle grossit, le liquide environnant est repoussé loin de la bulle et appuie sur les parois du canal de PDMS qui est légèrement déformable. Inversement, lorsque la bulle rétrécit, le liquide est aspiré près de la bulle et la paroi du canal se déforme dans l'autre sens. Cela a pour effet de générer une onde propagative en surface du PDMS, appelée onde de Rayleigh.

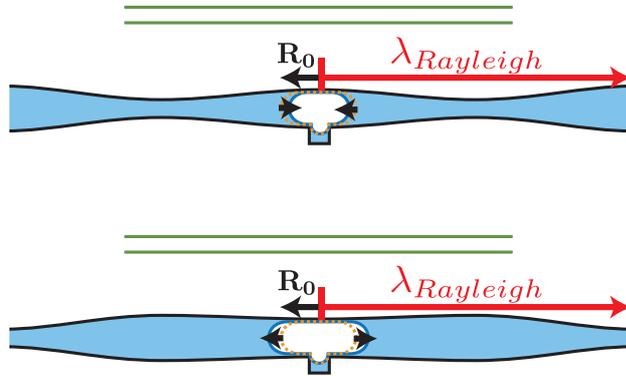


FIGURE III.3 – Représentation schématique de la pulsation d'une bulle confinée dans un canal microfluidique en PDMS : le champ extérieur (vert) vient exciter la bulle ; la pulsation de la bulle (flèches noires) induit des variations de pression dans le liquide qui vont à leur tour déformer les murs du canal, générant des ondes de Rayleigh à la surface du PDMS, avec une longueur d'onde  $\lambda_{Rayleigh}$  de l'ordre de quelques centaines de microns.

## 2.1 Modèle 2D avec flexibilité des murs du canal

Nous proposons dans cette partie d'intégrer l'élasticité des parois du canal dans le modèle 2D vu dans la partie précédente.

### Introduction de la flexibilité des parois

Supposons donc que la surpression du liquide  $p$  génère une faible déformation des parois du canal. Si on note  $h$  la hauteur de la paroi, avec  $h_0$  sa valeur quand la bulle est au repos, on peut décrire cette déformation de la façon suivante :

$$h = h_0 + \alpha \frac{p}{E} h_0, \quad (\text{III.3})$$

où  $E$  est le module d'Young du PDMS et  $\alpha$  est un paramètre géométrique.

Sachant que la vibration monopole est une vibration axisymétrique, on peut considérer que la vitesse du liquide autour de la bulle est radiale, et en considérant que la vibration de la bulle est quasi-2D, on peut également négliger la composante verticale de la vitesse. Autrement dit, la vitesse dans le liquide peut s'écrire sous la forme :  $\mathbf{U} = U_r(r)\mathbf{e}_r$ . On peut alors écrire la conservation de la masse en considérant un anneau de liquide compris entre  $r$  et  $r + dr$ . Cela conduit à l'équation suivante :

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(rhU_r) = 0, \quad (\text{III.4})$$

D'autre part, si on néglige les termes non-linéaires et qu'on considère que  $p$  ne dépend pas de  $\theta$ , l'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\rho_f \frac{\partial U_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (\text{III.5})$$

En remplaçant  $h$  donné par l'équation III.3 et en ne gardant que les termes du premier ordre dans les équations III.4 et III.5, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.6})$$

où :

$$c_R = \sqrt{\frac{E}{\alpha \rho_f}}. \quad (\text{III.7})$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de d'Alembert 2D*. La vitesse  $c_R$  représente la vitesse des ondes de surface générées par la variation de pression dans le liquide. Il existe deux types d'ondes de surface : les ondes de Love et les ondes de Rayleigh. Les ondes de Love décrivent un mouvement dans le plan de l'interface solide et perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Les ondes de Rayleigh décrivent un mouvement normal au plan de l'interface et perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Sachant que la pression dans le liquide crée une force suivant la normale à la paroi du

canal, on est donc en présence d'une onde de Rayleigh<sup>2</sup>. La vitesse de ces ondes s'exprime :

$$c_{Rayleigh} = \gamma \sqrt{\frac{G}{\rho_f}}, \quad (\text{III.8})$$

où  $G$  est le module de cisaillement du matériau, avec  $\gamma$  un préfacteur qui dépend du coefficient de Poisson du matériau [Royer et Dieulesaint, 2000], valant généralement entre 0,87 et 0,95. Les ondes de Rayleigh sont la résultante de la combinaison d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement. C'est pourquoi le module de cisaillement intervient dans l'expression de la vitesse de l'onde. Ainsi, les particules solides décrivent des trajectoires elliptiques près de l'interface avec le liquide (voir annexe B).

Dans le cas du PDMS, le coefficient de Poisson est d'environ 0,5. Le module d'Young du PDMS se relie donc simplement à son module de cisaillement :  $E = 3G$ . On peut alors déduire des équations III.7 et III.8 la valeur théorique  $\alpha_{th} = 3$ . La vitesse des ondes de Rayleigh à l'interface PDMS/eau est donc de l'ordre de 10 m/s, soit deux ordres de grandeurs en dessous de la vitesse du son dans de l'eau.

### Résolution de l'équation de d'Alembert 2D

On peut passer en complexes en écrivant que  $p = p_0 + \text{Re}(\bar{p} e^{j\omega t})$ . L'équation III.6 devient alors l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques :

$$k^2 \bar{p} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.9})$$

où  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c_R$ . Cette équation peut se réécrire comme une équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \partial_x^2 \bar{p} + x \partial_x \bar{p} + (x^2 - a^2) \bar{p} = 0, \quad (\text{III.10})$$

avec  $x = kr$  et  $a = 0$ . Elle admet comme solution :

$$\bar{p}(r) = \alpha_0 H_0^{(1)}(kr) + \beta_0 H_0^{(2)}(kr),$$

où  $H_0^{(1)}$  et  $H_0^{(2)}$  sont les fonctions de Hankel d'ordre 0, et  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  deux constantes à déterminer. La fonction de Hankel de premier type  $H_0^{(1)}$  décrit la propagation d'une onde selon les  $r$  décroissants, la source se trouvant à l'infini, et celle du deuxième type  $H_0^{(2)}$  décrit la propagation d'une onde selon les  $r$  croissants, la source de l'onde se trouvant à l'origine. Comme il n'y a pas de source à l'infini, cela implique que  $\alpha_0 = 0$  : c'est ce qu'on appelle la condition de rayonnement de Sommerfeld.

### Suppression et déplacement du liquide générées par la vibration de la bulle

Cherchons maintenant à déterminer  $\beta_0$ . La deuxième condition limite est la continuité de la vitesse radiale au niveau de la paroi de la bulle. La vitesse radiale  $U_r = \text{Re}(\bar{U}_r e^{j\omega t})$  se déduit de l'équation III.5. Si on note l'oscillation de la bulle  $X = \text{Re}(\bar{X} e^{j\omega t})$ , la condition

---

2. Sachant qu'il s'agit d'une onde se propageant à l'interface entre un solide et un liquide, ces ondes sont plus couramment appelées "ondes de Scholte".

de continuité de la vitesse s'écrit alors<sup>3</sup> :

$$\bar{U}_r(r = R_0) = i\omega R_0 \bar{X} = \frac{-1}{i\omega \rho_f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\frac{i\beta_0 k}{\rho_f \omega} H_1^{(2)}(kR_0).$$

Ainsi, on en déduit l'expression de la surpression générée dans le liquide par la pulsation de la bulle :

$$\bar{p}(r) = -\frac{\omega^2 \rho_f}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kR_0)} R_0 \bar{X}, \quad (\text{III.11})$$

ainsi que l'expression de la vitesse radiale dans le liquide :

$$\bar{U}_r(r) = i\omega \frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kR_0)} R_0 \bar{X}. \quad (\text{III.12})$$

L'évolution de la vitesse en fonction de la distance  $r$  à la bulle est tracée figure III.4. La vitesse dans le liquide décroît<sup>4</sup> en  $1/\sqrt{r}$  et sa phase se décale progressivement de celle de la vitesse de la bulle,  $A_0\omega$ , à mesure que l'on s'éloigne de la bulle.

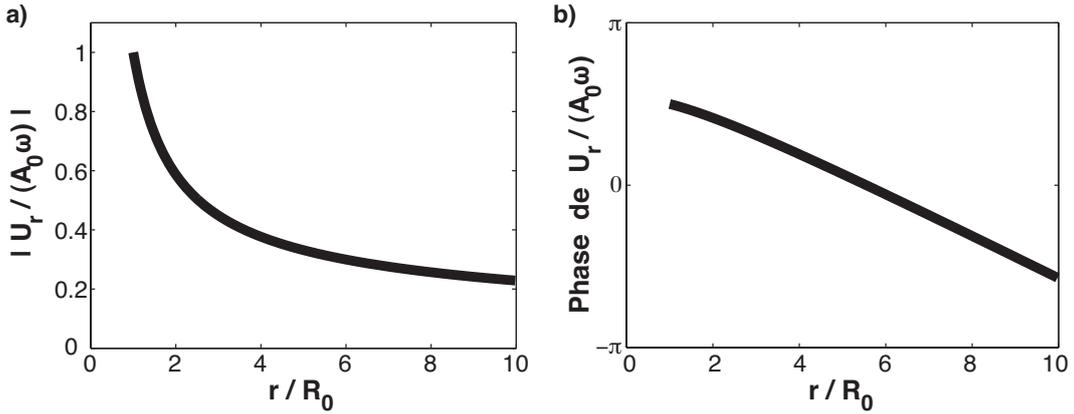


FIGURE III.4 – (a) Amplitude et (b) déphasage du rapport entre la vitesse dans le liquide et la vitesse à la paroi de la bulle,  $U_r(r)/(A_0\omega)$ , en fonction de la distance  $r/R_0$  à la bulle. La vitesse dans le liquide décroît en  $1/\sqrt{r}$  et se déphase à mesure que la distance à la bulle augmente.

### Equation de vibration 2D de la bulle

Soit  $P_{ac} = \text{Re}(\bar{P}_{ac} e^{i\omega t})$  la pression acoustique externe. La pression du liquide près de la bulle s'écrit alors :

$$p_L = p + P_{ac}. \quad (\text{III.13})$$

De plus, en supposant que le gaz contenu dans la bulle subit des transformations adiabatiques et que la hauteur du canal vaut  $h_0$  sur toute la surface de la bulle, on a :  $p_g = p_{g,0}(R/R_0)^{-2\gamma}$ . L'équation de Laplace qui nous donne donc :

3. On a, quel que soit  $x$  :  $H_0^{(2)}(x) = -H_1^{(2)}(x)$

4. En effet, on a :  $\lim_{kr \rightarrow \infty} H_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - n\pi/2 - \pi/4)}$

$$p_L = p_{g,0}(R/R_0)^{-2\gamma} - \sigma\kappa. \quad (\text{III.14})$$

La courbure s'exprime cette fois-ci :  $\kappa = 1/R + 2/h$ . Sachant que les bulles que nous étudions ont un rayon supérieur à  $20 \mu\text{m}$  et que la hauteur minimale du canal est de  $25 \mu\text{m}$ , la valeur maximale du terme de tension superficielle est de  $(\sigma\kappa)^{max} = 3.10^3 \text{ Pa}$ . Ainsi, on considèrera dans la suite que, dans le cas de la pulsation monopole, les termes de tension superficielle peuvent être négligés face au terme de pression interne  $2\gamma p_0$ .

On obtient finalement, à partir des équations III.11 et III.14, l'équation de vibration 2D de la bulle avec déformation des parois :

$$\left[ -\rho_f c_R^2 k R_0 \frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)} + 2\gamma p_0 \right] \bar{X} = -\bar{P}_{ac}. \quad (\text{III.15})$$

La pulsation de la bulle dépend donc de la variable  $kR_0$ . Sur la gamme de fréquences explorées, la vitesse des ondes de Rayleigh dépend faiblement de la fréquence. Nous avons donc reporté sur la figure III.2 les points expérimentaux selon une courbe maîtresse dont l'abscisse est le produit  $R_0 f$ . Les points expérimentaux ont été ajustés par l'équation III.15 et la courbe résultante a été reportée en pointillés sur la figure III.2. Cet ajustement nous permet alors d'accéder au paramètre :  $c_R = 40 \text{ m/s}$ .

Nous avons vu précédemment que  $c_R = \sqrt{E/(\alpha\rho_f)}$ . D'après [Fuard et al., 2008], le module d'Young du PDMS peut varier de 0.8 à 4 MPa, suivant l'âge et le temps de cuisson du PDMS. On parvient ainsi à une estimation du paramètre géométrique  $\alpha_{exp} \in [0, 5 : 2, 5]$  qui est proche de la valeur théorique  $\alpha_{th} = 3$ .

### Comportement asymptotique $kR_0 \ll 1$

Pour les gammes de rayons et de fréquences explorées, on a  $kR_0 = 2\pi R_0/\lambda \ll 1$ . Les valeurs asymptotiques de la fonction de Hankel nous conduisent dans ces conditions à :

$$\lim_{x \rightarrow 0} H_0^{(2)}(x)/(xH_1^{(2)}(x)) = \ln(x) + i\pi/2.$$

L'équation III.15 se réduit alors à :

$$\left[ -\omega^2 \ln\left(\frac{\lambda/2\pi}{R_0}\right) + \frac{2\gamma p_0}{\rho_f R_0^2} + i\frac{\pi}{2}\omega^2 \right] \bar{X} = -\frac{\bar{P}_{ac}}{\rho_f R_0^2}. \quad (\text{III.16})$$

On retrouve donc le modèle proposé par Prosperetti et exposé dans l'équation III.2, avec un terme radiatif en plus, du fait que la fonction de Hankel est une fonction à valeurs complexes. En comparant l'équation III.16 avec l'équation III.2 obtenue sans tenir compte de l'élasticité des murs du canal, on peut enfin déterminer le paramètre de coupure  $S$  :

$$S = \lambda/2\pi.$$

La bulle se comporte donc comme si elle vibrait dans un cylindre de liquide de taille limitée, le rayon caractéristique du cylindre étant donné par la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes de Rayleigh se développant à l'interface eau/PDMS.

D'autre part, le modèle 2D avec flexibilité des murs présente un terme d'amortissement radiatif en  $\omega^2$ . Cela a pour effet de faire tendre la phase temporelle du mode 0 vers  $\pi/2$  lorsque  $R_0 f$  est grand. Cela correspond bien à ce qui a été observé expérimentalement figure III.2.

## 2.2 Influence du point d'ancrage

Le modèle proposé dans la partie précédente est valable uniquement tant que la pulsation de la bulle peut être considéré comme 2D, c'est-à-dire tant que la bulle recouvre entièrement le trou :  $R_0 > (d + h)/2$ , et que le film de mouillage persiste entre la bulle et les murs du canal.

Le trou d'ancrage a pour effet d'augmenter légèrement le volume de la bulle. Notons  $V_t$  le volume de la calotte sphérique de gaz qui se trouve dans le trou. Du fait de l'extrême confinement du liquide dans le trou, on considèrera que la calotte ne vibre pas en présence d'ultrasons. L'équation de Laplace devient alors :

$$p_L = p_{g,0} \left( \frac{\pi h_0 R_0^2 + V_t}{\pi h_0 R^2 + V_t} \right)^\gamma - \sigma \kappa',$$

où  $\kappa' = \kappa + \kappa_t$  avec  $\kappa_t$  la courbure de la paroi de la bulle dans le trou. La continuité de la courbure entre la calotte sphérique dans le trou et l'interface loin du trou s'écrit d'après [Dangla et al., 2011] :  $\kappa_t = 1/R_t \simeq 2/h + \pi/(4R)$ . Tout comme dans la partie précédente, on a donc  $\kappa' \ll 2\gamma p_0$ , et on peut encore négliger la tension superficielle dans l'équation de pulsation du mode 0.

En posant  $R = R_0(1 + X)$ , l'équation III.15 devient, au premier ordre en  $X$  :

$$\left[ -\rho_f c_R^2 k R_0 \frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)} + 2\gamma \Phi_t p_0 \right] \bar{X} = -\bar{P}_{ac}, \quad (\text{III.17})$$

avec :

$$\Phi_t = \frac{\pi h_0 R_0^2}{\pi h_0 R_0^2 + V_t}.$$

La présence du trou peut donc avoir un effet sur la fréquence propre de la bulle. Plus le volume de la calotte sera grand, plus le coefficient adiabatique effectif  $\gamma^{eff} = \gamma \Phi_t$  sera faible. Si la bulle rentre entièrement dans le trou, on a  $V_t = \pi e d^2/4$ , ce qui donne un coefficient  $\Phi_t$  compris entre 0,5 et 1.

Dans le cas où on a une calotte sphérique, ce volume s'écrit :

$$V_t = \frac{2\pi R_t^3}{3} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{d/2}{R_t} \right)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d/2}{R_t} \right)^2 \right) \right]$$

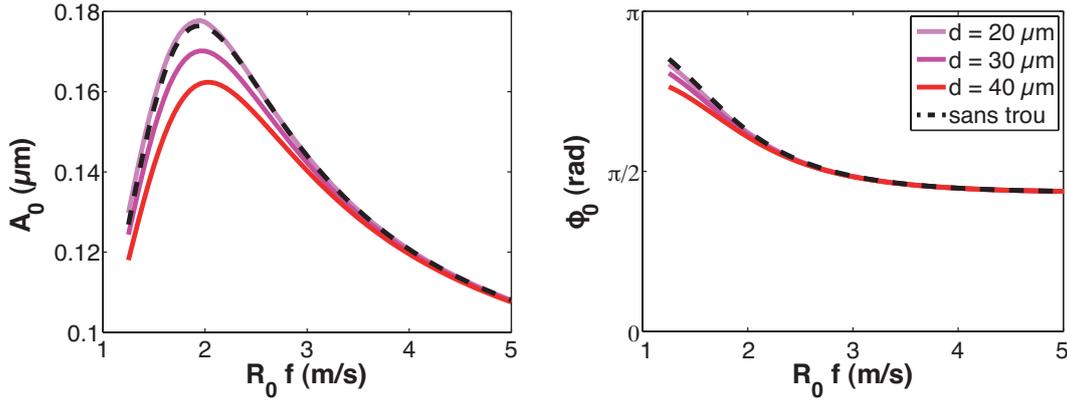


FIGURE III.5 – Amplitude  $A_0$  (gauche) et phase temporelle  $\phi_0$  (droite) du mode respiratoire en fonction de  $R_0 f$ , d'après le modèle théorique incluant l'effet du trou d'ancrage (équation III.17). Ici, nous avons tracé  $A_0$  : l'amplitude maximale est donc obtenue à une valeur de  $R_0 f$  légèrement supérieure à celle de  $A_0/R_0$ . Pour un trou de diamètre  $20 \mu\text{m}$ , tout se passe comme si le trou était absent. Plus le diamètre augmente, plus l'amplitude du mode respiratoire diminue.

Nous avons tracé figure III.5 l'amplitude  $A_0$  et la phase  $\phi_0$  du mode respiratoire en fonction de  $R_0 f$ . Il est à noter que l'amplitude  $A_0$  présente une résonance en  $R_0 f \simeq 2$ , là où  $X = A_0/R_0$  présente un maximum en  $R_0 f \simeq 1,5$ . Pour un trou de  $20 \mu\text{m}$  de diamètre, la prise en compte du trou dans le modèle modifie à peine l'amplitude et la phase du mode. Mais plus le diamètre du trou augmente, plus la différence entre les deux modèles est marquée aux faibles  $R_0 f$ . En revanche, le rapport entre l'amplitude  $A_0$  et sa valeur maximale  $A_0/A_0^{max}$  ne sera que très peu modifié. Dans les expériences de la figure III.2, nous avons utilisé un trou de diamètre  $30 \mu\text{m}$ . Nous pourrions donc considérer dans la suite que l'impact du trou peut dans ce cas être négligé.

### 2.3 De l'approximation adiabatique

Nous avons proposé dans les parties précédentes un modèle adiabatique. En réalité, des échanges thermiques peuvent avoir lieu entre le gaz contenu dans la bulle et le liquide environnant. Pour tenir compte de ces échanges thermiques, nous avons repris les calculs de [Leroy, 2004] basés sur les travaux de [Leighton1994], et nous les avons adapté au cas 2D, avec des murs de canal élastiques. La capacité calorifique de l'eau étant élevée, on considèrera que sa température ne varie pas au cours de la pulsation de la bulle.

#### Equation de la chaleur 2D dans l'air

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\partial_t T(r, t) - D_{th} \Delta T(r, t) = \frac{1}{\rho_f C_P} \partial_t p_g, \quad (\text{III.18})$$

où  $T$  est la température du gaz au sein de la bulle,  $C_P$  la capacité thermique massique du gaz,  $D_{th}$  son coefficient de diffusion thermique et  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien 2D. Le terme de droite est le terme source provenant de la pulsation de la bulle. On va chercher une

solution de cette équation sous la forme :  $T = T_0 + \text{Re}(T_1 e^{i\omega t})$  et  $p_g = p_{g,0} + \text{Re}(\bar{p}_g e^{i\omega t})$ . On sous-entendra dans la suite les "Re" afin d'alléger l'écriture des équations.

### Résolution de l'équation de la chaleur 2D

L'équation III.18 peut se réécrire sous la forme d'une équation différentielle de Bessel :

$$r^2 \partial_r^2 T_1 + r \partial_r T_1 + (k_T r)^2 T_1 = -i \frac{\omega}{\rho_f C_P D_{th}} r^2 \bar{p}_g, \quad (\text{III.19})$$

où  $k_T = \sqrt{\frac{\omega}{2D_{th}}}(-1+i)$ . Cette équation admet comme solution particulière :  $T_1^{(p)} = \frac{\bar{p}_g}{\rho_f C_P}$ , et comme solution homogène :  $T_1^{(h)} = \alpha_T J_0(k_T r) + \beta_T Y_0(k_T r)$ , où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce. La condition de Sommerfeld nous donne :  $\beta_T = 0$ . D'autre part, comme la capacité calorifique de l'eau est élevée, la condition limite à la paroi s'écrit :  $T_1(r = R_0) = 0$ . On obtient finalement comme solution générale :

$$T = T_0 + \frac{\bar{p}_g}{\rho_f C_P} \left[ 1 - \frac{J_0(k_T r)}{J_0(k_T R_0)} \right] e^{i\omega t}.$$

### Surpression générée par les échanges thermiques

La loi des gaz parfaits<sup>5</sup> est satisfaite sur chaque anneau de gaz compris entre  $r$  et  $r + dr$  et s'écrit :

$$p_g(t) dV(t) = \rho_f (2\pi h r dr) (C_P - C_V) T(t),$$

où  $C_V$  est la chaleur spécifique à volume constant . En intégrant le volume  $dV(t)$  entre  $r = 0$  et  $r = R_0$ , on obtient à l'ordre 1 en  $\bar{p}_g/p_{g,0}$ <sup>6</sup> :

$$V(t) = \pi h_0 R_0^2 \left[ 1 - \frac{\bar{p}_g}{\gamma p_{g,0}} e^{i\omega t} \left( 1 + \frac{2(\gamma-1)}{k_T R_0} \frac{J_1(k_T R_0)}{J_0(k_T R_0)} \right) \right] \\ + \pi h_0 R_0^2 \frac{\alpha p_{g,0}}{E} \left[ 1 + (\gamma-1) \frac{\bar{p}_g}{\gamma p_{g,0}} e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{1}{k_T R_0} \frac{J_1(k_T R_0)}{J_0(k_T R_0)} \right) \right].$$

Dans ce calcul, nous avons choisi de ne pas faire l'approximation que la hauteur de la paroi est la même sur toute la surface de la bulle<sup>7</sup>. En effet, la surpression générée dans le liquide a pour effet de déformer continûment la surface du canal. Il n'y a donc aucune raison que la hauteur soit homogène en  $r \leq R_0$ . De plus, comme le module d'Young du PDMS est du même ordre de grandeur que  $p_{g,0}$ , nous ne pouvons pas négliger le second terme dans l'expression de  $V(t)$ .

Le volume de la bulle s'écrit également :  $V(t) = \pi h R_0^2 (1 + \bar{X} e^{i\omega t})^2$ . On déduit, après développement au premier ordre en  $\bar{p}_g/p_{g,0}$  et en  $X$ , et en faisant l'approximation que la

5. Comme  $C_p - C_v = \frac{R}{M}$ , où  $M$  représente la masse molaire, la loi des gaz parfaits se réécrit :  $PV = m(C_p - C_v)T$ .

6. On utilise ici les propriétés suivantes :  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  et  $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$ .

7. voir équation III.3 pour l'expression de la hauteur

tension superficielle ne joue pas ( $p_{g,0} \simeq p_0$ ), que :

$$\bar{p}_g = -\Phi p_0 \bar{X}, \quad (\text{III.20})$$

avec  $\Phi$  une fonction à valeurs complexes :

$$\Phi = \frac{2\gamma}{1 - \frac{\alpha p_0}{E} + \left(2 + \frac{\alpha p_0}{E}\right) \frac{(\gamma-1) J_1(k_T R_0)}{k_T R_0} \frac{J_1(k_T R_0)}{J_0(k_T R_0)}}.$$

### Equation de vibration 2D de la bulle avec échanges thermiques

En combinant les équations III.13 et III.20, on obtient :  $\bar{p} + \bar{P}_{ac} = \bar{p}_g$ . L'équation de vibration 2D de la bulle avec déformation des murs du canal se résume alors, en tenant compte des échanges thermiques, à :

$$\left[ -\rho_f c_R^2 k R_0 \frac{H_0^{(2)}(k R_0)}{H_1^{(2)}(k R_0)} + \Phi p_0 \right] \bar{X} = -\bar{P}_{ac}, \quad (\text{III.21})$$

avec  $\Phi = \text{Re}(\Phi) + i \text{Im}(\Phi)$ . La prise en compte des échanges thermiques a pour effet de modifier la fréquence propre de la bulle et d'ajouter un terme d'amortissement thermique 2D. Afin de quantifier la variation de la fréquence propre avec la prise en compte des effets thermiques, nous avons tracé ce que l'on appelle l'indice polytropique  $\kappa = \text{Re}(\Phi)/2$  sur la figure III.6.

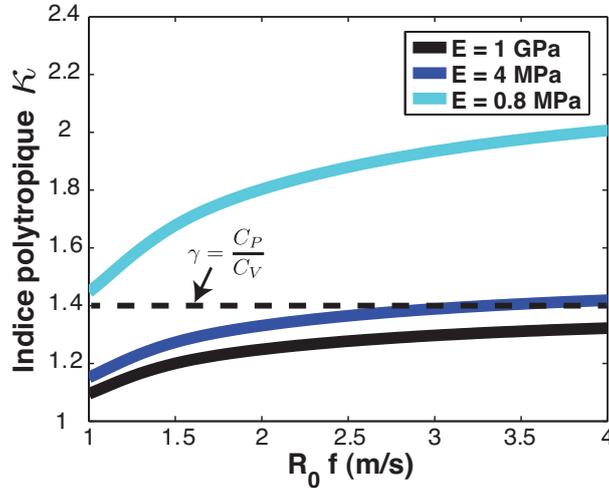


FIGURE III.6 – Evolution de l'indice polytropique  $\kappa = \text{Re}(\Phi)/2$  avec  $R_0 f$ , pour trois modules d'Young différents :  $E = 1$  GPa, 4 MPa et 0,8 MPa, en prenant le coefficient de diffusion thermique de l'azote  $D_{th}^{azote} = 22.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Pour des canaux réalisés dans un matériau ayant un module d'Young supérieur au GPa (c'est le cas du verre mais aussi de nombreux polymères, tels que le polystyrène ou le PMMA),  $\kappa$  tend vers  $\gamma$  quand  $R_0 f$  tend vers l'infini. Pour la gamme de rayons et de fréquences étudiées, on obtient alors une augmentation de l'indice polytropique avec  $R_0 f$ , avec une variation de près de 20%.

Dans le cas où le module d'Young du matériau est plutôt de l'ordre du MPa, comme par exemple avec le PDMS, la courbe obtenue précédemment va se traduire vers le haut d'autant plus que le module d'Young sera faible. Sachant de plus que notre PDMS a cuit pendant 4 heures et a eu le temps de se reposer entre la cuisson et le début de l'expérience, on estime son module d'Young à environ 2 MPa, d'après [Fuard et al., 2008]. Nous pouvons alors ajuster les deux courbes expérimentales avec ce nouveau modèle plus complet. On obtient les courbes d'ajustement présentées figure III.7. Cela nous donne accès à la valeur des paramètres d'ajustement :  $c_R = 50$  m/s,  $E = 1,2$  MPa et  $D_{th} = 2,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. La valeur obtenue pour la diffusivité thermique est bien plus faible que celle de l'azote ( $D_{th}^{azote} = 22 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s). Sachant que la capacité thermique massique du PDMS<sup>8</sup> ( $C_P^{PDMS} = 1,46$  kJ/kg/K) est plus proche de celle de l'azote ( $C_P^{azote} = 1$  kJ/kg/K) que de celle de l'eau ( $C_P^{eau} = 4,2$  kJ/kg/K), des échanges thermiques peuvent également avoir lieu à l'interface entre la bulle et le PDMS, ce qui pourrait expliquer la différence obtenue.

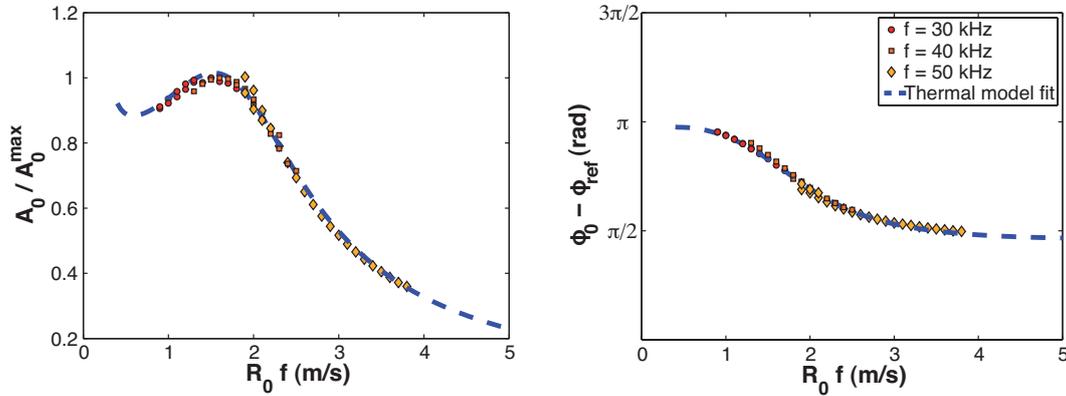


FIGURE III.7 – Ajustement des courbes expérimentales avec le modèle 2D incluant l'élasticité des murs en PDMS et les échanges thermiques (équation III.21) : (a) pour l'amplitude adimensionnée  $A_0/A_0^{max}$  et (b) pour la phase temporelle  $\phi_0 - \phi_{ref}$  du mode 0, à trois fréquences différentes :  $f = 30, 40$  and  $50$  kHz. La courbe (trait interrompu) ajustée correspond aux paramètres suivants :  $c_R = 50$  m/s,  $E = 1,2$  MPa et  $D_{th} = 2,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

## 2.4 Influence de la hauteur du canal et friction aux parois

La hauteur du canal n'intervient ni dans la formation, ni dans la propagation des ondes de Rayleigh. Elle n'apparaît pour le moment que dans le terme de tension superficielle, où nous avons vu que sa contribution était négligeable.

La hauteur du canal peut jouer un rôle plus important lorsqu'il s'agit de prendre en compte les termes de friction au niveau des parois du canal. En effet, lorsque la bulle vibre, le liquide confiné entre la paroi de la bulle et le mur du canal est cisailé. D'après [Rabaud et al., 2011], la dissipation visqueuse est localisée dans les coins de liquide compris entre la paroi de la bulle et le mur du canal, et la force de friction linéique

8. données obtenues sur le site : <http://www.mit.edu/6.777/matprops/pdms.htm>, elles-mêmes récupérée du "Polymer Data Handbook"

s'écrit, dans le cas d'une bulle se déplaçant dans un canal microfluidique de hauteur  $h$  :

$$F_{\text{fric}}^{\text{lin}} = a_{\text{fric}} \sigma \left( \frac{h}{R} \right)^{-2} \left[ \left( \frac{h}{R} \right)^3 Ca \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.22})$$

où  $Ca = \eta U / \sigma$  est le nombre capillaire, avec  $U$  la vitesse de la bulle, et  $a_{\text{fric}}$  un préfacteur.

En supposant que cette formule puisse aussi s'appliquer au mouvement axisymétrique de la ligne triple de la bulle oscillante, on en déduit la pression associée :

$$p_{\text{fric}} = 2a_f \eta \chi \frac{\dot{R}}{R},$$

où  $\chi = \left[ \left( \frac{h}{R} \right)^3 Ca \right]^{-\frac{1}{2}}$ . Pour le nombre capillaire, on prendra comme vitesse caractéristique la vitesse moyenne de la paroi de la bulle, soit  $U = A_0 \omega$ . En tenant compte de la contribution de la friction au niveau de la paroi du canal, l'équation III.21 devient :

$$\left[ -\rho_f c_R^2 k R_0 \frac{H_0^{(2)}(k R_0)}{H_1^{(2)}(k R_0)} + 2i \omega a_f \mu \chi + \Phi p_0 \right] \bar{X} = -\bar{P}_{ac}. \quad (\text{III.23})$$

Autrement dit, la friction au parois a pour effet d'ajouter un terme d'amortissement supplémentaire. Nous allons maintenant faire le point sur les différents termes d'amortissement pour comprendre lesquels dominant et lesquels peuvent être négligés.

## 2.5 Les différents termes d'amortissement

L'équation III.21 peut se réécrire sous la forme :

$$\left[ -\omega^2 + i\omega^2(\delta_{rad} + \delta_{th} + \delta_{visc} + \delta_{fric}) + \omega_0^2 \right] \bar{X} = -\omega_0^2 \bar{X}_{ac} \quad (\text{III.24})$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre de la bulle, et les  $\delta$  sont respectivement les constantes d'amortissement radiatif, thermique, visqueux et dû aux frictions aux parois.

### Amortissement radiatif

Aux hautes fréquences, c'est le terme radiatif qui est dominant. Plusieurs termes radiatifs pourraient intervenir. Celui correspondant à la propagation 3D d'ondes acoustiques dans le PDMS s'exprime théoriquement :

$$\delta_{rad,3D}^{PDMS} = \frac{R_0 \omega}{c_{PDMS}}.$$

Dans le plan du microcanal, des ondes peuvent se propager soit dans l'eau, soit à l'interface eau/PDMS. L'équation de propagation des ondes, ou équation de d'Alembert, s'écrit dans les deux cas :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

et a pour solution les fonctions de Hankel.

En écrivant les conditions limites à l'infini et au niveau de la paroi de la bulle, on obtient comme vu précédemment l'amortissement radiatif 2D :

$$\delta_{rad,2D} = -\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)}\right)},$$

qui tend vers :

$$\lim_{kR_0 \rightarrow 0} \delta_{rad,2D} = \frac{-\pi}{2 \ln(R_0 \omega / c)},$$

$c$  étant soit la vitesse du son dans l'eau  $c_{eau}$ , soit la vitesse de l'onde de Rayleigh  $c_R$ .

La vitesse du son étant de  $c_{eau} = 1480$  m/s dans l'eau,  $c_{PDMS} = 1030$  m/s dans le PDMS<sup>9</sup> et environ  $c_R = 40$  m/s à l'interface eau/PDMS, on a reporté figure III.8 l'évolution des différents termes d'amortissement radiatif en fonction de  $R_0 f$ . La faible vitesse des ondes de Rayleigh rend le terme radiatif associé important. On considèrera dans la suite que c'est lui qui domine dans notre système.

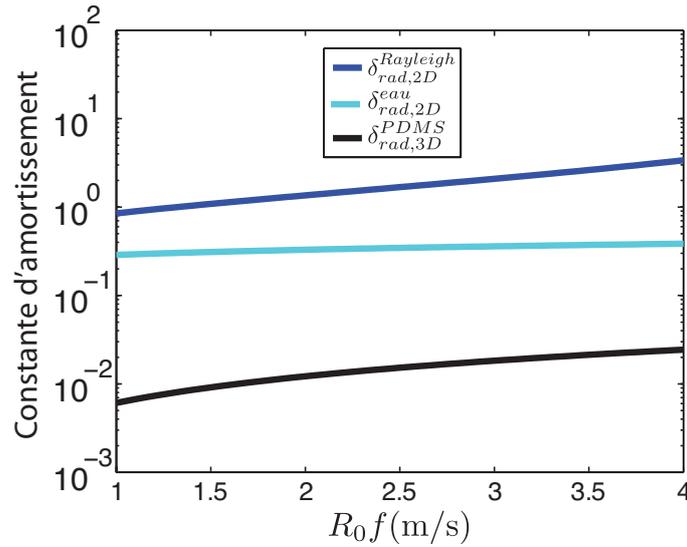


FIGURE III.8 – Constante d'amortissement radiatif en fonction de  $R_0 f$ , dans le cas de la propagation de l'onde de Rayleigh à l'interface eau/PDMS ( $\delta_{rad,2D}^{Rayleigh}$ ), de la propagation 2D de l'onde sonore dans l'eau ( $\delta_{rad,2D}^{eau}$ ) et de la propagation 3D de l'onde sonore dans le PDMS ( $\delta_{rad,3D}^{PDMS}$ ).

### Amortissement thermique

L'équation III.21 nous donne accès à la constante d'amortissement thermique 2D. Elle s'exprime :

$$\delta_{th} = \frac{\operatorname{Im}(\Phi) p_0}{\rho f \frac{R_0}{k} \operatorname{Re}\left(\frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)}\right)}.$$

9. <http://www.ondacorp.com/images/Rubbers.pdf>, Silgard 184

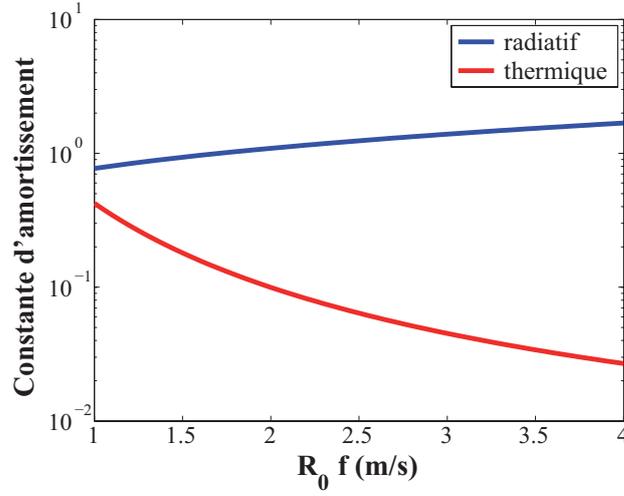


FIGURE III.9 – Constante d’amortissement radiatif associé aux ondes de Rayleigh et d’amortissement thermique 2D dans le cas du PDMS, avec  $c_R = 40$  m/s,  $E = 1,2$  MPa et  $D_{th} = 2,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

Nous avons tracé figure III.9 l’évolution des constantes d’amortissement radiatif et thermique 2D, dans la gamme de rayons et de fréquences étudiées. L’amortissement radiatif et l’amortissement thermique sont du même ordre de grandeur uniquement aux faibles  $R_0 f$ , dans quel cas ils doivent être considérés tous les deux.

### Friction sur les murs du canal

La constante d’amortissement dû à la friction sur les murs du canal s’exprime :

$$\delta_{fric} = \frac{2a_f \eta \chi}{\rho_f c_R R_0 \operatorname{Re} \left( \frac{H_0^{(2)}(kR_0)}{H_1^{(2)}(kR_0)} \right)}.$$

Suivant la valeur du préfacteur  $a_f$  et du nombre capillaire  $Ca$ , cette constante d’amortissement peut être soit du même ordre de grandeur que la constante d’amortissement radiatif dû aux ondes de Rayleigh, soit un ordre de grandeur plus faible. Une étude plus minutieuse de cette friction devra donc être menée à l’avenir pour estimer si elle a ou non une importance dans la vibration de la bulle, et s’il est possible de diminuer son effet.

### 3 Les modes de surface paramétriques

Aux fortes amplitudes d'excitation, des modes de surface d'ordre plus ou moins élevés ont été observés, comme présenté figure III.10.

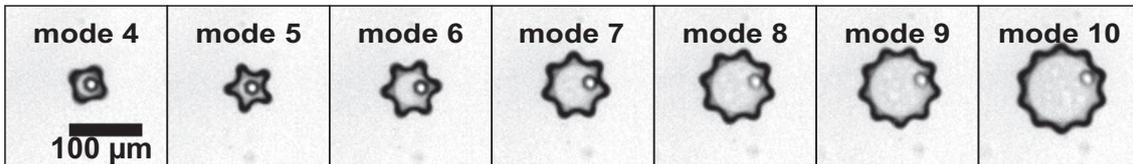


FIGURE III.10 – Modes de surface : pour une excitation de forte amplitude à une fréquence  $f = 104$  kHz, différents modes de surface ont été observés. Nous présentons ici les photos d'une bulle exhibant un mode d'ordre  $n$ , allant de  $n = 4$  (gauche) à  $n = 10$  (droite). L'ordre du mode correspond au nombre de pics présents à la périphérie de la bulle.

Ces modes apparaissent à certaines fréquences d'excitation et pour certains rayons de bulle seulement. Etant donné la nécessité des fortes amplitudes pour observer ces modes, le dispositif expérimental avec lame de verre a été choisi.

Cette partie est consacrée à l'étude de ces modes. Nous nous intéresserons dans un premier temps à la dynamique de pulsation des modes ainsi qu'à leur orientation, puis dans un deuxième temps aux conditions pour lesquelles ils apparaissent. Enfin, nous développerons les équations du mouvement de la bulle et simulerons les résultats obtenus pour les comparer aux expériences. Nous chercherons à savoir quelle est l'influence des ondes de Rayleigh sur la dynamique des modes.

#### 3.1 Amplitude et phase temporelle

Nous avons d'abord suivi l'évolution temporelle d'une bulle de rayon  $R_0 = 24 \mu\text{m}$  au début de son excitation par une sinusoïde à la fréquence  $f = 113$  kHz. En plus de sa vibration monopole, la bulle développe un mode de surface  $n = 4$  sur son contour. La figure III.11a montre l'évolution de ces deux modes de vibration.

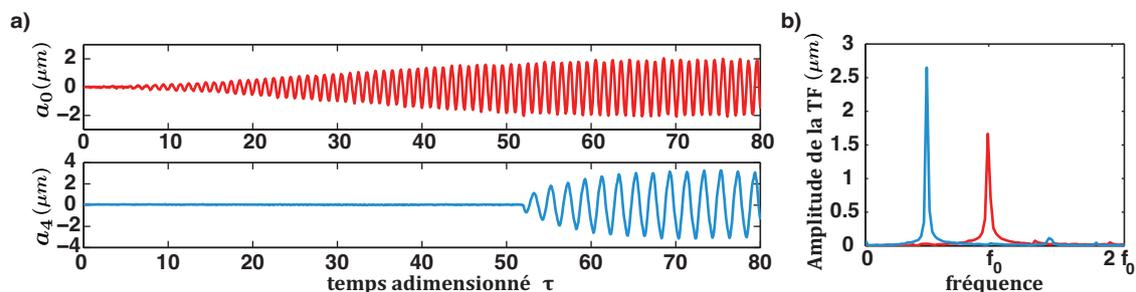


FIGURE III.11 – (a) Evolution temporelle du mode respiratoire (haut) et apparition du mode le plus amplifié  $n = 4$  (bas) pour une bulle de rayon  $R_0 = 24 \mu\text{m}$  excitée à une fréquence  $f = 113$  kHz. Le temps est adimensionné par la période de stroboscopie. (b) Transformée de Fourier temporelle des signaux  $a_0(t)$  et  $a_4(t)$  en régime permanent. Le mode de surface  $n = 4$  présente un doublement de période caractéristique de l'instabilité paramétrique.

Le mode respiratoire met quelques dizaines de périodes avant d'atteindre son régime permanent. Le mode  $n = 4$  commence à apparaître bien après le mode 0, mais sa croissance est beaucoup plus rapide, puisqu'elle se fait sur quelques périodes seulement. La fréquence d'oscillation du mode 0 est la même que celle de l'excitation de la lame de verre, comme on peut le voir sur la transformée de Fourier du signal (figure III.11b). En revanche, le mode 4 pulse à une fréquence qui vaut la moitié de celle de l'excitation. Ce doublement de période survient quel que soit l'ordre du mode observé.

La même expérience a ensuite été réalisée sur des temps plus longs en fixant l'amplitude du signal sinusoïdal envoyé au piézo à  $A = 22,5$  V et sa fréquence d'excitation à  $f = 104$  kHz. La quantité de gaz dissous dans le liquide étant suffisamment importante pour que la bulle grossisse au cours du temps (cf figure III.12), il est alors possible de balayer toute une gamme de rayons de bulle<sup>10</sup>. Cette croissance de la bulle se fait à une vitesse d'environ  $1 \mu\text{m/s}$ . Ainsi, au cours d'une période d'excitation, le rayon moyen de la bulle varie de  $10^{-3}\%$ . On pourra donc considérer qu'on est en régime quasi-statique.

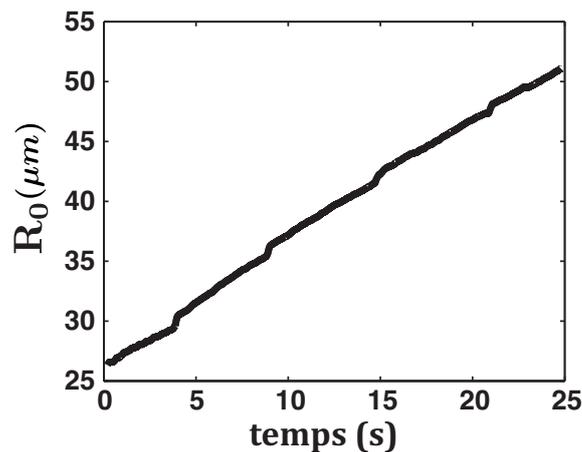


FIGURE III.12 – Evolution temporelle du rayon d'une bulle excitée à une fréquence  $f = 104$  kHz, avec une amplitude du piézo à  $A = 22,5$  V : le rayon croît par diffusion du gaz dissous dans le liquide vers l'intérieur de la bulle. Les légers sauts de rayons ont lieu lors des transitions entre modes.

Les différents modes de vibration de cette même bulle ont pu être analysés par décomposition en série de Fourier. La figure III.13 donne l'évolution du module de l'amplitude des modes de surface  $n = 4$  à 8 au cours de la croissance de la bulle. L'amplitude maximale du mode respiratoire est reporté en noir. Le rayon de résonance de ce mode étant estimé à  $R_0^{res} = 15 \mu\text{m}$  (en utilisant la relation  $f.R_0^{res} = 1,5$ ), on se situe donc bien au-dessus de la résonance. Ceci explique la décroissance de l'amplitude du mode respiratoire lorsque le rayon de la bulle augmente. On remarque d'autre part que l'amplitude de ce mode change subitement lors des transitions entre deux modes successifs, tout comme le rayon moyen (figure III.12).

Pour chaque rayon de bulle, on observe une superposition du mode respiratoire avec

10. Cette croissance n'est pas due uniquement à de la diffusion rectifiée [Leighton, 1994], puisque la bulle grossit aussi en l'absence de son.

un mode de surface préférentiel. L'ordre de ce mode dominant est déterminé par le rayon de la bulle. En effet, plus la bulle sera grosse, plus on pourra placer de ventres de vibration sur le pourtour de la bulle. Si on note  $\lambda_{mode}$  la longueur d'onde du mode de surface, on a alors :  $2\pi R = n\lambda_{mode}$ . Les points expérimentaux nous permettent alors d'accéder à  $\lambda_{mode} = 41 \pm 2 \mu\text{m}$ . La hauteur du canal étant de  $25 \mu\text{m}$ , il ne peut donc pas y avoir de mode de surface dans la tranche du canal : les modes de surface observés sont donc bidimensionnels.

On note également que l'amplitude du mode dominant décroît lorsque le rayon moyen de la bulle augmente. Cela pourrait s'expliquer par l'éloignement par rapport au rayon de résonance : plus on s'écarte de la résonance, plus l'amplitude relative  $A_0/R_0$  du mode 0 est faible, et donc moins il redistribue son énergie vers les modes de surface.

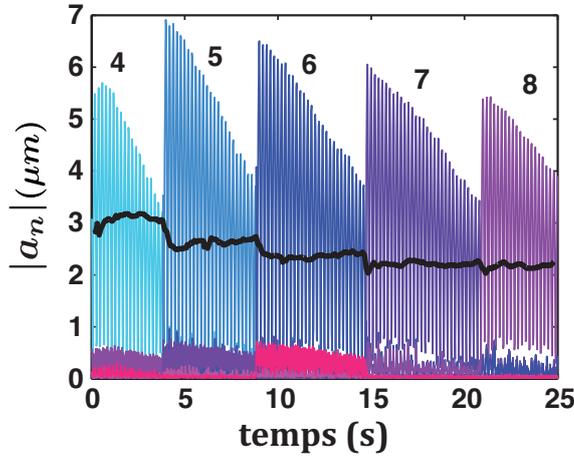


FIGURE III.13 – Amplitude maximale du mode respiratoire  $A_0$  (noir) et module de l'amplitude  $|a_n(t)|$  des modes de surface  $n = 4$  à  $8$  (bleu à rose) en fonction du temps, pour une bulle de rayon croissant (cf figure III.12), excitée à une fréquence  $f = 113 \text{ kHz}$  avec une amplitude d'excitation du piézo  $A = 22,5 \text{ V}$ .

La phase temporelle du mode dominant peut elle aussi être calculée. L'évolution temporelle du déphasage  $\Delta\phi^{(0,n)} = \phi_n - \phi_0$  entre ce mode  $n$  et le mode respiratoire est représentée figure III.14. Ce déphasage est constant pour un mode de surface donné et semble augmenter légèrement avec l'ordre du mode, tout en restant proche de  $\pi/2$ .

### 3.2 La rotation des modes

Cette même expérience nous fournit également la phase spatiale  $\psi_n(t)$  des différents modes. L'orientation angulaire du mode dominant  $n$  en est déduit par la formule suivante :  $\theta_n = -\psi_n/n$ . Elle correspond à l'angle du premier pic rencontré dans le sens anti-horaire, la référence des angles étant prise en  $\mathbf{e}_x$ . L'angle de chacun des  $n$  pics peut alors être retrouvé en ajoutant  $k/n$  (avec  $k < n$ ,  $k$  entier) à cet angle  $\theta_n$ . L'évolution temporelle de l'orientation angulaire  $\theta_n$  du mode dominant a été tracée figure III.15. L'angle a été déroulé pour mieux visualiser son évolution.

Pendant la transition entre deux modes successifs, un nouveau pic apparaît au niveau du pourtour de la bulle. Notre résolution temporelle, déterminée par la fréquence de

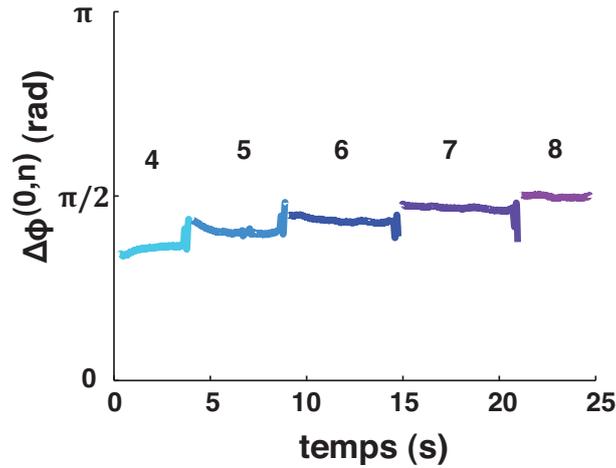


FIGURE III.14 – Déphasage  $\Delta\phi^{(0,n)}$  entre le mode amplifié  $n$  et le mode 0 en fonction du temps, pour une bulle de rayon croissant (cf figure III.12), excitée à une fréquence  $f = 113$  kHz avec une amplitude d'excitation du piézo  $A = 22,5$  V.

stroboscopie, ne nous permet pas de visualiser la réorganisation des pics. Pour la résoudre, il faudrait filmer cette transition à une fréquence d'acquisition de plusieurs centaines de milliers d'images par secondes.

Un raccordement fictif a été effectué au niveau des transitions des modes. La zone grisée représente l'incertitude de ce raccordement. En effet, il nous est impossible de dire quel pic du mode  $n$  correspond au nouveau premier pic du mode  $n + 1$ . L'amplitude de cette erreur est donnée par  $1/n$ .

On observe que la bulle est libre de tourner, même lorsque la paroi de la bulle est proche du trou d'ancrage. La majorité du temps, le mode de surface dominant garde la même orientation. Mais parfois, le mode se met à tourner. Dans les conditions d'excitation de la figure III.15, la transition entre deux modes successifs est toujours marquée par une rotation du mode. Cela pourrait suggérer que la rotation est due à une interaction entre deux modes successifs. Avec notre résolution temporelle, il ne nous est pas possible de dire s'il y a ou non superposition des modes de surface lors de ces transitions. Mais d'autres expériences ont montré que la transition entre deux modes pouvait également se faire sans rotation. De plus, la rotation des modes a aussi été observée en plein milieu de la zone d'existence du mode. C'est le cas pour le mode  $n = 6$ , figure III.15. Nous avons également pu observer que la rotation pouvait se faire dans les deux sens. L'interaction de modes ne peut donc pas être la seule source génératrice de rotation.

Une autre explication possible serait que le champ acoustique excitateur est bidimensionnel, avec une superposition d'une onde stationnaire et d'une onde propagative dans la direction de la lame (si la fréquence d'excitation ne correspond pas exactement à l'excitation d'un mode de la lame de verre), et avec une onde propagative dans la direction perpendiculaire à la lame, soit parce que la lame est trop large, soit parce que le PDMS retransmet cette onde dans cette direction. Il suffirait que ces deux ondes perpendiculaires existent et soient déphasées l'une par rapport à l'autre pour que cela induise une rotation

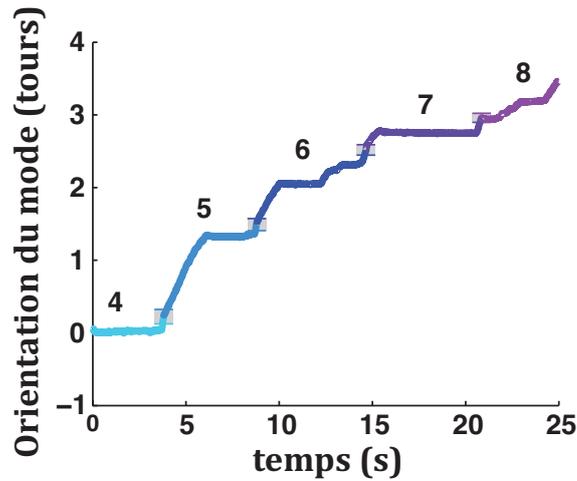


FIGURE III.15 – Orientation angulaire  $\theta_n$  du mode  $n$  dominant, pour une bulle de rayon croissant, excitée à une fréquence  $f = 113$  kHz avec une amplitude d'excitation du piézo  $A = 22.5$  V. L'angle a été déroulé pour mieux voir son évolution temporelle. Le mode de surface garde la même orientation, sauf à certains moments où il se met à tourner. La vitesse de rotation est de l'ordre de 0.5 tour/s. Les zones grises correspondent à l'incertitude sur l'angle  $\theta_n$  lors du raccordement entre deux modes successifs.

de la bulle.

Il est à noter que la vitesse de rotation, quand rotation il y a, est constante (0,5 tour/s) et qu'elle ne semble pas varier avec l'ordre du mode de surface. Nous avons par ailleurs vérifié que la rotation n'était pas stroboscopée, ce qui signifie qu'elle n'est pas plus rapide que ce qui a été observé.

### 3.3 Domaines d'existence et seuil d'apparition

En répétant l'expérience précédente à différentes amplitudes d'excitation, mais en gardant la même fréquence excitatrice  $f = 104$  kHz, nous avons pu tracer un diagramme donnant les domaines d'existence des différents modes de surface, pour une gamme de rayons allant de  $R_0 = 27$  à  $50 \mu\text{m}$  (voir figure III.16).

Quelle que soit l'amplitude d'excitation, le mode 0 est excité. En ajustant la courbe d'évolution de l'amplitude relative  $X = A_0/R_0$  avec le rayon  $R_0$  à l'aide de l'équation III.15, nous avons accès à la vitesse de l'onde de Rayleigh dans cette puce microfluidique :  $c_R = 44$  m/s, mais aussi au taux de conversion entre l'amplitude d'excitation du piézo  $A(V)$  et la pression acoustique  $P_{ac}$  avec laquelle la bulle est excitée :  $A(V) = 2P_{ac}$  (kPa).

En plus de ce mode respiratoire, des modes de surface peuvent apparaître. Les zones pour lesquelles seul le mode  $n = 0$  apparaît ont été marquées par des croix noires. On voit ainsi apparaître, pour un rayon donné, un seuil de pression excitatrice au-delà de laquelle l'instabilité de forme se développe, donnant naissance à une forme étoilée. Cette pression seuil est de l'ordre de quelques dizaines de kPa et varie avec l'ordre du mode et le rayon de la bulle. En effet, le seuil du mode  $n = 5$  est plus bas que celui des autres modes<sup>11</sup>.

11. Pour autant, on reste bien au-dessus du rayon de résonance  $R_0^{res} = 15 \mu\text{m}$ .

Les domaines d'existence des modes ont une forme allongée faisant penser à des "langues de Mathieu" [Broer et Simo, 2000]. Nous allons dans la suite essayer de comprendre d'où viennent ces langues et comment ces modes apparaissent.

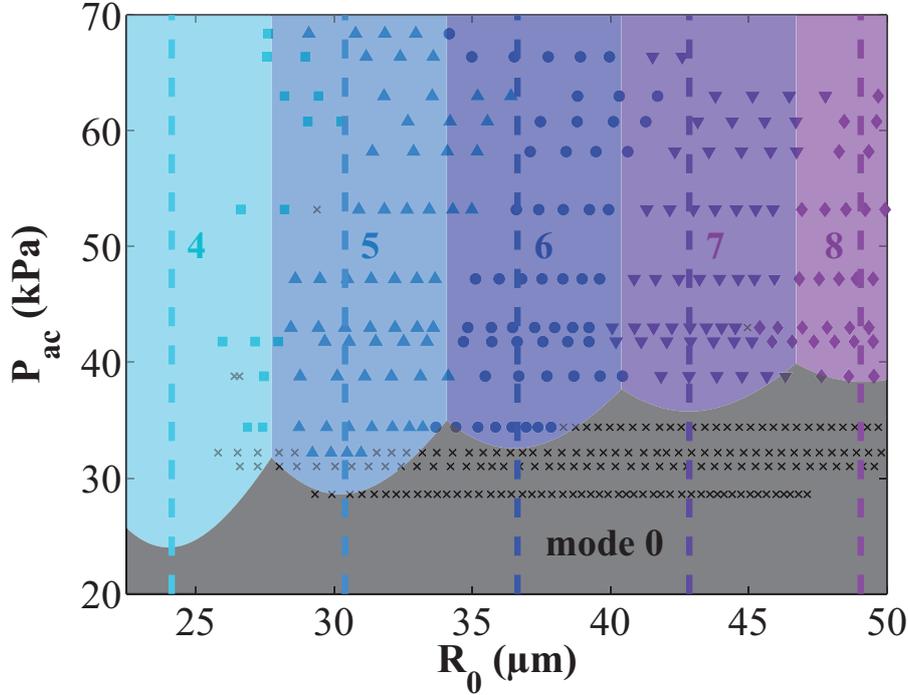


FIGURE III.16 – Domaines d'existence des différents modes de surface, obtenus en faisant varier le rayon moyen de la bulle à différentes amplitudes d'excitation, pour une fréquence d'excitation fixée à 104 kHz. Les points expérimentaux ont été reportés sous forme de croix noires dans le cas où seul le mode 0 est présent. Dans les autres cas, on a superposition du mode 0 et d'un unique mode de surface :  $n = 4$  (carrés cyan),  $n = 5$  (triangles bleu clair),  $n = 6$  (ronds bleu foncé),  $n = 7$  (triangles inversés violets) ou  $n = 8$  (losanges mauves). Les lignes verticales interrompues donnent le rayon de résonance théorique  $R_n$  de chaque mode, pour une tension de surface  $\sigma = 25$  mN/m (voir équation III.34). Les zones colorées correspondent aux domaines d'existence théoriques des modes obtenus pour une vitesse des ondes de Rayleigh  $c_R = 44$  m/s, une tension de surface  $\sigma = 29$  mN/m et un terme d'amortissement supplémentaire non adimensionné  $\Gamma = 1,9 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$  (voir équation III.40).

### 3.4 Résonance théorique des modes

Dans la suite, on s'intéresse à des bulles présentant à la fois un mode respiratoire et un unique mode de surface  $n$ . On supposera que le mode garde son orientation fixe. Le contour peut alors se décomposer de la façon suivante :

$$\rho(\theta, t) = R_0 + A_0 \cos(\omega_e t) + A_n \cos(\omega t) \cos(n\theta). \quad (\text{III.25})$$

On notera à présent dans cette partie  $\omega_e$  la pulsation du mode 0 et de l'onde excitatrice et  $\omega$  la pulsation du mode  $n$ .

Reprenons le modèle de déformation des parois vu dans la partie 2.1 en y ajoutant une symétrie axiale d'ordre  $n$ . L'équation de conservation de la masse III.4 se réécrit alors, en

considérant un petit volume de liquide compris entre  $r$  et  $r + dr$  d'une part et entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  d'autre part :

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(rhU_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(hU_\theta) = 0, \quad (\text{III.26})$$

où  $U_\theta$  est la composante tangentielle de la vitesse dans le liquide. Après projection de l'équation d'Euler sur  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$ <sup>12</sup>, on peut en déduire l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{III.27})$$

On va s'intéresser ici à la composante de la pression qui a une symétrie axiale d'ordre  $n$ . Celle-ci peut se mettre sous la forme :  $p_n = \text{Re}(\bar{p}_n \cos(n\theta)e^{i\omega t})$ . On en déduit alors que  $\bar{p}_n$  satisfait l'équation différentielle de Bessel III.10, avec  $x = kr$  et  $a = n$ . Cette équation a pour solutions les fonctions de Hankel d'ordre  $n$ <sup>13</sup> :

$$\bar{p}_n = \alpha_n H_n^{(1)}(kr) + \beta_n H_n^{(2)}(kr), \quad (\text{III.28})$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont deux constantes à déterminer. La fonction de Hankel de premier type  $H_n^{(1)}$  décrit la propagation d'une onde se propageant selon les  $r$  décroissants, et celle du deuxième type  $H_n^{(2)}$  décrit la propagation selon les  $r$  croissants. La condition de rayonnement de Sommerfeld impose alors  $\alpha_n = 0$ .

L'équation d'Euler projetée nous donne ensuite accès à la vitesse du liquide :

$$\begin{aligned} \bar{U}_r &= \frac{-1}{i\omega\rho_f} \frac{\partial}{\partial r}(\bar{p}_n \cos(n\theta)) = \frac{i}{\rho_f\omega} \beta_n k H_n'^{(2)}(kr) \cos(n\theta) \\ \bar{U}_\theta &= \frac{-1}{i\omega\rho_f} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{p}_n \cos(n\theta)) = -\frac{in\beta_n}{\rho_f\omega r} H_n^{(2)}(kr) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

La vitesse radiale de symétrie axiale d'ordre  $n$  valant :  $U_r = \partial_t a_n \cos(n\theta)$  au niveau de la paroi, la continuité de la vitesse radiale nous donne donc accès à  $\beta_n$ , et la pression générée par le mode  $n$  dans le liquide s'écrit finalement :

$$\bar{p}_n = \frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n'^{(2)}(kR_0)} \bar{a}_n.$$

Cela nous permet d'autre part d'exprimer la vitesse tangentielle dans le liquide :

$$\bar{U}_\theta = -\frac{i n \omega}{k r} \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n'^{(2)}(kR_0)} \sin(n\theta).$$

La vitesse tangentielle est donc maximale au niveau des noeuds de déformation du mode et minimale au niveau des ventres de déformation.

12. L'équation d'Euler projetée sur  $\mathbf{e}_r$  s'écrit :  $\rho_f \partial_t U_r = -\partial_r p$  et projetée sur  $\mathbf{e}_\theta$  s'écrit :  $\rho_f \partial_t U_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta p$ .

13. Les  $H_{-n}$  sont aussi solution de cette équation mais elles sont directement proportionnelles à  $H_n$  :  $H_{-n}^{(2)} = e^{-in\pi} H_n^{(2)}$ .

### Comportement asymptotique de la pression et de la vitesse :

A l'infini, on a :

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} H_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - n\pi/2 - \pi/4)}$$

Ainsi, la pression dans le liquide décroît en  $1/\sqrt{kr}$ , quel que soit l'ordre du mode : la décroissance en  $r$  de la pression ne sera donc pas plus rapide pour un mode d'ordre plus élevé. Pour la vitesse radiale, on a :  $H_n^{(2)'}(x) = \frac{1}{2}(H_{n-1}^{(2)} - H_{n+1}^{(2)})$ , ce qui implique que :

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} H_n^{(2)'}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - (n-1)\pi/2 - \pi/4)}$$

Les vitesses radiale et tangentielle décroissent donc elles aussi en  $1/\sqrt{kr}$ , quel que soit l'ordre du mode. La vitesse tangentielle est en quadrature de phase avec la pression, la vitesse radiale est quant à elle en phase avec la pression.

### Résonance du mode : influence de la flexibilité des parois :

La pression totale du liquide à la surface de la bulle s'écrit :

$$p_L = p_0 + p_n + P_{ac}. \quad (\text{III.29})$$

D'autre part, la courbure de la bulle dans le plan du canal s'exprime, dans le cas général :

$$\kappa_{polar} = |\rho^2 + 2(\partial_\theta \rho)^2 - \rho \partial_\theta^2 \rho| / (\rho^2 + (\partial_\theta \rho)^2)^{3/2},$$

ce qui donne pour un contour défini par l'équation III.25, en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $a_n/R_0$  et en  $a_0/R_0$  :

$$\kappa_{polar} = (n-1)(n+1) \frac{a_n}{R_0^2} \cos(n\theta)$$

La pression totale dans le liquide s'écrit donc aussi, au premier ordre :

$$p_L = p_{g,0} - \frac{\sigma}{R_0} - (n-1)(n+1) \frac{\sigma}{R_0^2} a_n \cos(n\theta) - \frac{2\sigma}{h}. \quad (\text{III.30})$$

Contrairement au mode de respiration, la tension de surface n'est plus négligeable. On obtient finalement en combinant III.29 et III.30 :

$$\left[ \frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_n^{(2)}(kR_0)}{H_n^{(2)'}(kR_0)} + (n-1)(n+1) \frac{\sigma}{R_0^2} \right] \bar{a}_n = -\bar{P}_n^{\text{ext}}, \quad (\text{III.31})$$

où  $\bar{P}_n^{\text{ext}}$  est la partie du champ exciteur de symétrie axiale d'ordre  $n$ . Dans le cas d'une bulle seule, le champ de pression externe est uniforme, et donc  $\bar{P}_n^{\text{ext}} = 0$ .

La pulsation propre du mode  $n$  est donc donnée par :

$$\omega_n^2 = \frac{-kR_0}{\operatorname{Re}\left(\frac{H_n^{(2)}(kR_0)}{H_n'^{(2)}(kR_0)}\right)} (n-1)(n+1) \frac{\sigma}{\rho_f R_0^3}. \quad (\text{III.32})$$

Dans nos expériences, la valeur maximale de  $kR_0$  est de 0,8. Or aux faibles valeurs de  $kR_0$ , on a pour  $n \geq 1$  :

$$\lim_{kR_0 \rightarrow 0} -H_n^{(2)}(x)/(xH_n'^{(2)}(x)) = 1/n,$$

Cela nous conduit à une valeur asymptotique de la pulsation propre :

$$\lim_{kR_0 \rightarrow 0} \omega_n^2 = n(n-1)(n+1) \frac{\sigma}{\rho_f R^3}, \quad (\text{III.33})$$

ce qui n'est autre que la pulsation propre d'un mode de surface d'ordre  $n$  calculée dans le cas 2D. On voit notamment qu'aux faibles  $kR_0$ , la déformation du PDMS n'a pas d'influence sur la dynamique du mode  $n$ , contrairement au mode respiratoire.

### Comparaison avec l'expérience :

Le "rayon propre" théorique<sup>14</sup> s'exprime finalement, dans l'hypothèse  $kR_0 \ll 1$  :

$$R_n = \left( n(n-1)(n+1) \frac{\sigma}{\rho_f (\omega_e/2)^2} \right)^{1/3} \quad (\text{III.34})$$

Un ajustement entre théorie et expérience a été réalisé aux basses amplitudes d'excitation ( $P_{ac} = 40 - 50$  kPa), en prenant la tension de surface comme paramètre d'ajustement. Pour une tension de surface  $\sigma = 25$  mN/m, on obtient le meilleur ajustement. Les rayons propres correspondants ont été ajoutés à la figure III.16 sous forme de lignes interrompues de la couleur des modes considérés.

### 3.5 Dynamique des modes de surface

Dans la suite, on va se placer dans le cas  $kR_0 \ll 1$  et considérer que la déformation du PDMS n'a pas d'influence sur la dynamique des modes. Le potentiel des vitesses s'écrit alors :

$$\varphi = \dot{R}R \ln(r) - \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{r^{n+1}} \cos(n\theta),$$

où les  $b_n$  sont des coefficients à déterminer. On en déduit alors la vitesse radiale :

$$U_r = \frac{\dot{R}R}{r} + (n+1) \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{r^{n+2}} \cos(n\theta).$$

14. Il s'agit du rayon de la bulle pour lequel la pulsation propre du mode  $n$  est égale à la moitié de la pulsation du mode 0 :  $\omega_n = \omega_e/2$ .

La condition de continuité de la vitesse radiale au niveau de la paroi nous permet de déduire les  $b_n$  :  $b_n = \dot{a}_n R^{n+2}/(n+1)$ .

L'équation de la dynamique s'obtient ensuite en écrivant l'équation de Bernoulli :

$$p_L = p_0 + P_{ac}(t) + \rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right]_R^S, \quad (\text{III.35})$$

avec  $S \gg R_0$ , et l'équation de Laplace III.30.

Au premier ordre en  $a_n/R$ , on arrive à :

$$\ddot{a}_n + 2 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a}_n + \left[ \omega_n^2 - (n-1) \frac{\ddot{R}}{R} \right] a_n = F_n^{\text{ext}}. \quad (\text{III.36})$$

La force externe  $F_n^{\text{ext}}$ , de symétrie axiale d'ordre  $n$ , est nulle dans le cas de la bulle seule. L'équation III.36 est une équation de Mathieu déguisée. En effet, en s'inspirant de [Francescutto et Nabergoj, 1978], si on pose :

$$a_n = c_n \exp \left[ - \int_{t_0}^t \frac{\dot{R}}{R} dt' \right] = c_n \frac{R_0}{R},$$

on obtient que  $c_n$  vérifie l'équation de Mathieu suivante :

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 \left[ 1 + n \frac{A_0}{R_0} \left( \frac{\omega_e}{\omega_n} \right)^2 \cos(\omega_e t) \right] c_n = 0. \quad (\text{III.37})$$

Ainsi, la dynamique de vibration des modes de surface est décrite par une équation de Mathieu.

### 3.6 L'oscillateur paramétrique et l'équation de Mathieu

On appelle "oscillateur paramétrique" un oscillateur dont l'un des paramètres varie au cours du temps. Parmi les oscillateurs paramétriques les plus connus, on trouve l'enfant sur sa balançoire, s'assurant quand la balançoire est au plus bas, et se mettant debout quand elle est au plus haut. Ainsi, deux fois par période, l'enfant fait varier la distance entre son centre de gravité et le point de suspension de la balançoire, conduisant à une amplification du mouvement, appelée "amplification paramétrique". Tout se passe comme si on avait un pendule simple dans un champ de pesanteur  $g$  oscillant verticalement. Dans le cas où cette oscillation est sinusoïdale :  $g(t) = g_0 + g_1 \cos(\omega_e t)$ , la mise en équation de ce problème conduit à l'équation de Mathieu, qui s'écrit dans le cas du pendule sous la forme :

$$\partial_t^2 \theta + \omega_0^2 [1 + H \cos(\omega_e t)] \theta = 0, \quad (\text{III.38})$$

avec  $H = g_1/g_0$  et  $\omega_0 = \sqrt{g_0/l}$ , avec  $l$  la longueur du fil du pendule.

Dans le cas des modes de surface de la bulle, le paramètre variable de l'oscillateur est l'amplitude du mode respiratoire. On est donc en présence d'un oscillateur paramétrique. Sauf qu'ici, c'est le mode 0 qui va fournir l'énergie nécessaire à l'amplification du mode de surface. Tout comme pour la balançoire, la dynamique du mode de surface est régie

par l'équation de Mathieu. Les paramètres de l'équation de Mathieu sont donnés par l'équation III.37 :  $\omega_0 = \omega_n$  et  $H = n \frac{A_0}{R_0} \left( \frac{\omega_e}{\omega_n} \right)^2$ .

Le diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu présente plusieurs zones de stabilité. Recherchons celle pour laquelle on a un doublement de période en posant :  $\omega = \omega_e/2$  dans l'équation III.37. Le théorème de Floquet nous dit qu'il existe une fonction  $P(t)$  périodique, de pulsation  $\omega_e/2$ , et un réel  $\mu$ , tels que :  $c_n = P(t) \exp(\mu\omega_n t)$ .

Recherchons les  $c_n$  sous la forme  $c_n = C_n \cos\left(\frac{\omega_e}{2}t + \phi_e\right) \exp(\mu\omega_n t)$ . En injectant cette expression dans l'équation III.37, on obtient en ne gardant que les termes pulsant à  $\omega_e$  et en posant  $\Omega = \omega_e/(2\omega_n)$  :

$$[\mu^2 - (\Omega^2 - 1)] \cos\left(\frac{\omega_e}{2}t + \phi_e\right) - 2\mu\Omega \sin\left(\frac{\omega_e}{2}t + \phi_e\right) + \frac{H}{2} \cos\left(\frac{\omega_e}{2}t - \phi_e\right) = 0,$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} [\mu^2 - (\Omega^2 - 1)] + \frac{H}{2} & -2\mu\Omega \\ 2\mu\Omega & [\mu^2 - (\Omega^2 - 1)] - \frac{H}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_e \\ \sin \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si le déterminant de la matrice est nul :

$$\mu^4 + 2\mu^2(\Omega^2 + 1) + (\Omega^2 - 1)^2 - \frac{H^2}{4} = 0$$

Cette équation a pour solutions :

$$\mu_{1,2}^2 = -(\Omega^2 + 1) \pm \sqrt{4\Omega^2 + H^2/4}$$

L'instabilité se développera à condition que  $\mu$  soit un réel positif, c'est-à-dire si  $\mu^2$  est positif. Cela implique que :

$$H^2 > 4(\Omega^2 - 1)^2$$

La transition se fera donc lorsque :

$$\left( \frac{A_0}{R_0} \right)_{seuil} = 2 \left| \frac{1 - \left( \frac{\omega_e}{2\omega_n} \right)^2}{n \left( \frac{\omega_e}{\omega_n} \right)^2} \right| \quad (\text{III.39})$$

L'équation de Mathieu prédit donc que le contour de la bulle développera une instabilité de forme lorsque l'amplitude du mode respiratoire atteindra un certain seuil donné par l'équation III.39. En utilisant l'équation III.15 à fréquence et rayon fixés, on peut faire correspondre à cette amplitude seuil une pression excitatrice seuil  $P_{ac}^{seuil}$ . Pour chaque mode  $n$ , on obtient alors un domaine d'existence en forme de triangle inversé, centré autour de  $2\omega_n$ . Ces domaines d'existence sont communément appelés "langues de Mathieu", du fait de leur forme allongée. Le seuil d'apparition ainsi prédit est nul en  $\omega_e = 2\omega_n$ , contrairement à ce que montre l'expérience (voir les points expérimentaux, figure III.16). Il nous faut donc prendre en compte les termes d'amortissement de la pulsation des modes

pour obtenir une pression seuil théorique non nulle.

### Avec amortissement

Si on ajoute simplement un terme d'amortissement dans l'équation III.37 :

$$\ddot{c}_n + \Gamma \dot{c}_n + \omega_n^2 \left[ 1 + n \frac{A_0}{R_0} \left( \frac{\omega_e}{\omega_n} \right)^2 \cos(\omega_e t) \right] c_n = 0,$$

le même raisonnement que précédemment conduit à une nouvelle expression pour le seuil de l'instabilité :

$$\left( \frac{A_0}{R_0} \right)_{seuil} = \frac{2}{n \left( \frac{\omega_e}{\omega_n} \right)^2} \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega_e}{2\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \frac{\omega_e^2 \Gamma^2}{4\omega_n^2}}. \quad (\text{III.40})$$

Deux types d'amortissement sont envisageables pour la pulsation du mode paramétrique : l'amortissement radiatif vu précédemment, et l'amortissement visqueux, que nous avons jusqu'à présent négligé. Le terme d'amortissement radiatif est donné dans l'équation III.31 par :

$$\Gamma_{rad,n} = \omega \delta_{rad,n} = -\omega \frac{\text{Im} \left( \frac{H_n^{(2)}(kR_0)}{H_n'^{(2)}(kR_0)} \right)}{\text{Re} \left( \frac{H_n^{(2)}(kR_0)}{H_n'^{(2)}(kR_0)} \right)}.$$

Pour la gamme de fréquences et de rayons concernés, on obtient dans le meilleur des cas :  $\Gamma_{rad,n} \leq 10^3 \text{ s}^{-1}$  (pour  $n \geq 4$ ). La pression seuil peut alors être calculée à partir des équations III.15, III.33 et III.40. On trouve alors que le terme d'amortissement radiatif n'est pas suffisant pour obtenir une pression seuil supérieure au kPa.

En supposant que l'amortissement  $\Gamma$  est indépendant du rayon de la bulle et de l'ordre du mode, nous avons cherché les valeurs de  $\Gamma$ ,  $\sigma$  et  $c_R$  pour lesquels nous avons la meilleure concordance entre les domaines d'existence théoriques et expérimentaux. Celle-ci est obtenue pour une vitesse des ondes de Rayleigh  $c_R = 44 \text{ m/s}$ , une tension de surface  $\sigma = 29 \text{ mN/m}$  et un amortissement  $\Gamma = 1,9 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ . Les domaines d'existence théoriques correspondants à ces paramètres sont présentés figure III.16 sous forme de zones colorées.

Habituellement, les langues de Mathieu sont tracées dans un diagramme  $\{H, \omega_e\}$  et les langues obtenues sont symétriques de part et d'autre de la pulsation propre du mode. La dissymétrie des langues de Mathieu théoriques obtenues figure III.16 est due au fait que l'on ne considère plus la variable  $\omega_e$  dans le diagramme, puisque la fréquence d'excitation est fixée dans notre expérience, mais le rayon  $R_0$  de la bulle. Le rayon propre  $R_n$  du mode  $n$  étant proportionnel à  $\omega_n^{-2/3}$ , on obtient une dissymétrie de la pression seuil de part et d'autre du rayon propre du mode.

La pression seuil minimale de chacune des langues de Mathieu est obtenue en  $\omega_e = 2\omega_n$ . On a alors :  $P_{ac}^{seuil} \propto R_0^2 X^{seuil} \propto \Gamma \frac{R_0^2}{2n}$ . Ainsi, si  $\Gamma$  ne dépend pas du rayon, la pression seuil minimale sera croissante avec le rayon de la bulle et donc avec l'ordre du mode. Pour

retrouver une diminution de la pression seuil minimale avec le rayon, comme c'est le cas expérimentalement aux faibles rayons, il faut donc que  $\Gamma$  varie avec le rayon de la bulle.

Sachant que  $a_n = c_n \frac{R_0}{R}$ , nous pouvons déduire que la contribution de cet amortissement  $\Gamma \dot{c}_n$  sera de la forme :  $\Gamma[\dot{a}_n + a_n \frac{\dot{R}}{R}]$  dans l'équation III.36. Ainsi, c'est un amortissement qui aura une double contribution : une en  $\dot{a}_n$  et une en  $a_n$ . Sachant que [Hilgenfeldt et al., 1996] retrouve cette double contribution pour un amortissement de type visqueux dans le cas d'une bulle sphérique, il pourrait donc bien s'agir dans notre cas d'un amortissement visqueux. Il faudra donc reprendre le calcul de cette contribution visqueuse dans le cas 2D se rapprocher d'un modèle plus complet.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence que l'élasticité du PDMS était à prendre en compte pour décrire la vibration d'une bulle confinée entre les deux murs d'un canal microfluidique. En effet, les variations de pression générées par la bulle dans le liquide vont déformer les murs du canal d'autant plus qu'ils seront flexibles. La bulle se comporte alors comme un réémetteur secondaire d'ondes de Rayleigh. L'existence de ces ondes de surface induit un confinement supplémentaire de la bulle : celle-ci vibre comme si elle était dans une cuve cylindrique de liquide, de rayon :

$$S = \lambda/2\pi = c_R/\omega.$$

Nous avons montré que le terme d'amortissement radiatif 2D lié au rayonnement de ces ondes de Rayleigh dominait par rapport aux termes d'amortissement thermique ou visqueux. Le facteur de qualité de la bulle est donc essentiellement contrôlé par l'amortissement radiatif et a tendance ainsi à augmenter avec la distance de confinement  $S$ . Cela paraît en effet instinctif : moins la bulle sera confinée, plus elle pourra vibrer. Ainsi, pour augmenter le facteur de qualité de la bulle, on pourra chercher à augmenter le module d'Young du matériau constituant le canal, ou à travailler à faible fréquence.

D'autre part, nous avons montré qu'aux fortes amplitudes d'excitation, les modes de surface observés sur une bulle isolée étaient paramétriques. La dynamique de ces modes est contrôlée par la tension de surface : plus celle-ci sera grande et plus il faudra descendre aux faibles fréquences d'excitation ou aux faibles rayons de bulles pour espérer voir les modes d'ordres les plus bas. Nous avons mis en évidence que la distance de confinement  $S$  n'avait qu'un effet très faible sur la dynamique des modes. Enfin, nous avons pu établir un diagramme expérimental donnant accès aux domaines d'existence des différents modes. On retrouve alors les "langues de Mathieu" caractéristiques de l'oscillateur paramétrique, qui sont prévues par la théorie à condition de prendre en compte un terme d'amortissement, que l'on suppose ici d'origine principalement visqueuse.

Nous avons ici montré la diversité des modes de vibration accessibles pour une bulle isolée excitée à des amplitudes modérées. Nous allons maintenant nous intéresser aux écoulements hydrodynamiques générés par ces différents modes de vibration.

# IV. ÉCOULEMENT REDRESSÉ AUTOUR DE BULLES CONFINÉES

---

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'écoulement hydrodynamique généré par chacun des modes de vibration de la bulle confinée. Dans une première partie, nous passerons en revue les différents écoulements possibles autour d'une bulle unique. Puis nous chercherons dans une seconde partie à combiner les modes de vibration pour générer des écoulements à plus longue portée.

## 1 Écoulements autour d'une bulle confinée

Nous avons déterminé dans le chapitre précédent quels étaient les modes de vibration mis en jeu lorsqu'on avait une bulle toute seule au centre du canal microfluidique. Dans cette partie, nous nous allons nous intéresser aux écoulements générés par ces modes de vibration.

### 1.1 Effet de la vibration monopole

Regardons tout d'abord ce qu'il se passe dans un liquide en écoulement, autour d'une bulle exhibant uniquement un mode respiratoire (voir figure IV.1). Des billes fluorescentes (Yellow-Green Fluoresbrite, Polysciences Inc.) ont été ajoutées dans le liquide pour pouvoir suivre les écoulements.

Lorsque les billes arrivent à proximité de la bulle, *i.e.* à une distance comparable à la taille de la bulle, elles sont d'abord attirées par la bulle, puis rebondissent à plusieurs reprises sur la paroi de la bulle tout en étant advectées par le liquide. Cela donne lieu à des recirculations en forme de boucles, lorsqu'on observe l'écoulement dans le plan du canal (figure IV.1a). Les billes finissent leur course derrière la bulle, où elles continuent à rebondir. À force d'attirer les nouvelles billes amenées par le flux de liquide, on se retrouve avec une quantité de billes de plus en plus importante derrière la bulle. Il suffit alors qu'une seule bille vienne donner un coup dans le tas pour qu'on ait une expulsion d'un ensemble de billes dans le liquide. La bulle se comporte ainsi comme un attracteur axisymétrique qui relargue par à-coups les billes dans le sens du flux de liquide. Autrement dit, la bulle va récupérer les billes autour d'elle et les concentrer derrière elle (figure IV.1c).

Lorsqu'on diminue le débit de liquide, on perçoit alors uniquement l'écoulement dû à la vibration monopole de la bulle (figure IV.1b). Vues de dessus, les boucles qui apparaissaient à grand débit de liquide deviennent des trajectoires rectilignes. Il semblerait donc que les billes suivent des tourbillons qui ne sont pas dans le plan du canal, mais perpendiculaires à celui-ci. C'est pourquoi nous avons cherché à observer l'écoulement dans la tranche du canal.

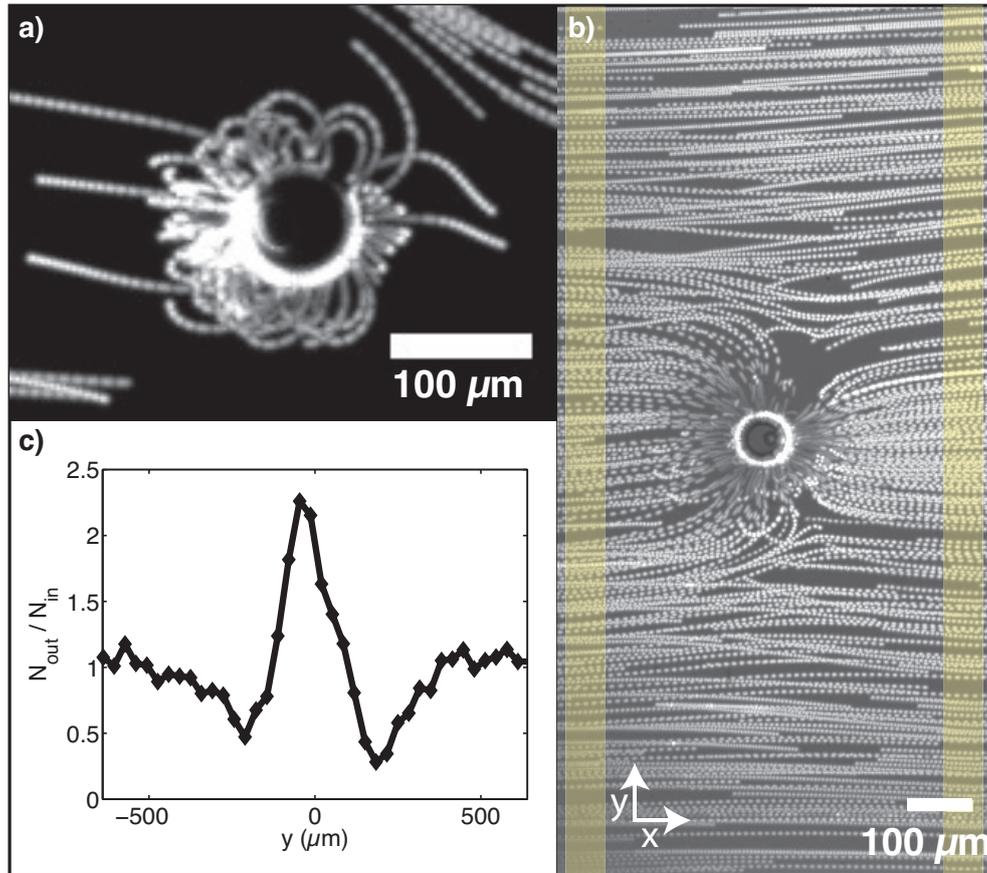


FIGURE IV.1 – Écoulement autour d’une bulle exhibant une simple pulsation monopole ( $n = 0$ ). Les photos présentées sont une superposition des images successives de la vidéo de l’écoulement prise en épifluorescence, les billes (ici de diamètre  $d_b = 6 \mu\text{m}$ ) apparaissent donc sous la forme de traits blancs. (a) Boucles de recirculation 3D autour d’une bulle de rayon  $R_0 = 40 \mu\text{m}$  excitée à une fréquence  $f = 115 \text{ kHz}$ , le débit de liquide étant de  $80 \mu\text{L}/\text{min}$ . (b) Écoulement autour d’une bulle de rayon  $R_0 = 34 \mu\text{m}$  excitée à une fréquence  $f = 104 \text{ kHz}$ , le débit de liquide étant de  $2 \mu\text{L}/\text{min}$ . (c) Distribution des billes après passage par la bulle (b) en fonction de l’axe vertical  $y$ .  $N_{out}(y)$  et  $N_{in}(y)$  désignent respectivement le nombre de billes passant dans les rectangles jaunes droite et gauche au cours de la vidéo.

## 1.2 Écoulement dans la tranche du canal

### Modification du dispositif expérimental

Pour visualiser la trajectoire des billes dans la tranche du canal, nous avons utilisé un prisme à angle droit de dimension  $3 \times 3 \text{ mm}$  (Thorlabs). Celui-ci est déposé sur la lame de verre qui sert de support au canal, et positionné contre la paroi externe de la puce microfluidique (voir figure IV.2). Pour que l’image de la bulle et des billes soit nette, les interfaces se trouvant entre la bulle et le prisme doivent être parfaitement planes. Or la paroi externe de la puce microfluidique est généralement très rugueuse puisqu’elle est découpée au scalpel. C’est pourquoi nous avons rajouté les morceaux d’une lame de verre d’épaisseur  $1 \text{ mm}$  à proximité du canal avant de couler le PDMS liquide dans son moule. Ces cales sont positionnées à quelques dixièmes de millimètre seulement du canal afin de

diminuer la distance de travail entre l'objectif du microscope et la bulle, et permettre de faire la mise au point sur la bulle.

A cause de la fine couche d'air existant entre le prisme et la paroi externe de la puce microfluidique, une grande partie de la lumière incidente est réfléchiée vers le canal, ce qui nous empêche de voir la bulle. Pour éviter ces réflexions, nous avons ajouté un film d'huile silicone de viscosité 50 cSt, dont l'indice de réfraction est compris entre celui du verre et celui du PDMS, entre le prisme et la paroi externe de la puce.

La bulle et les billes peuvent être éclairées de trois façons :

- par le dessus du canal avec la lumière blanche du microscope (trajectoire n°1 sur la figure IV.2), pour vérifier que la bulle exhibe uniquement un mode respiratoire,
- par le côté du canal à l'aide d'une fibre optique et d'une lentille convergente (trajectoire n°2 sur la figure IV.2), pour se mettre dans le plan focal de la bulle,
- par le dessous du canal en illumination épifluorescente avec le microscope inversé et une lampe à mercure (Olympus U-RFL-T) : cela permet de visualiser l'écoulement des billes par fluorescence et de distinguer les billes à proximité de la paroi de la bulle.

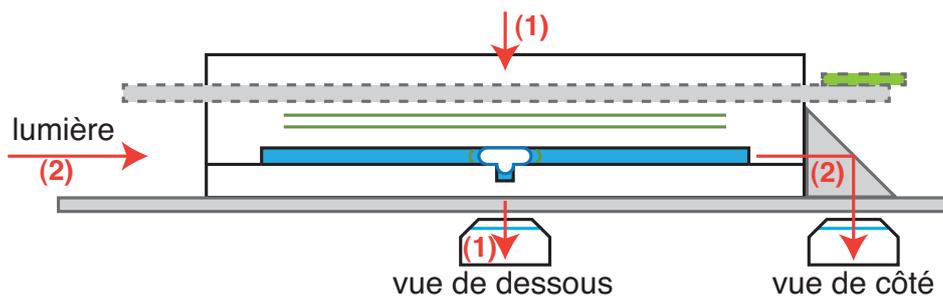


FIGURE IV.2 – Dispositif expérimental permettant la visualisation des trajectoires des billes dans la tranche du canal. Un prisme à angle droit est positionné sur le côté du canal et réfléchit la lumière fluorescente émise par les billes vers l'objectif du microscope.

### Écoulements dans la tranche du canal

La figure IV.3a montre la trajectoire de billes de  $6\ \mu\text{m}$  de diamètre autour d'une bulle excitée à une fréquence  $f = 130\ \text{kHz}$ , avec une amplitude d'excitation  $A = 23\ \text{V}$ , pour un flux de liquide allant de la droite vers la gauche. Dans ces conditions d'excitation, la vibration de la bulle se réduit à son mode respiratoire. La photo de la bulle sous lumière blanche a été superposée aux images d'une vidéo montrant la lumière fluorescente émise par les billes à différents instants (taches blanches). Cette vidéo a été prise avec une fréquence d'acquisition de 500 Hz.

Plusieurs billes sont piégées dans le trou d'ancrage de la bulle et créent un halo lumineux au centre de celle-ci. Une autre bille, en haut à gauche de la bulle, évolue librement dans le canal et suit une trajectoire elliptique anti-horaire à proximité de la bulle. Les différentes positions de cette bille ont été repérées en jaune et le sens de rotation est

indiqué par une flèche. Les taches blanches situées au-dessus du mur du canal sont dues à la réflexion de la lumière fluorescente émise par cette même bille au niveau du mur du canal.

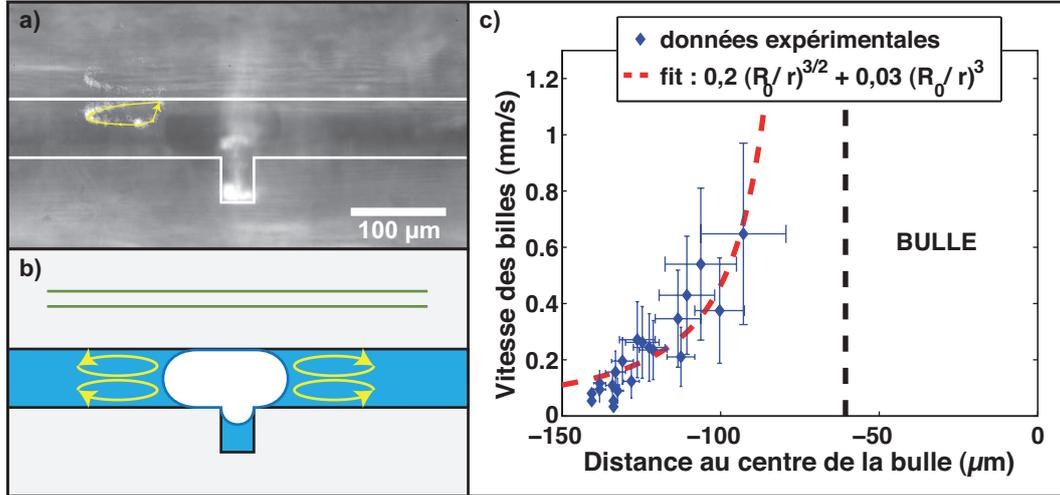


FIGURE IV.3 – Trajectoire de billes (diamètre  $d_b = 6 \mu\text{m}$ ) autour d'une bulle, avec vue dans la tranche du canal ( $h = 60 \mu\text{m}$ ) : (a) Superposition de la photo en lumière blanche d'une bulle exhibant un mode 0 avec les images successives de fluorescence d'une même bille (taches blanches) au cours de sa trajectoire autour de cette bulle. Les murs du canal sont déduits de l'image sous lumière blanche et représentés par des lignes blanches. La bille en haut à gauche de la bulle suit une trajectoire anti-horaire (boucle jaune); (b) Par symétrie, on en déduit la présence de deux tourbillons toriques contrarotatifs dans les moitiés supérieure et inférieure du canal, avec un flux rentrant vers la bulle au milieu du canal et un flux sortant au niveau des murs; (c) Vitesse des billes en fonction de la distance au centre de la bulle et sa courbe d'ajustement en :  $y = b_1(R_0/r)^{-3/2} + b_2(R_0/r)^{-3}$ , avec  $r$  la distance à la paroi de la bulle.

Plusieurs trajectoires de billes ont pu être analysées, mais seules des trajectoires situées dans la moitié supérieure du canal ont pu être observées. On peut tout de même reconstruire par symétrie l'allure de l'écoulement (voir figure IV.3b) : deux tourbillons contrarotatifs en forme de tore se développeraient ainsi autour de la bulle, l'un dans la moitié supérieure du canal, l'autre dans la moitié inférieure. Le flux de liquide serait alors rentrant au centre du canal, et sortant au niveau des murs.

A partir des différentes trajectoires de billes obtenues, nous avons mesuré les positions successives des billes. Le module de la vitesse est alors obtenu en calculant la distance parcourue entre deux positions successives de la bille et en la multipliant par la fréquence d'acquisition de la caméra. La distance de la bille par rapport au centre de la bulle est d'autre part calculée en prenant la composante horizontale (dans le plan du canal) de la position moyenne entre les deux positions successives. L'évolution du module de la vitesse des billes avec la distance à la bulle est reportée figure IV.3c. Certaines trajectoires de bille étant en biais par rapport au plan d'observation, cela conduit à une erreur supplémentaire sur la distance réelle à la bulle. C'est pourquoi nous obtenons une grande dispersion des points expérimentaux. Nous retiendrons cependant que la vitesse des billes croît lorsque la bille s'approche de la bulle et peut atteindre jusqu'à 1 mm/s, même lorsque la bulle n'exhibe qu'une vibration monopole.

### 1.3 De l'origine de l'écoulement dans la tranche

Nous avons vu précédemment dans I.2.2.2 qu'un écoulement redressé pouvait apparaître lorsqu'une onde acoustique rencontrait une paroi solide ou bien quand une paroi solide se mettait à vibrer. Dans notre cas, nous avons une onde acoustique primaire générée par la lame de verre. Mais nous sommes aussi en présence de deux couches limites oscillantes : la paroi de la bulle via la pulsation monopole, et le mur du canal via les ondes de Rayleigh. D'après la loi de Rayleigh, la vitesse de glissement à l'extrémité de la couche limite oscillante est proportionnelle au produit de la vitesse tangentielle à la paroi  $U_x$  et du gradient de cette vitesse :

$$U_g = -\frac{3}{4\omega} U_x \partial_x U_x,$$

où  $x$  est la coordonnée qui est le long de la paroi. Il suffit d'avoir une idée de l'amplitude de la vitesse de glissement dans chacun de ces cas pour savoir lequel de ces trois écoulements est observable sur le temps d'une expérience, c'est-à-dire pour des échelles de temps de l'ordre de quelques dizaines de secondes.

#### Effet de l'onde acoustique primaire

Commençons par l'onde stationnaire primaire dans le liquide. Celle-ci est générée par la lame de verre sur laquelle se développe des ondes de Lamb. Ces ondes se propagent ensuite dans le PDMS puis dans l'eau. La hauteur du canal étant bien plus petite que la longueur d'onde du son dans l'eau, on ne s'attend pas à voir d'écoulement généré sur les murs verticaux du canal. Intéressons nous maintenant aux parois horizontales du canal. Pour que la vitesse de l'onde de compression générée par la lame ait une composante tangentielle non nulle, il faudrait que la lame ne soit pas tout à fait horizontale mais légèrement inclinée. Nous allons maintenant montrer que même dans ce cas, l'écoulement généré serait trop faible pour être observé.

La pression générée par ces ondes dans le liquide peut s'exprimer sous la forme :  $p_{inc} = P_{ac} \sin(kx)$ , ce qui nous donne accès à la vitesse  $U_{inc}^{max} = P_{ac}/(\rho c_V)$ , où  $c_V$  représente la vitesse des ondes de Lamb dans le verre. C'est bien la vitesse dans le verre qui compte puisque c'est elle qui fixe la longueur d'onde de l'onde stationnaire. D'autre part, le gradient de vitesse peut être estimé par  $(\nabla U_{inc})^{max} \simeq 4U_{inc}^{max}/\lambda_V$ . Pour une pression acoustique  $P_{ac}$  de l'ordre du kPa et une fréquence d'excitation de 100 kHz, la vitesse de glissement maximale engendrée par le champ acoustique primaire est donc de l'ordre de :

$$U_g^{Primaire} \simeq 10^{-9} \text{ m/s.}$$

Théoriquement, pour une expérience menée sur quelques secondes, nous ne devrions donc pas observer les écoulements engendrés par l'onde acoustique primaire. C'est en effet ce que l'on observe expérimentalement : en l'absence de bulle, aucun écoulement n'est observable à notre échelle de temps.

#### Effet de la vibration monopole de la bulle

Intéressons nous maintenant à la bulle. Dans notre cas, la bulle est entourée d'un film de mouillage. En pulsant, elle devrait donc entraîner le fluide uniformément sur la tranche

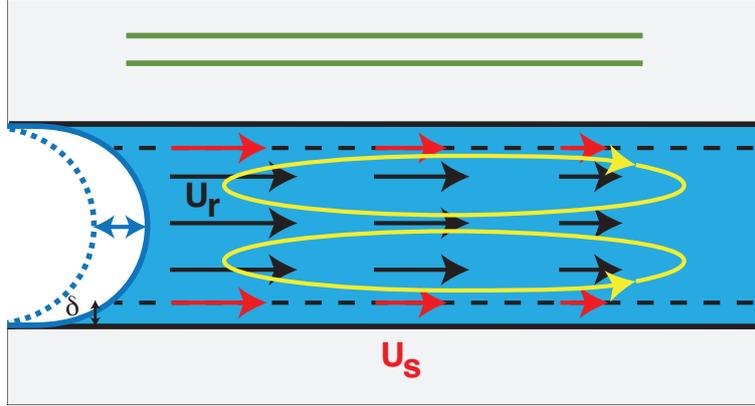


FIGURE IV.4 – Schéma explicatif de l'écoulement redressé 3D autour d'une bulle isolée. Dans le cas où on a un film de mouillage autour de la bulle, la paroi de la bulle se déplace en bloc et génère un gradient de vitesse  $\partial_r U_r$  dans le plan du canal. La vitesse de glissement  $U_s$  induite est dirigée vers l'extérieur de la bulle et décroît avec  $r$ . Le liquide à l'extérieur de la couche limite est alors entraîné, générant des tourbillons à grandes distances de la bulle (streaming de Rayleigh).

du canal, avec un raccordement se faisant à proximité des murs du canal, créant ainsi un écoulement de type "bouchon" (voir figure IV.4). La vitesse générée par la pulsation de la bulle dans le liquide décroît alors avec la distance à la bulle :

$$U_r(r) = \text{Re} \left( j\omega \frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kR_0)} A_0 e^{j\omega t} \right)$$

Après calcul du gradient de vitesse  $\partial_r U_r$ , on peut déduire la vitesse de l'écoulement redressé en utilisant la loi de Rayleigh :

$$U_s^{Bulle}(r) = -\frac{3}{8} k\omega A_0^2 \frac{\text{Re}(H_1^{(2)*}(kr)H_1^{(2)}(kr))}{|H_1^{(2)}(kR_0)|^2},$$

où  $H_1^{(2)*}$  représente le conjugué de  $H_1^{(2)}$ . Nous avons tracé  $U_s(r)$  figure IV.5. Pour des rayons faibles par rapport à la longueur d'onde ( $kr \ll 1$ ), la vitesse au premier ordre est une superposition d'ondes propagatives déphasées, ce qui donne à l'ordre 2 un écoulement moyen non nul :

$$U_s^{Bulle}(r) \propto 1/r^3,$$

avec une vitesse de glissement :  $U_g^{Bulle} \simeq 10^{-2}$  m/s. Le liquide à l'extérieur de la couche limite oscillante se retrouve alors entraîné, générant ainsi des tourbillons à proximité de la bulle.<sup>1</sup>

1. Du fait des ondes de Rayleigh générées par la bulle, la condition limite à la paroi solide est une condition de non-glissement. Par conséquent, on ne s'attendra pas à voir de tourbillons de couche interne, comme on peut en voir dans le cas d'une paroi solide fixe. Une étude plus détaillée devra être menée pour connaître l'effet exact de cette onde de Rayleigh sur l'écoulement.

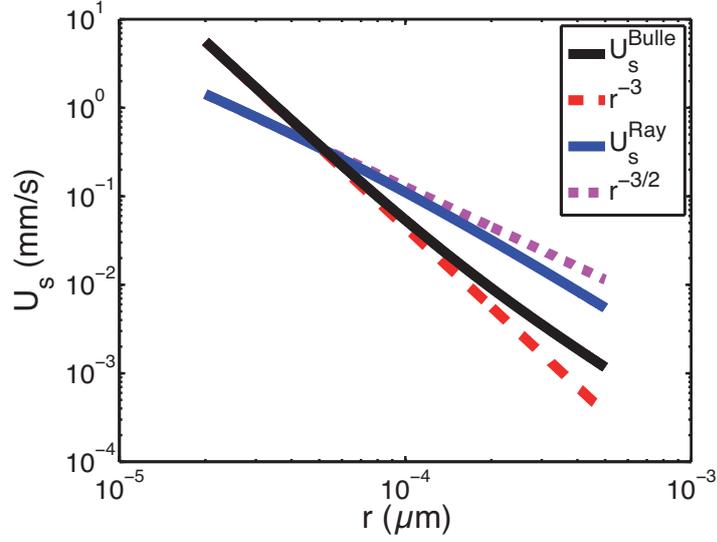


FIGURE IV.5 – Vitesse de l'écoulement redressé à l'extérieur de la couche limite causé par le gradient de vitesse radiale généré par la bulle ( $U_s^{Bulle}$ , courbe noire) ou causé par la déformation des murs lors du passage de l'onde de Rayleigh ( $U_s^{Ray}$ , courbe bleue). Pour  $kr \ll 1$ , on obtient  $U_s^{Bulle} \propto r^{-3}$  (pointillés rouges) et  $U_s^{Ray} \propto r^{-3/2}$  (pointillés magenta).

### Effet de l'onde de Rayleigh

De la même façon que précédemment, on peut calculer la contribution des ondes de Rayleigh à l'écoulement. A partir des équations III.3 et III.11, on peut exprimer la vitesse d'oscillation des murs du canal, lors du passage des ondes de Rayleigh :

$$U_h = \text{Re} \left( -j\omega \frac{\alpha}{E} \frac{\rho\omega^2}{k} h_0 \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kR_0)} a_0 e^{j\omega t} \right)$$

On obtient alors comme vitesse d'écoulement redressé :

$$U_s^{Ray}(r) = -\frac{27}{8} \frac{\rho^2 \omega^5 h_0^2}{kE^2} A_0^2 \frac{\text{Re}(H_0^{(2)*}(kr)H_0^{(2)}(kr))}{|H_1^{(2)}(kR_0)|^2},$$

où  $H_0^{(2)*}$  représente le conjugué de  $H_0^{(2)}$ . On a tracé figure IV.5 l'évolution de  $U_s^{Ray}$  en fonction de la distance  $r$  à la bulle. On obtient alors une décroissance en :

$$U_s^{Ray}(r) \propto 1/r^{(3/2)},$$

avec une valeur maximale à la surface du canal :  $U_s^{Rayleigh} \simeq 10^{-4}$  m/s.

En conclusion, l'écoulement redressé dominant aux courtes distances est bien celui causé par la vibration monopole de la bulle. Nous avons ajusté la courbe de vitesse des bulles avec le modèle combinant les effets de la vibration monopole et de l'onde de Rayleigh :  $y = b_1(R_0/r)^{-3/2} + b_2(R_0/r)^{-3}$ , avec  $r$  la distance à la paroi de la bulle (voir

figure IV.3c). On détermine ainsi les paramètres  $b_1 = 0,2$  mm/s et  $b_2 = 0,03$  mm/s, qui nous donnent accès à la distance à partir de laquelle les ondes de Rayleigh commencent à avoir plus d'effet que la pulsation monopole :  $r = R_0(b_2/b_1)^{2/3} \simeq 20 \mu\text{m}$ . La portée de l'écoulement observé étant d'environ  $100 \mu\text{m}$ , on a donc ici une combinaison de deux effets : celui de la pulsation monopole et celui des ondes de Rayleigh.

#### 1.4 Effet des modes paramétriques

Lorsque la bulle exhibe des modes de surface paramétriques en plus de sa vibration monopole, de nouveaux tourbillons apparaissent cette fois-ci dans le plan du canal (voir figure IV.6a). Pour pouvoir discerner les billes proches de la paroi de la bulle, nous avons travaillé en fluorescence. Le temps d'exposition utilisé est alors de l'ordre de 10 ms, ce qui ne permet pas de résoudre les modes. Ainsi, soit les modes restent fixes et on perçoit les ventres et les noeuds de vibration, soit ils tournent et le contour de la bulle apparaît flou. La figure IV.6a montre donc la trajectoire de billes de  $6 \mu\text{m}$  de diamètre autour d'un mode  $n = 4$ . On observe que les nouveaux tourbillons se développent entre les noeuds et les ventres de vibration du mode. Les billes se déplacent vers la bulle au niveau des ventres de vibration et s'en éloignent au niveau des noeuds, comme schématisé par les trajectoires bleues figure IV.6c.

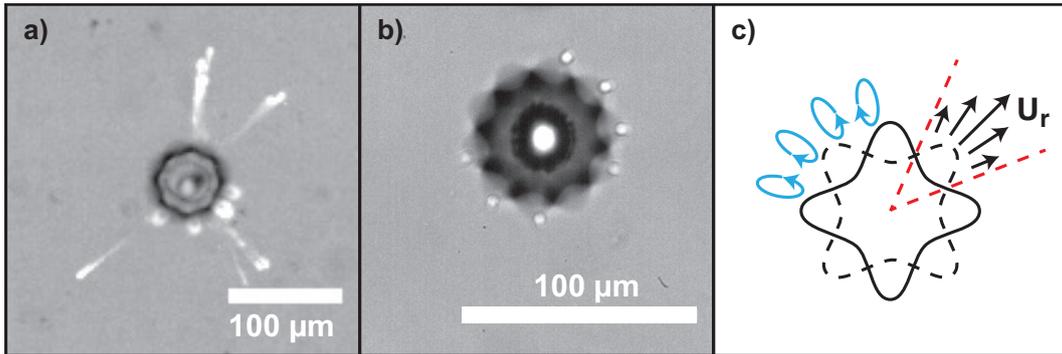


FIGURE IV.6 – Écoulement autour d'une bulle exhibant à la fois une vibration monopole et un mode de surface paramétrique : (a) pour un flux de liquide quasi-nul dans le canal ( $n = 4$ ,  $f = 148$  kHz,  $A = 7$  V,  $d_b = 3 \mu\text{m}$ ), de nouveaux tourbillons apparaissent près des modes, en plus des tourbillons générés par la pulsation monopole dans la tranche (segments clairs sur l'image); (b) pour un débit de liquide  $Q_l = 100 \mu\text{L}/\text{min}$  dans le canal ( $n = 5$ ,  $f = 124$  kHz,  $A = 50$  V,  $d_b = 6 \mu\text{m}$ ), seuls les tourbillons générés par les modes sont assez puissants pour contrebalancer le champ de vitesse externe. (c) Représentation schématique de l'écoulement généré par les modes de surface dans le cas  $n = 4$  : les tourbillons (trajectoires bleues) se développent entre les ventres et les noeuds de vibration.

Ces tourbillons sont de courte portée puisqu'ils ont une taille comparable à celle des modes. Leur largeur est donnée par le quart de la longueur d'onde des modes :

$$\frac{\lambda_{modes}}{4} = \frac{\pi}{2n} \left( (n-1)n(n+1) \frac{\sigma}{\rho\omega^2} \right)^{1/3}$$

Celle-ci décroît en  $f^{-2/3}$  et varie d'environ  $15 \mu\text{m}$  pour  $f = 30$  kHz à environ  $5 \mu\text{m}$  pour  $f = 200$  kHz. Ainsi, les billes de  $6 \mu\text{m}$  de diamètre ne vont pas suivre exactement l'écou-

lement généré par la bulle, comme montré dans [Wang et al., 2011], mais pourront par exemple passer d'un tourbillon de mode paramétrique à un tourbillon de mode respiratoire.

Les vitesses de liquide mises en jeu dans ces tourbillons de mode paramétrique sont de l'ordre de quelques mm/s. Cela est dû à la fois à la grande amplitude des modes paramétriques, pouvant aller jusqu'à plusieurs  $\mu\text{m}$ , et à la faible distance séparant l'extrémité du tourbillon et la bulle. Ainsi, lorsqu'on augmente le débit de liquide dans le canal, seuls les tourbillons liés aux modes paramétriques subsistent (voir figure IV.6b) : on obtient alors un piège à micro-objets très efficace. Lorsque les modes tournent, la position des tourbillons tourne, entraînant les billes avec elles. Nous reviendrons plus tard sur les conséquences de cette possible rotation.

## 2 Interaction hydrodynamique de modes

Pour créer des écoulements à plus longue portée, nous avons cherché à faire interagir des bulles ensemble. Le cas le plus simple est celui de la paire de bulle. Dans un premier temps, nous allons exposer les résultats expérimentaux obtenus pour la paire de bulles. Nous présenterons la forme de l'écoulement observé autour de la paire et analyserons en parallèle les vibrations des modes pour les deux bulles. Dans un deuxième temps, nous chercherons à comprendre l'origine des modes de vibration observés sur la paire de bulle. Puis nous proposerons un modèle théorique pour l'écoulement redressé. Enfin, nous dresserons un diagramme théorique d'existence des motifs d'écoulement que nous comparerons aux expériences.<sup>2</sup>

### 2.1 Écoulements redressés autour d'une paire de bulles

Deux bulles ont été piégées sur deux trous séparés d'une distance  $D = 200 \mu\text{m}$ . Pour une fréquence d'excitation  $f = 50 \text{ kHz}$  et une amplitude d'excitation  $A = 22 \text{ V}$ , aucun mode paramétrique n'est excité sur le pourtour des deux bulles. Des billes de  $3 \mu\text{m}$  de diamètre ont été ajoutées au liquide pour suivre l'écoulement redressé généré par la paire de bulles. Les différentes images obtenues ont été superposées pour donner la figure IV.7a. Le sens de recirculation des billes y est spécifié par des flèches noires.

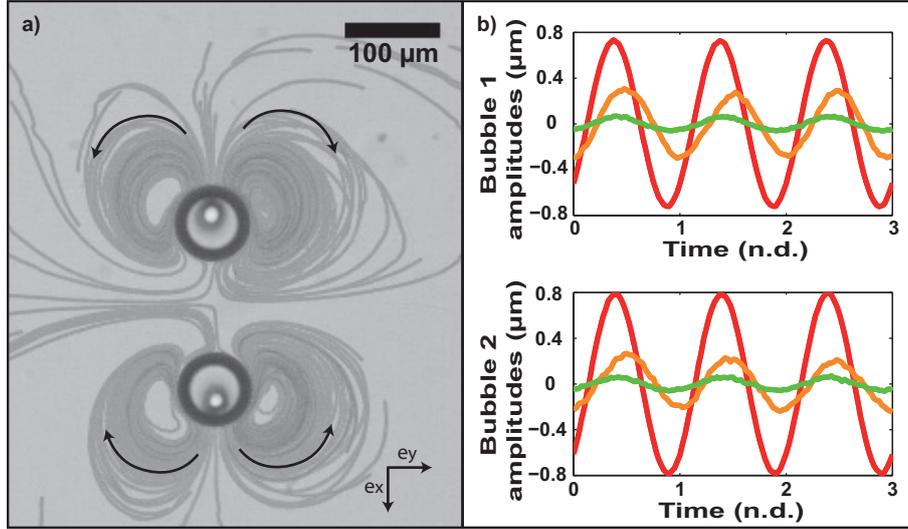


FIGURE IV.7 – (a) Écoulement redressé de type "fontaine" autour d'une paire de bulles de rayons  $R_0 = 35 \mu\text{m}$ , séparées d'une distance  $D = 200 \mu\text{m}$  et excitées à une fréquence  $f = 50 \text{ kHz}$ . Les flèches noires indiquent le sens des trajectoires des billes ( $d_b = 3 \mu\text{m}$ ). (b) Amplitude  $a_n(t)$  des modes dominants  $n = 0$  (rouge),  $n = 1$  (orange) et  $n = 2$  (vert) de la bulle n°1 (en haut de la figure (a)) et de la bulle n°2 (en bas de la figure (a)). Le mode de translation  $n = 1$  est amplifié par rapport au cas de la bulle seule et est déphasé du mode 0 de  $\Delta\phi^{(1,0)} = \phi_1 - \phi_0 \simeq -0,2\pi$ . La phase spatiale du mode 1 est de  $\psi_1^{B1} = \pi$  pour la bulle n°1 et de  $\psi_1^{B2} = 0$  pour la bulle n°2, l'origine des angles étant prise selon l'axe  $x$ .

On observe la formation d'une paire de tourbillons contrarotatifs autour de chacune

2. Les résultats présentés dans cette sous-partie sont réunis dans l'article intitulé "Interactions enhance the acoustic streaming around flattened microfluidic bubbles" actuellement soumis.

des deux bulles. Ces tourbillons se développent dans le plan du canal. Les billes sont expulsées selon l'axe des deux bulles vers l'extérieur de la paire, et sont attirées vers la paire au niveau de ses flans. On remarque d'autre part que les deux bulles s'attirent, comme le montre la position de leur centre par rapport aux trous d'ancrage, figure IV.7a.

Pour comprendre d'où viennent ces nouveaux tourbillons, nous avons analysé les modes de vibration de chacune des deux bulles. L'évolution temporelle des amplitudes  $a_n(t)$  des modes  $n = 0$  (rouge),  $n = 1$  (orange) et  $n = 2$  (vert) ont été reportées figure IV.7b. Ces modes ne sont pas des modes paramétriques puisqu'ils pulsent à la même fréquence que l'excitation. Pour avoir une bonne résolution du mode de translation, nous avons utilisé l'objectif de microscope  $\times 40$ . On remarque que les deux bulles ont le même comportement et qu'elles ont toutes les deux un mode de translation  $n = 1$  très marqué, son amplitude étant seulement deux fois moindre que celle du mode respiratoire. De plus, les modes 0 et 1 sont déphasés de  $\Delta\phi^{(1,0)} = \phi_1 - \phi_0 \simeq -0,2\pi$ . Les modes d'ordre supérieur à  $n = 2$  ont quant à eux une amplitude trop faible pour être détectée.

En augmentant la fréquence d'excitation, d'autres motifs ont pu être observés. Par exemple, pour une fréquence d'excitation  $f = 120$  kHz, nous obtenons deux paires de tourbillons plus écrasés selon l'axe de la paire, avec un sens d'écoulement contraire à celui observé précédemment (voir figure IV.8a). L'analyse des modes révèle une diminution du rapport d'amplitude entre le mode 1 et le mode 0. Il est quand même possible de déterminer une différence de phase entre ces deux modes. Celle-ci vaut environ  $\Delta\phi^{(1,0)} \simeq +0,2\pi$ .

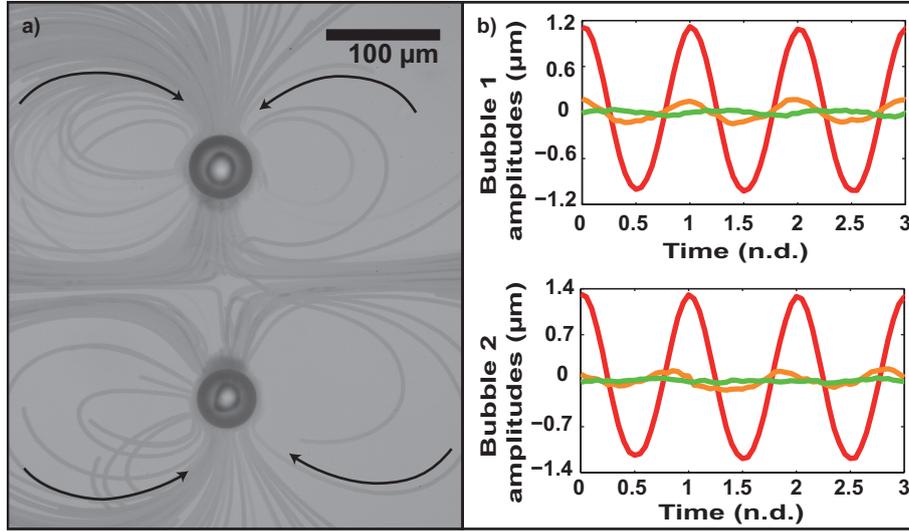


FIGURE IV.8 – (a) Ecoulement redressé de type "anti-fontaine" autour d'une paire de bulles de rayons  $R_0 = 25 \mu\text{m}$ , séparées d'une distance  $D = 200 \mu\text{m}$  et excitées à une fréquence  $f = 120$  kHz. Les flèches noires indiquent le sens des trajectoires des billes ( $d_b = 3 \mu\text{m}$ ). (b) Amplitude  $a_n(t)$  des modes dominants  $n = 0$  (rouge),  $n = 1$  (orange) et  $n = 2$  (vert) de la bulle n°1 (en haut de la figure (a)) et de la bulle n°2 (en bas de la figure (a)). Le mode de translation  $n = 1$  est déphasé du mode 0 de  $\Delta\phi_{B1}^{(1,0)} \simeq +0,2\pi$ . La phase spatiale du mode 1 est de  $\psi_1^{B1} = \pi$  pour la bulle n°1 et de  $\psi_1^{B2} = 0$  pour la bulle n°2, l'origine des angles étant prise selon l'axe  $x$ .

Nous avons donc identifié la présence de deux tourbillons contrarotatifs autour de

chaque bulle de la paire. Dans la suite, on qualifera de "fontaine" les écoulements redressés pour lesquels on a un flux sortant au niveau de l'axe de la paire, comme dans le cas de la figure IV.7a. Et on qualifera d' "anti-fontaine" ceux pour lesquels le flux est entrant au niveau de l'axe de la paire, comme dans le cas de la figure IV.8a.

Nous allons maintenant chercher à comprendre d'où vient ce mode de translation et son déphasage en reprenant le modèle proposé dans la partie III.2 et en l'appliquant à la paire de bulles.

## 2.2 Interaction entre deux bulles : l'apparition de nouveaux modes

Soient deux bulles de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  positionnées respectivement en  $x_1 = -D/2$  et  $x_2 = +D/2$ , dans le repère  $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , comme représenté figure IV.9. On suppose que les deux bulles ne présentent aucun mode de surface paramétrique. On va chercher à comprendre si le mode 0 de la bulle n°2 peut générer d'autres modes de vibration au niveau de la bulle n°1.

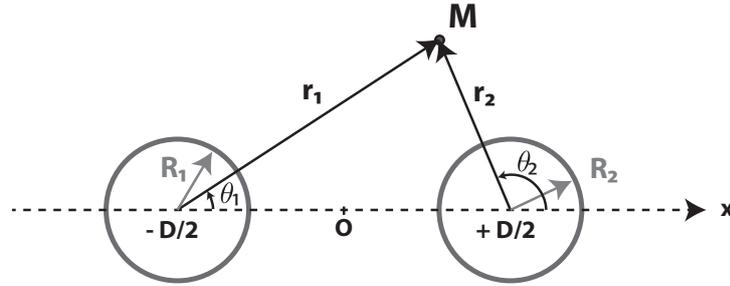


FIGURE IV.9 – Représentation schématique des deux bulles. Un point  $M$  dans le liquide peut être repéré soit dans le repère associé à la bulle n°1 par les coordonnées polaires  $(r_1, \theta_1)$ , soit dans celui associé à la bulle n°2 par les coordonnées polaires  $(r_2, \theta_2)$ .

### Pression générée par la bulle n°2 sur la bulle n°1

La pression générée par la vibration monopole de la bulle n°2 dans le liquide s'écrit dans le repère associé à la bulle n°2 :

$$\bar{p}_{B2}(r_2) = -\frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr_2)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2}$$

Sachant que  $\mathbf{r}_1 = D\mathbf{e}_x + \mathbf{r}_2$  (voir figure IV.9), on peut exprimer  $\bar{p}_{B2}$  dans le repère associé à la bulle n°1. La pression ressentie au niveau de la paroi de la bulle n°1 s'écrit alors en coordonnées polaires  $(r_1, \theta_1)$  :

$$\bar{p}_{B2}(r_1 = R_1) = -\frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_0^{(2)}\left(kD\sqrt{1 - 2\frac{R_1}{D}\cos\theta_1 + \left(\frac{R_1}{D}\right)^2}\right)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2}.$$

En supposant que les deux bulles sont éloignées de plusieurs fois leur rayon, on peut

poser  $\epsilon_D = R_1/D \ll 1$ . La pression  $\bar{p}_{B2}$  est développable en série de Taylor autour de  $kD$ , ce qui donne en s'arrêtant à l'ordre 1 en  $\epsilon_D$  :

$$\bar{p}_{B2}(r_1 = R_1) = -\frac{\rho_f \omega^2}{k} \left( \frac{H_0^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} + kD \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \epsilon_D \cos \theta_1 \right) \bar{a}_0^{B2}.$$

En conclusion, la vibration monopole de la bulle n°2 va donc agir comme une source excitatrice pour les différents modes de la bulle n°1. L'amplitude du terme source du mode  $n$  sera alors proportionnel à  $\epsilon_D^n$ . Ainsi, la vibration monopole et le mode de translation seront les deux modes les plus affectés par la présence d'une bulle voisine. Il est à noter que ces modes excités sont des modes non-paramétriques : ils pulsent donc à la même fréquence que l'excitation primaire.

### Vibration monopole d'une paire de bulles

On peut donc rajouter ce terme source dans l'équation de la bulle isolée (équation III.15). L'équation de la vibration monopole de la bulle n°1 s'écrit alors :

$$\left[ -\frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_0^{(2)}(kR_1)}{H_1^{(2)}(kR_1)} + \frac{2\gamma p_0}{R_1} \right] \bar{a}_0^{B1} = -\bar{P}_{ac} + \frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_0^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2}.$$

En faisant le même raisonnement sur l'autre bulle, on obtient le système d'équations suivant pour la paire de bulles :

$$\begin{pmatrix} M(R_1, R_1) + K(R_1) & M(D, R_2) \\ M(D, R_1) & M(R_1, R_1) + K(R_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_0^{B1} \\ \bar{a}_0^{B2} \end{pmatrix} = -\bar{P}_{ac} \mathbf{I}_2 \quad (\text{IV.1})$$

avec  $\mathbf{I}_2$  le vecteur unité et  $M$  et  $K$  les fonctions suivantes :

$$M(r, r') = -\frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kr')} \quad \text{et} \quad K(r) = \frac{2\gamma p_0}{r}.$$

Les solutions du système d'équations IV.1 sont obtenues en inversant la matrice de gauche à l'aide de Matlab. L'amplitude et la phase temporelle du mode 0 ont été reportées figure IV.10 dans le cas de deux bulles de même rayon espacées d'une distance  $D$ , pour une fréquence d'excitation  $f = 40$  kHz.

A distance  $D$  fixée, on retrouve la courbe de résonance de la bulle en fonction de  $R_0 f$ , avec un rayon de résonance dépendant de la valeur de  $D/\lambda$  (voir figure IV.10a). La phase temporelle des deux bulles est toujours de  $\pi$  aux faibles rayons (voir figure IV.10b). Aux grands rayons, elle décroît plus ou moins vite suivant la valeur de  $D$ . Si l'on fait varier la distance, on trouve figure IV.10a que l'amplitude du mode respiratoire est maximale lorsque  $D \simeq (0, 7 + N)\lambda$ , avec  $N$  un entier positif ou nul et  $\lambda$  la longueur d'onde des ondes de Rayleigh se développant à l'interface entre le liquide et le PDMS. On comprend donc que suivant la valeur de  $D/\lambda$ , on aura une interférence soit constructive, soit destructive entre les ondes de Rayleigh générées par les deux bulles. Cela aura pour effet d'augmenter ou de diminuer la réponse de la bulle.

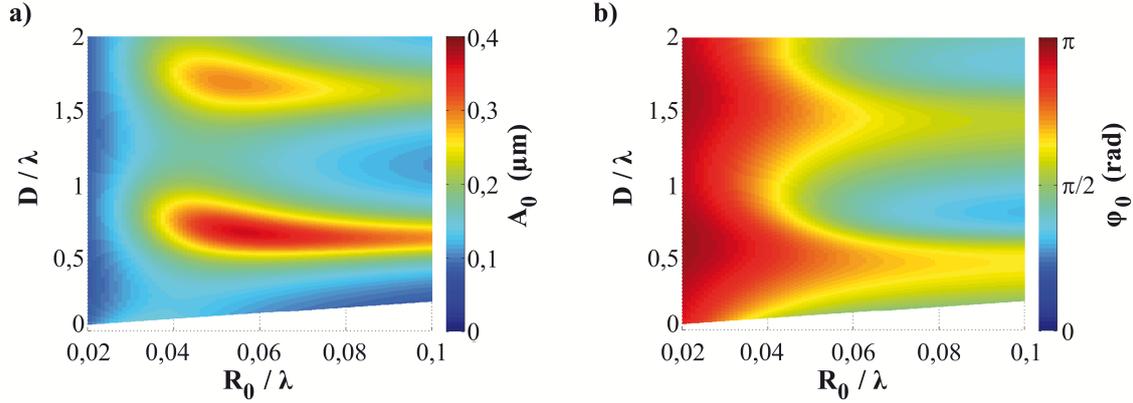


FIGURE IV.10 – (a) Amplitude  $A_0(\mu\text{m})$  et (b) phase temporelle  $\phi_0$  (rad) de la vibration monopole d'une paire de bulles de même rayon  $R_1 = R_2 = R_0$ , excitée à une fréquence  $f = 40$  kHz avec une amplitude d'excitation  $P_{ac} = 1$  kPa, la vitesse des ondes de Rayleigh étant prise à  $c_R = \lambda f = 40$  m/s.

Regardons maintenant ce qu'il se passe si on impose la distance entre les deux bulles à  $D = 0,7\lambda = 700 \mu\text{m}$  et que l'on fait varier les rayons des deux bulles.

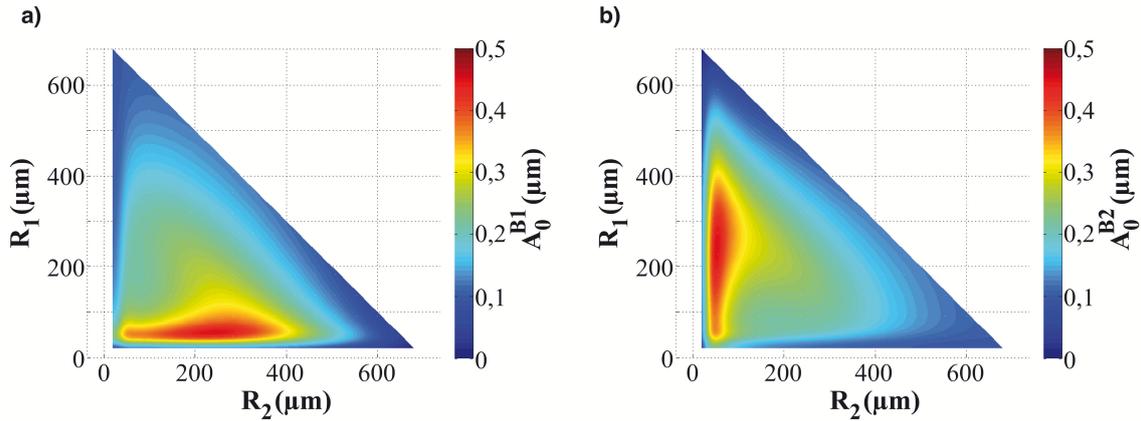


FIGURE IV.11 – Amplitude  $A_0^{B1}(\mu\text{m})$  de la bulle n°1 de rayon  $R_1$  (a) et amplitude  $A_0^{B2}(\mu\text{m})$  de la bulle n°2 de rayon  $R_2$ , les deux bulles de la paire étant séparées par une distance  $D = 700 \mu\text{m}$ . La paire est excitée à une fréquence  $f = 40$  kHz avec une amplitude d'excitation  $P_{ac} = 1$  kPa, la vitesse des ondes de Rayleigh étant prise à  $c_R = 40$  m/s.

La figure IV.11 montre que l'une des deux bulles peut avoir une amplitude de vibration plus importante, mais alors ce sera au détriment de sa voisine.

### Mode de translation d'une paire de bulles

On peut aussi écrire l'équation régissant le mode de translation  $n = 1$  :

$$\left[ \frac{\rho_f \omega^2}{k} \frac{H_1^{(2)}(kR_1)}{H_1^{(2)}(kR_1)} + j\omega^2 \delta_{fric} \right] \bar{a}_1^{B1} = \frac{\rho_f \omega^2}{k} kR_1 \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2}$$

En supposant que la friction aux parois est négligeable, on en déduit alors la vibration du mode de translation pour la bulle n°1, et par le même raisonnement que précédemment,

celle de la bulle n°2 :

$$\begin{cases} \bar{a}_1^{B1} &= kR_1 \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \frac{H_1^{\prime(2)}(kR_1)}{H_1^{\prime(2)}(kR_1)} \bar{a}_0^{B2} \\ \bar{a}_1^{B2} &= -kR_2 \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_1)} \frac{H_1^{\prime(2)}(kR_2)}{H_1^{\prime(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B1} \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

où la dérivée de la fonction de Hankel  $H_1^{(2)}$  est donnée par la formule :

$$H_1^{\prime(2)}(x) = \frac{1}{2}[H_0^{(2)}(x) - H_2^{(2)}(x)].$$

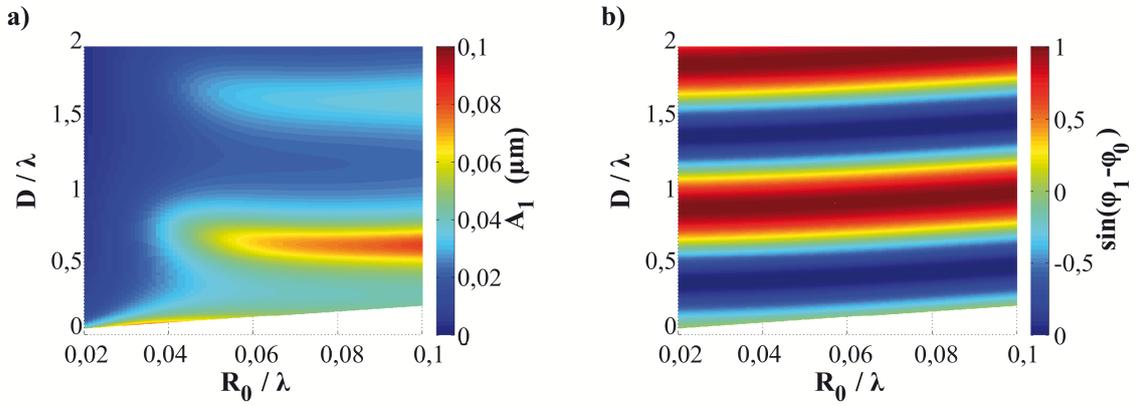


FIGURE IV.12 – (a) Amplitude  $A_1(\mu\text{m})$  du mode de translation et (b) sinus du déphasage temporel entre le mode 0 et le mode 1,  $\sin(\phi_1 - \phi_0)$ , pour une paire de bulles de même rayon  $R_1 = R_2 = R_0$ , excitée à une fréquence  $f = 40$  kHz avec une amplitude d'excitation  $P_{ac} = 1$  kPa, la vitesse des ondes de Rayleigh étant prise à  $c_R = 40$  m/s.

On peut alors tracer l'amplitude du mode de translation ainsi que son déphasage temporel  $\Delta\phi^{(1,0)}$  par rapport au mode 0, dans le cas de deux bulles de même rayon  $R_0$  (voir figure IV.12). Le mode de translation admet plusieurs résonances, qui sont calées en  $R_0$  et en  $D$  sur celles du mode respiratoire. Dans le cas d'une paire excitée à une fréquence  $f = 40$  kHz, l'amplitude du mode de translation atteint près de 25% de l'amplitude du mode 0.

D'autre part, il existe un déphasage entre le mode respiratoire et le mode de translation d'une même bulle, provenant de l'amortissement radiatif dû à la génération d'ondes de Rayleigh par le mode de translation. Ce déphasage varie linéairement avec la distance inter-bulle  $D$ . On obtient en particulier des zones dans le diagramme  $(R_0/\lambda, D/\lambda)$  dans lesquelles on a un déphasage positif, d'autres pour lesquelles ce déphasage est négatif (voir figure IV.12b). En particulier, on a :

$$\begin{cases} \Delta\phi^{(1,0)} \in [0 : \pi] & \text{si } 0 < D - 2R_0 < 0,6 \lambda \\ \Delta\phi^{(1,0)} \in [-\pi : 0] & \text{si } 0,6 \lambda < D - 2R_0 < 1,1 \lambda \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Revenons à présent aux écoulements obtenus dans la partie précédente. Dans le cas de la figure IV.7, où on avait un écoulement de type "fontaine", on a  $R_0/\lambda = 0,04$  et

$D/\lambda = 0,25$ . La théorie prévoit un déphasage entre les modes respiratoire et translationnel de  $\Delta\phi^{(1,0)} = -0,7\pi$ . On retrouve le bon signe, mais une amplitude de déphasage plus importante que l'analyse expérimentale.

Dans le cas de la figure IV.7, on a  $R_0/\lambda = 0,08$  et  $D/\lambda = 0,6$ , et la théorie prévoit :  $\Delta\phi^{(1,0)} = +0,2\pi$ . Cette fois-ci, la théorie prédit une valeur très proche de ce que donne l'expérience.

Nous allons maintenant essayer de comprendre s'il y a une corrélation entre le signe du déphasage  $\Delta\phi^{(1,0)}$  et le sens de rotation des tourbillons. Pour cela, il nous faut calculer la fonction de courant autour de nos deux bulles.

### 2.3 L'interaction de modes à l'origine de l'écoulement redressé

Nous avons vu dans la partie I.2.3 que, contrairement au cas du transducteur acoustique classique ou de l'objet solide immergé mis en mouvement oscillant, nous n'avons pas une condition de non-glissement, mais une condition de glissement partiel ou total aux parois dans le cas d'une bulle. Nous arrivons ainsi aux limites de l'application de la théorie de Rayleigh. Dans cette sous-partie, nous allons reprendre les calculs de fonction de courant autour d'une bulle faits par Longuet-Higgins et Rallabandi, en les adaptant à nos conditions expérimentales (géométrie cylindrique, bulle non ancrée).

Considérons une bulle de rayon moyen  $R_0$ . Son contour s'exprime :

$$\rho(\theta, t) = R_0 + \sum_n R_0 \epsilon_n \sin(\omega t + \phi_n) \cos(n\theta),$$

où les  $\epsilon_n$  correspondent à l'amplitude relative des différents modes par rapport au rayon moyen :  $\epsilon_n = A_n/R_0$ . Dans la suite, on va considérer de petites déformations de la bulle. On a alors :  $\epsilon_n \ll 1$ .

Notons  $\mathbf{v} = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta$  la vitesse de l'écoulement autour de la bulle. On peut alors définir la fonction de courant  $\Psi$  par :

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad U_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

La fonction de courant satisfait l'équation de la vorticité. Celle-ci s'écrit en coordonnées polaires (voir annexe D) :

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu \Delta^2 \Psi, \quad (\text{IV.4})$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien en coordonnées polaires, et  $\frac{\partial(f,g)}{\partial(r,\theta)}$  le déterminant de la matrice jacobienne  $\begin{pmatrix} \partial_r f & \partial_r g \\ \partial_\theta f & \partial_\theta g \end{pmatrix}$ .

On va chercher une solution de l'équation (IV.4) comme somme de termes d'ordres

croissants en  $\epsilon_n$ , en se limitant à l'ordre 2 :

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_n \epsilon_n \Psi_1^{(n)} + \sum_{n,m} \epsilon_n \epsilon_m \Psi_2^{(n,m)} + o(\epsilon_n^2)$$

Avec cette notation,  $\Psi_1^{(0)}$  est associée à la pulsation du mode 0,  $\Psi_1^{(1)}$  est associée à la pulsation du mode de translation  $n = 1$ , et les  $\Psi_1^{(n)}$  avec  $n > 1$  peuvent être associées soit à des modes paramétriques, soit à des modes non paramétriques. Dans la suite, on se placera dans le cas où tous ces modes  $n$  sont non paramétriques.

A l'ordre 0 en  $\epsilon_n$ , la vitesse de l'écoulement est nulle. Cela impose que  $\Psi_0$  est une constante. On la choisira nulle :  $\Psi_0 = 0$ .

### Adimensionnement des équations

Nous avons ici plusieurs paramètres adimensionnés qui rentrent en jeu :

- les amplitudes relatives des différents modes  $\epsilon_n = A_n/R_0$ ,
- l'épaisseur relative de la couche de Stokes  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{R_0} = \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega R_0^2}}$ .

Dans le cas de l'expérience IV.7, nous avons  $\epsilon_0 \simeq 2.10^{-2}$ ,  $\epsilon_1 \simeq 7.10^{-3}$  et  $\bar{\delta} \simeq 7.10^{-2}$ . Nous sommes donc dans le même cas que [Rallabandi *et al.*, 2014] qui considère que  $\epsilon_n^2 \ll \bar{\delta}^2 \ll 1$ .

Dans la suite, nous allons travailler avec des variables adimensionnées : les longueurs seront adimensionnées par  $R_0$ , les temps par  $\omega^{-1}$ , les vitesses par  $R_0\omega$ , et les fonctions de courant par  $R_0^2\omega$ .

L'équation (IV.4) se réécrit à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en  $\epsilon_n$  :

$$\frac{\partial \Delta \Psi_1^{(n)}}{\partial t} = \frac{\bar{\delta}^2}{2} \Delta^2 \Psi_1^{(n)} \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{\partial \Delta \Psi_2^{(n,m)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\Psi_1^{(n)}, \Delta \Psi_1^{(m)})}{\partial (r, \theta)} = \frac{\bar{\delta}^2}{2} \Delta^2 \Psi_2^{(n,m)} \quad (\text{IV.6})$$

L'ordre 1 de la fonction de courant  $\Psi_1^{(n)}$  devient donc un terme source dans l'équation de  $\Psi_2^{(n,m)}$ . On peut écrire  $\Psi_2$  comme la somme d'une fonction stationnaire et d'une fonction non stationnaire :  $\Psi_2 = \langle \Psi_2 \rangle + \Psi_2^{n.s}$ . La dérivée temporelle de la fonction stationnaire est alors nulle et il reste :

$$\Delta^2 \langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle = -\frac{2}{\bar{\delta}^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial (\Psi_1^{(n)}, \Delta \Psi_1^{(m)})}{\partial (r, \theta)} \right\rangle \quad (\text{IV.7})$$

Nous verrons dans la suite que c'est cette fonction stationnaire qui est à l'origine de l'écoulement redressé.

### Fonction de courant à l'ordre 1

Nous recherchons ici les solutions de l'équation (IV.5) qui tendent vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini. Si on pose  $\Psi_1^{(n)} = \text{Re} \left( \bar{\Psi}_1^{(n)} e^{i(t+\bar{\phi}_n)} \right)$ , avec  $\bar{\phi}_n = \phi_n/\omega$ , celle-ci peut se réécrire

sous la forme suivante :

$$(\Delta - \alpha^2)\Delta\bar{\Psi}_1^{(n)} = 0,$$

où  $\alpha = (1+i)/\bar{\delta}$ . La solution  $\bar{\Psi}_1^{(n)}$  recherchée est donc la superposition de deux fonctions. La première est solution de l'équation  $(\Delta - \alpha^2)\bar{\Psi}_1^{(n)} = 0$ . La vitesse de l'écoulement généré par le mode  $n$  ayant une symétrie axiale d'ordre  $n$ , on peut écrire  $\bar{\Psi}_1^{(n)} = \bar{\psi}_1^{(n)} \sin(n\theta)$ . Cette première équation peut alors se mettre sous la forme d'une équation différentielle de Bessel :

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r - (\alpha r)^2 - n^2)\bar{\psi}_1^{(n)} = 0.$$

D'après [Abramowitz et Stegun, 1964] (p.374), cette équation a pour solutions les fonctions de Bessel modifiées  $I_{\pm n}(\alpha r)$  et  $K_n(\alpha r)$ . Ce sont des fonctions qui sont respectivement exponentiellement croissante et décroissante. Comme on cherche une solution qui tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini, on obtient finalement une première solution :

$$\bar{\Psi}_1^{(n)} = d_n K_n(\alpha r) \sin(n\theta).$$

La seconde fonction est solution de l'équation de Laplace  $\Delta\bar{\Psi}_1^{(n)} = 0$ . En utilisant la méthode de séparation des variables et en ne tenant compte que des solutions qui tendent vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini et qui ont la bonne symétrie axiale, on obtient finalement pour  $n \geq 1$  :

$$\bar{\Psi}_1^{(n)} = \frac{c_n}{r^n} \sin(n\theta).$$

Pour  $n = 0$ , on n'a pas de solution qui tende vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini.

La solution générale est donc une superposition des deux solutions précédentes :

$$\bar{\Psi}_1^{(n)} = d_0 K_0(\alpha r) \tag{IV.8}$$

$$\bar{\Psi}_1^{(n)} = \left[ \frac{c_n}{r^n} + d_n K_n(\alpha r) \right] \sin(n\theta), \quad n \geq 1 \tag{IV.9}$$

Pour déterminer les coefficients  $c_n$  et  $d_n$ , il nous reste à exprimer les conditions limites de continuité de la vitesse normale et de contrainte tangentielle nulle à la paroi de la bulle<sup>3</sup> :

$$U_r = \text{Re} \left( \sum \epsilon_n \cos(n\theta) e^{i(t+\bar{\phi}_n)} \right) \quad \text{en } r = 1 + \epsilon_0 \tag{IV.10}$$

$$\tau_{r,\theta} = 0 \quad \text{en } r = 1 + \epsilon_0 \tag{IV.11}$$

Les deux conditions limites (IV.10) et (IV.11) développées à l'ordre 1 en  $\epsilon_n$  nous donnent  $d_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$  :

$$c_n = \frac{1}{n} - d_n K_n(\alpha) \quad \text{et} \quad d_n = \frac{2(n+1)}{\alpha^2 K_{n-2}(\alpha) - 2n\alpha K_{n-1}(\alpha)}$$

---

3. En réalité, la paroi de la bulle est couverte de tensio-actif. La condition limite de glissement à la paroi n'est donc pas tout à fait vraie. Si on avait utilisé une condition de non-glissement, on aurait eu une vitesse tangentielle nulle  $u_\theta = 0$  à la paroi, ce qui aurait donné  $d_n = \frac{1}{\alpha K_{n-1}(\alpha)}$  et n'aurait pas changé foncièrement le calcul.

On obtient finalement comme solution générale à l'ordre 1 que  $\Psi_1^{(0)} = 0$  et pour  $n \geq 1$  :

$$\bar{\Psi}_1^{(n)} = \left[ \left( \frac{1}{n} - d_n K_n(\alpha) \right) \frac{1}{r^n} + d_n K_n(\alpha r) \right] \sin(n\theta). \quad (\text{IV.12})$$

Sachant que  $K_n$  décroît exponentiellement, le premier terme de l'expression de  $\Psi_1^{(n)}$  va largement dominer les autres termes, et ce quel que soit le rayon de la bulle, comme on peut le voir dans le cas  $n = 1$  sur la figure IV.13. Ainsi, on prendra dans la suite l'expression simplifiée :

$$\Psi_1^{(n)} = \frac{1}{nr^n} \sin(n\theta) \cos(t + \bar{\phi}_n). \quad (\text{IV.13})$$

On remarque par ailleurs que la moyenne temporelle de  $\Psi_1^{(n)}$  est nulle. L'ordre 1 n'est donc pas responsable de l'écoulement moyen observé expérimentalement. Ainsi, il va falloir aller au moins à l'ordre 2 en  $\epsilon_n$  pour comprendre l'origine de l'écoulement redressé.

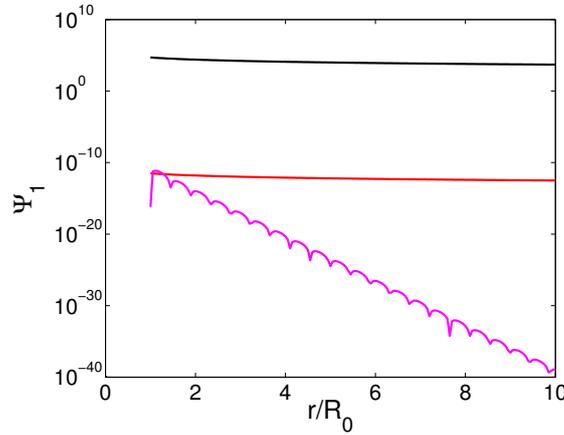


FIGURE IV.13 – Contribution des différents termes de  $\Psi_1^{(1)}$  en fonction de la distance à la bulle  $r$  adimensionnée par le rayon  $R_0$  de la bulle :  $\frac{1}{nr^n}$  (noir),  $\frac{2(n+1)K_n(\alpha)}{\alpha^2 K_{n-2}(\alpha) - 2n\alpha K_{n-1}(\alpha)} \frac{1}{r^n}$  (rouge) et  $\frac{2(n+1)K_n(\alpha r)}{\alpha^2 K_{n-2}(\alpha) - 2n\alpha K_{n-1}(\alpha)}$  (magenta).

## Fonction de courant eulérienne à l'ordre 2

Maintenant que nous connaissons la fonction de courant à l'ordre 1, nous pouvons résoudre l'équation (IV.7) en cherchant une solution particulière de l'équation et une solution de l'équation homogène. Avec l'expression simplifiée<sup>4</sup> de  $\bar{\Psi}_1^{(n)}$ , on obtient  $\Delta \Psi_1^{(n)} = 0$ . L'équation (IV.7) se réduit alors à l'équation homogène :

$$\Delta^2 \langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle = 0.$$

Cette équation biharmonique a pour solution les solutions de Michell [Michell, 1899].

4. Sachant que  $\bar{\delta} \ll 1$ , on peut utiliser la valeur asymptotique :  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha}$ . On montre alors que le terme en  $d_n K_n(\alpha)/r^n$  de  $\bar{\Psi}_1^{(n)}$  est en  $1/\alpha^2$ , menant à un terme en  $\bar{\delta}^2$  dans  $\langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle$ . [Rallabandi et al., 2014] montre que le terme en  $K_n(\alpha r)$  de  $\bar{\Psi}_1^{(n)}$  donne aussi un terme en  $\bar{\delta}^2$ . Ces deux termes sont donc négligeables par rapport à la solution de l'équation homogène.

En ne gardant que les termes qui tendent vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini et s'annulant en  $\theta = 0$  pour des raisons de symétrie, on en déduit :

$$\langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k^{(n,m)}}{r^k} \sin(k\theta) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_k^{(n,m)}}{r^{k-2}} \sin(k\theta).$$

$\langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle$  correspond à la fonction de courant eulérienne quadratique moyennée sur le temps. Pour mesurer le champ de vitesse autour des bulles, nous avons utilisé des particules. C'est donc la fonction de courant lagrangienne que nous devons chercher à exprimer pour pouvoir comparer la théorie à nos résultats expérimentaux.

Les approches eulérienne (description de la vitesse en un point fixe) et lagrangienne (description de la vitesse pour une particule donnée) sont identiques à condition de considérer les termes d'ordre inférieur ou égal à 1. Comme présenté dans [Lighthill, 1978], la vitesse lagrangienne et la vitesse eulérienne ne sont pas égales quand on tient compte des effets de second ordre. La différence entre ces deux termes est appelée "dérive de Stokes". Cette dérive de Stokes peut jouer dans le système présent un rôle important, d'où la nécessité de calculer la fonction de courant qui y est associée.

### Dérive de Stokes

La fonction de courant lagrangienne moyenne s'écrit à l'ordre 2 :

$$\Psi_2^L = \sum_{n,m} \epsilon_n \epsilon_m \left( \langle \Psi_2^{(n,m)} \rangle + \Psi_d^{(n,m)} \right),$$

où  $\Psi_d^{(n,m)}$  est la fonction de courant associée à la dérive de Stokes. D'après [Raney et al., 1954], cette dernière s'exprime :

$$\Psi_d^{(n,m)} = \left\langle \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi_1^{(m)} \int -\partial_r \Psi_1^{(n)} dt \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi_1^{(n)} \int -\partial_r \Psi_1^{(m)} dt \right\rangle \quad (\text{IV.14})$$

En utilisant l'expression simplifiée IV.13 de  $\Psi_1^{(n)}$ , on en déduit que :

$$\Psi_d^{(m,n)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_n \epsilon_m}{r^{n+m+2}} \sin(\phi_m - \phi_n) \sin((m-n)\theta).$$

### Fonction de courant lagrangienne

La fonction de courant lagrangienne vérifie la condition limite de continuité de la vitesse normale (IV.10) au niveau de la paroi de la bulle. Celle-ci s'exprime de la façon suivante :

$$U_r(r = 1 + \epsilon_0 \cos(\omega t)) = U_r(r = 1) + \epsilon_0 \cos(\omega t) \partial_r U_r(r = 1) = 0.$$

Considérons tout d'abord le cas où le mode respiratoire engendre un mode de translation au niveau de la bulle. On a alors deux modes prédominants  $n = 0$  et  $n = 1$ . La

fonction de courant lagrangienne se réduit alors à :

$$\Psi_2^L = \left[ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{r^3} \sin(\phi_1 - \phi_0) + \frac{e'_1}{r} \right] \sin(\theta)$$

et la condition limite (IV.10) nous donne accès au paramètre  $e'_1$ . On obtient finalement<sup>5</sup> :

$$\Psi_2^L = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_1 \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r} \right] \sin(\phi_1 - \phi_0) \sin(\theta) \quad (\text{IV.15})$$

Loin de la bulle, c'est donc le terme de dérive de Stokes qui domine. Près de la bulle, c'est la fonction de courant eulérienne. Les termes dominants sont les termes d'interaction entre modes. Pour que ces termes d'interaction existent, il faut que les deux modes pulsent à la même fréquence. On ne pourra donc pas avoir d'écoulement généré par l'interaction du mode 0 avec un mode paramétrique.

## 2.4 Prédiction des lignes de courant et du sens de l'écoulement

A partir de l'équation IV.15, il est possible de déterminer la vitesse maximale de l'écoulement généré par l'interaction des modes  $n = 0$  et  $n = 1$  en  $r = R_0$ . Celle-ci s'exprime en variables non adimensionnées :

$$V_{max} = \frac{1}{2} \frac{A_0 A_1}{R_0} \omega \sin(\phi_1 - \phi_0).$$

Nous avons tracé figure IV.14 les iso-valeurs de cette vitesse maximale, exprimée en mm/s, en fonction de  $R_0/\lambda$  et de  $D/\lambda$ . Pour une pression acoustique  $P_{ac} = 14$  kPa, on peut ainsi atteindre théoriquement des vitesses de 10 mm/s à proximité des bulles, à condition que les bulles aient un grand rayon et soient faiblement espacées.

Suivant la valeur de  $\Delta\phi^{(1,0)}$ , la vitesse  $V_{max}$  tout comme le préfacteur de la fonction de courant lagrangienne  $\Psi_2^L$  de l'équation IV.15 vont être soit positifs, et dans ce cas on aura un écoulement de type "fontaine" (zones rouges du diagramme IV.14), soit négatifs, et on aura un écoulement de type "anti-fontaine" (zone bleues du diagramme).

Nous avons comparé ces prédictions théoriques avec les différents motifs expérimentaux obtenus. En utilisant les amplitudes et déphasages de l'analyse de la pulsation des bulles de la figure IV.7, nous avons tracé les lignes de courants de l'écoulement à partir de l'équation IV.15 (voir figure IV.15). On voit figure IV.15a que si les deux bulles sont bien alignées, on obtient un tourbillon dans chaque quadrant autour de la bulle. Nous retrouvons bien le motif "fontaine" de la figure IV.7.

Supposons que les modes de translation des deux bulles ne sont pas exactement sur le même axe. Cela peut par exemple se produire quand on a compétition entre la force de radiation générée par la bulle voisine avec une autre force (la force de traînée si on n'a pas arrêté le débit de liquide, la force de Bjerknes primaire si la bulle est loin du ventre de vibration de la lame de verre). Dans ce cas, on trouve que certaines trajectoires peuvent passer par les deux bulles (voir figure IV.15b).

5. Les termes en  $\cos(\omega t)$  disparaissent du fait que  $\Psi_2^L$  est moyenné temporellement

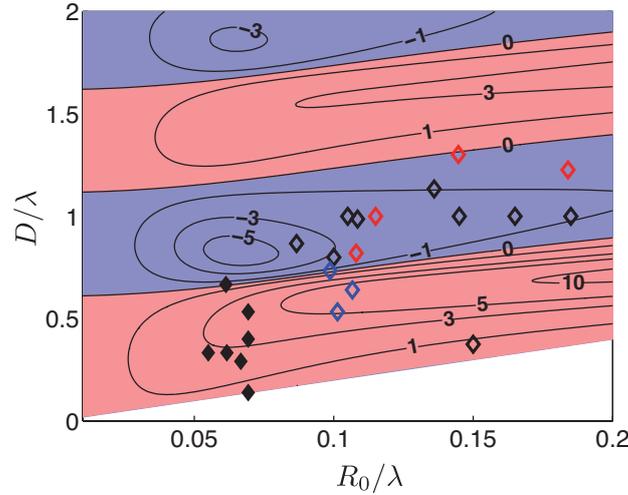


FIGURE IV.14 – Diagramme théorique du type d'écoulement redressé obtenu pour une interaction d'un mode  $n = 0$  avec un mode  $n = 1$ , en fonction du rayon  $R_0$  de la bulle et de la distance inter-bulle  $D$ , adimensionnés par la longueur d'onde de Rayleigh  $\lambda$ . Les iso-valeurs de la vitesse maximale  $V_{max}$  de l'écoulement (courbes noires), obtenues pour une pression acoustique  $P_{ac} = 14$  kPa, sont exprimées en mm/s. Dans les zones rouges,  $V_{max}$  est positif, impliquant une trajectoire de type "fontaine". Les zones bleues correspondent à des trajectoires de type "anti-fontaine". Les motifs expérimentaux obtenus sont indiqués par des losanges pleins pour des écoulements de type "fontaine", creux pour des écoulements de type "anti-fontaine". Nous avons observé soit des motifs dipolaires (losange noir), soit des motifs quadripolaires (losange bleu). Les losanges rouges correspondent à des motifs dipolaires obtenus en présence de modes de surface.

Nous avons ensuite fait varier la distance entre les bulles de 50 à 250  $\mu\text{m}$ , en fixant la fréquence d'excitation à  $f = 80$  kHz et en prenant des bulles de rayons comparables  $R_0 \simeq 25$   $\mu\text{m}$  (voir figure IV.16). Dans ces conditions, on a :  $R_0/\lambda \simeq 0,06$  et  $D/\lambda \leq 0,5$ . On obtient alors des écoulements de type "fontaine", tout comme le prédit la théorie (losanges pleins noirs, figure IV.14).

Pour des fréquences plus élevées ou des rayons plus grands, on distingue deux types d'écoulements de type "anti-fontaine". Le premier est celui décrit figure IV.8 où on a deux tourbillons qui se développent à proximité de chaque bulle (losanges creux noirs). On remarque notamment que la présence de modes de surface n'affecte les recirculations qu'au niveau de la surface de la bulle, étant donné qu'ils ont une portée plus faible (losanges creux rouges, figure IV.14).

Le second est un écoulement quadripolaire (losanges creux bleus, figure IV.14) que nous attribuons à l'apparition d'un mode  $n = 2$  non paramétrique sur le contour de la bulle. Cet écoulement quadripolaire est par exemple obtenu dans le cas où  $f = 80$  kHz et  $R_0 = 38$   $\mu\text{m}$  (voir figure IV.17a), où deux nouveaux tourbillons se développent entre les deux bulles.

La figure IV.17b présente les lignes de courant théoriques de l'écoulement, données par les iso-valeurs de la fonction courant, dans le cas d'une bulle présentant un mode respiratoire, un mode de translation et un mode quadripolaire  $n = 2$ . Dans ce cas, la

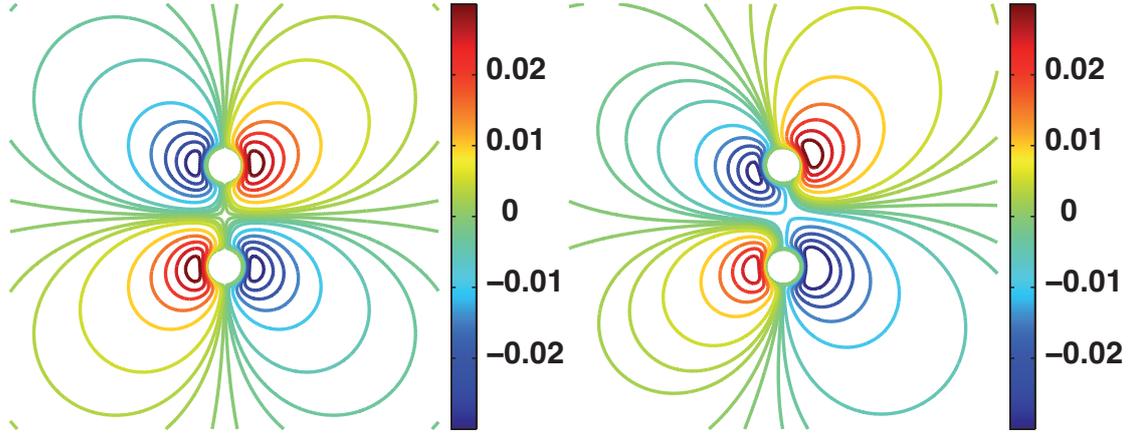


FIGURE IV.15 – Fonction de courant théorique autour d'une paire de bulles présentant les modes d'amplitude et les déphasages temporels de la figure IV.7b : (a) en prenant les valeurs expérimentale  $\psi_1 = \pi$  et  $\psi_2 = 0$ ; (b) dans le cas où les modes de translation ne sont pas exactement dans le même axe  $\psi_1 = \pi$  et  $\psi_2 = +\pi/10$ . L'échelle de couleur correspond à la valeur de  $\Psi_2^L/(A_0^2\omega)$ .

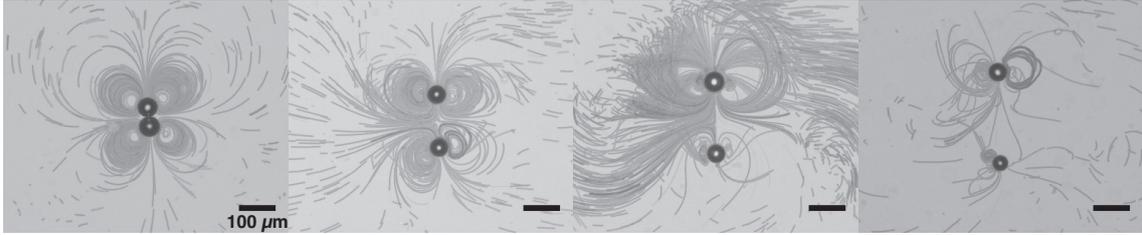


FIGURE IV.16 – Ecoulement redressé autour d'une paire de bulles de rayon  $R_0 \simeq 25 \mu\text{m}$  excitées à une fréquence  $f = 80 \text{ kHz}$ , pour une distance inter-bulle (de gauche à droite)  $D = 50 \mu\text{m}$  (bulles en contact),  $D = 150 \mu\text{m}$ ,  $D = 200 \mu\text{m}$  et  $D = 250 \mu\text{m} \simeq \lambda/2$ . Les trajectoires des billes ( $d_b = 3 \mu\text{m}$ ) sont dans le sens "fontaine" (voir figure IV.7). Plus les bulles sont proches, plus les écoulements sont marqués.

	$a_0(\mu\text{m})$	$a_1(\mu\text{m})$	$a_2(\mu\text{m})$	$\Delta\phi^{(0,1)}(\text{rad})$	$\Delta\phi^{(0,2)}(\text{rad})$
<b>Bulle 1</b>	2,6	0,4	0,15	1,3	1,7
<b>Bulle 2</b>	1,9	0,3	0,2	0,8	1,8

TABLE IV.1 – Amplitudes et déphasages temporels des modes  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$ , dans le cas d'une paire de bulles de rayon  $R_0 = 38 \mu\text{m}$ , séparées d'une distance  $D = 200 \mu\text{m}$  et excitée à une fréquence  $f = 80 \text{ kHz}$ . L'écoulement généré par cette paire de bulles est présenté figure IV.17a

fonction de courant lagrangienne vaut :

$$\Psi_2^L = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_1 \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r} \right] \sin(\phi_1 - \phi_0) \sin(\theta) \quad (\text{IV.16})$$

$$+ \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_2 \left[ \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right] \sin(\phi_2 - \phi_0) \sin(2\theta) \quad (\text{IV.17})$$

Pour des bulles de grand rayon, la présence du trou d'ancrage peut conduire à l'appa-

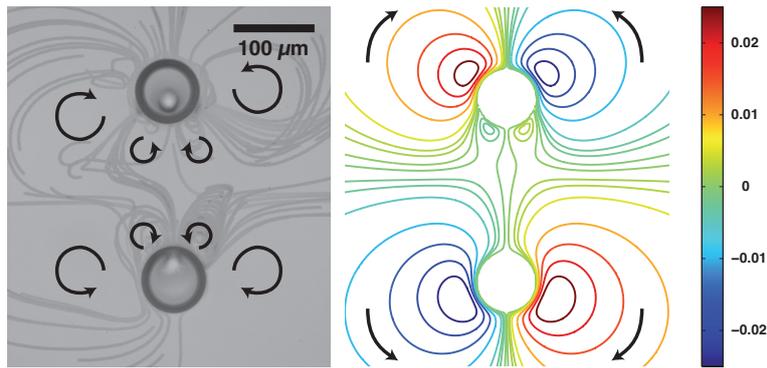


FIGURE IV.17 – (a) Ecoulement redressé quadripolaire de type "anti-fontaine" observé autour d'une paire de bulles de rayon  $R_0 = 38 \mu\text{m}$ , séparées d'une distance  $D = 200 \mu\text{m}$  et excitée à une fréquence  $f = 80 \text{ kHz}$ . Les flèches noires indiquent le sens des trajectoires des billes ( $d_b = 3 \mu\text{m}$ ). Les résultats de l'analyse de la vibration de la bulle sont donnés dans le tableau IV.1. (b) Fonction de courant théorique autour d'une paire de bulles présentant les modes d'amplitude et les déphasages temporels du tableau IV.1.

rition d'un mode 2 plus fort que ce que la théorie prévoit. Les amplitudes et déphasages des modes utilisés pour la simulation sont ceux donnés par l'analyse des modes de l'expérience IV.17a. On retrouve bien la présence des deux petits tourbillons entre les deux bulles. En revanche, les grands tourbillons sont moins écrasés que dans l'expérience.

## Conclusion : le flipper à bulles

Pour conclure cette partie, nous avons vu que la bulle seule confinée pouvait créer un écoulement autour d'elle par sa simple vibration monopole. Cet écoulement a lieu dans la tranche du canal et a une portée de l'ordre de la taille de la bulle. Nous pensons qu'il est dû au gradient radial de vitesse généré par la vibration monopole dans le liquide.

Les modes paramétriques génèrent quant à eux des écoulements dans le plan du canal. Un tourbillon se forme entre chaque ventre et chaque noeud de vibration. L'amplitude de ces modes étant importante, les vitesses d'écoulement engendrées sont du même ordre de grandeur que la vitesse maximale générée par la vibration monopole près de la bulle. Enfin, la rotation des modes engendre une rotation des positions des tourbillons, faisant de la bulle unique un bon mélangeur à courte portée.

Quand on ajoute une bulle, on obtient des recirculations de plus longue portée. L'écoulement redressé généré est causé par l'interaction hydrodynamique du mode respiratoire avec un autre mode non paramétrique  $n$ . Aux faibles rayons de bulle, cette interaction se fait avec le mode de translation  $n = 1$  : chaque bulle crée une force de radiation en générant des ondes de Rayleigh à l'interface liquide/PDMS, cette force pouvant être attractive ou répulsive suivant la valeur de la distance inter-bulles par rapport à la longueur d'onde des ondes de Rayleigh  $D/\lambda$ .

Pour des bulles qui s'attirent, on a un écoulement dipolaire autour de chaque bulle et cet écoulement est de type "fontaine" : le liquide s'éloigne de la paire selon son axe et y revient par les flans de la paire. Pour des bulles qui se repoussent, l'écoulement dipolaire a un sens opposé : on dit qu'il est de type "anti-fontaine".

Pour des bulles plus grosses, la bulle est retenue par le trou par effet capillaire, ce qui a pour effet d'augmenter l'amplitude du mode  $n = 2$  et diminuer celle du mode de translation. Ce mode  $n = 2$  crée un écoulement quadripolaire autour de chaque bulle et a également pour effet d'écraser les plus grands tourbillons.

Si on augmente le nombre de bulles, on s'attend à avoir une superposition de tous ces écoulements. On peut également espérer voir apparaître de nouveaux types d'interactions hydrodynamiques. Une expérience préparatoire a été menée en plaçant des bulles de rayon  $R_0 \simeq 25 \mu\text{m}$  sur un réseau triangulaire de trous avec un pas de réseau  $D = 120 \mu\text{m}$  (voir figure IV.18). Des billes de  $6 \mu\text{m}$  de diamètre nous permettent de retracer l'écoulement complexe à l'intérieur de ce réseau. Certaines bulles agissent comme des capteurs de billes. Il s'agit notamment de bulles présentant des modes de surface paramétriques, qui retiennent les billes à proximité de la bulle. On aperçoit également de grands tourbillons pouvant être attribués à des interactions entre modes. Enfin, certaines bulles se comportent comme les "bumpers" d'un flipper : les billes rebondissent à grande vitesse de *bumper* en *bumper*, jusqu'à être capturées par une autre bulle.

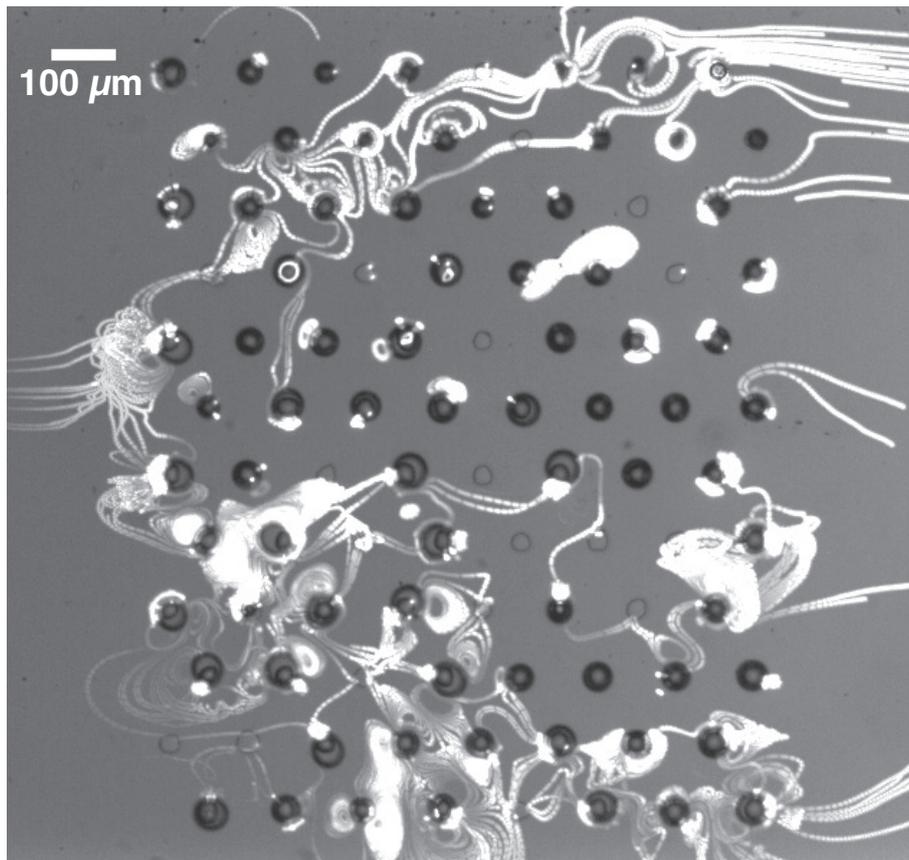


FIGURE IV.18 – Ecoulement redressé dans un réseau triangulaire de bulles de rayons  $R_0 = 25$  à  $30 \mu\text{m}$  séparées d'une distance  $D = 120 \mu\text{m}$  et excitées à une fréquence de  $110 \text{ kHz}$ . Le flux de liquide va ici de la droite vers la gauche. Des billes fluorescentes de diamètre  $d_b = 6 \mu\text{m}$  permettent de suivre l'écoulement.

# V. EFFETS COLLECTIFS DANS LES RÉSEAUX DE BULLES

---

Nous avons déjà pu observer quelques effets hydrodynamiques d'un ensemble de bulles confinées. Il nous reste maintenant à investiguer le potentiel acoustique de ces ensembles de bulles. Nous avons montré que, malgré le confinement 2D de ces bulles en forme de pancake, celles-ci peuvent osciller fortement. Elles sont d'autre part couplées les unes aux autres via l'émission d'ondes de Rayleigh à la surface du canal. Nous sommes donc en présence d'oscillateurs couplés, dont le couplage dépend à la fois de la distance entre les oscillateurs, de leur taille et de la fréquence à laquelle on les excite. On peut alors se demander quels sont les effets collectifs de ce couplage. Parmi les effets les plus directs, on trouve une auto-organisation des bulles en réseau. Cet effet est le prémisses du *microbunching* du SASER à bulles et fera l'objet d'une étude théorique dans une première partie. Nous chercherons notamment à connaître le pas du réseau formé naturellement par les bulles. Puis dans une seconde partie, nous nous intéresserons aux conditions d'amplification et de synchronisation du réseau de bulles. Nous nous demanderons si la condition d'équilibre du réseau correspond ou non à une condition d'amplitude maximale ou à une synchronisation des bulles.

## 1 Auto-organisation de bulles par couplage acoustique 2D

Dans cette partie, nous allons tout d'abord revenir sur le cristal phononique et sa formation, puis nous intéresser au pas naturel du réseau lorsque les bulles sont complètement libres de bouger, et enfin montrer que même attachées à un trou, les bulles restent partiellement libres de bouger et peuvent adapter leur pas à la fréquence d'excitation.

### 1.1 Etat de l'art

Comme cela a été montré dans [Rabaud *et al.*, 2011], des bulles libres s'écoulant dans un microcanal en PDMS peuvent s'auto-organiser sous champ ultrasonore (voir figure V.1).

Lorsque les ultrasons sont enclenchés, une première bulle va tout d'abord ralentir à cause des forces de radiation générées par la source acoustique. Si cette bulle se situe au centre du canal, elle va interagir avec la bulle qui la suit, puis avec la suivante, et ainsi de suite, conduisant à la formation d'un réseau triangulaire (voir figure V.1a). Si elle se situe au bord du canal, l'onde de surface qu'elle émet va se réfléchir au niveau du mur latéral du PDMS et tout se passera comme si on avait une bulle image de l'autre côté du mur. On se retrouve alors avec un réseau carré au niveau du bord du canal (voir figure V.1b).

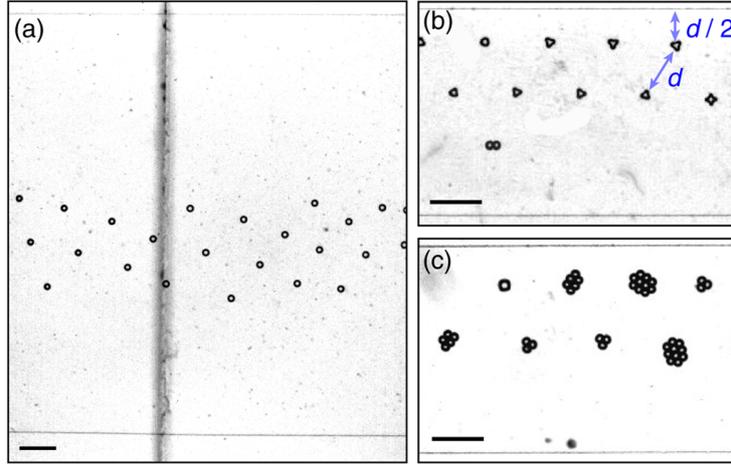


FIGURE V.1 – (a) Réseau de bulles libres auto-organisées sous champ ultrasonore dans un canal microfluidique. (b) Réseau triangulaire dans le canal et carré près des bords, du fait que la bulle voit son image dans le mur latéral du canal. (c) Agrégats de bulles libres auto-organisées en réseau triangulaire. Figure extraite de [Rabaud *et al.*, 2011].

Ces deux réseaux ont à peu près le même pas. On note tout de même une élongation du réseau dans la direction de l'écoulement.

[Rabaud *et al.*, 2011] ont mesuré le pas  $D_{\text{éq}}$  de ce réseau pour différentes conditions d'excitation (voir figure V.2a). Ils trouvent que le pas du réseau de bulles dépend peu de la taille de la bulle mais surtout de la fréquence d'excitation, sa dépendance fréquentielle étant en :  $D_{\text{éq}} = c/f$ , avec  $c = 33$  m/s. D'autre part, l'analyse de la trajectoire d'une bulle par rapport à une autre leur permet de mesurer la force  $\mathbf{F}_{B_j}^{II}$  subie par la bulle en fonction de la distance  $r$  entre les bulles (voir figure V.2b). Cette force n'est autre que la force de radiation générée par la bulle voisine, appelée communément "force de Bjerknes secondaire". Cette force s'annule à plusieurs reprises. Sachant que le potentiel  $\Phi_{B_j}^{II}$  de cette force est défini par :  $\mathbf{F}_{B_j}^{II} = -\nabla\Phi_{B_j}^{II}$ , les positions d'équilibre sont données par les extrema de potentiel, qui correspondent donc aux positions où  $\mathbf{F}_{B_j}^{II} = \mathbf{0}$ . On aura une position d'équilibre stable, là où :  $\text{div}(\mathbf{F}_{B_j}^{II}) < 0$ . La force tracée figure V.2b correspond à  $F_{B_2} = -|\mathbf{F}_{B_j}^{II}|$ , le référentiel étant pris au centre de la bulle qui subit la force, et non au centre de celle qui l'exerce. D'après la figure V.2b, l'équilibre stable a donc lieu ici vers  $r = D_{\text{éq}} = 0,85\lambda$ . Il semblerait donc que le pas du réseau ne soit pas tout à fait égal à la longueur d'onde des ondes de Rayleigh, mais qu'il y soit quand même relié.

Une autre position d'équilibre stable existe quand les deux bulles sont collées l'une à l'autre<sup>1</sup>. Grâce à la présence du tensio-actif, les deux bulles collées ne fusionnent pas. Au contraire, nous avons pu voir que ces deux bulles vibraient comme si elles n'étaient qu'une, avec une amplitude plus forte que pour une bulle seule de même taille. On voit d'autre part figure V.1c que les agrégats de bulles peuvent eux aussi se mettre en réseau.

1. En effet, d'après la figure V.2b, quand  $r$  tend vers 0,  $|\mathbf{F}_{B_j}|$  tend vers  $-\infty$ , correspondant à un potentiel  $\Phi_{B_j}$  tendant aussi vers  $-\infty$ .

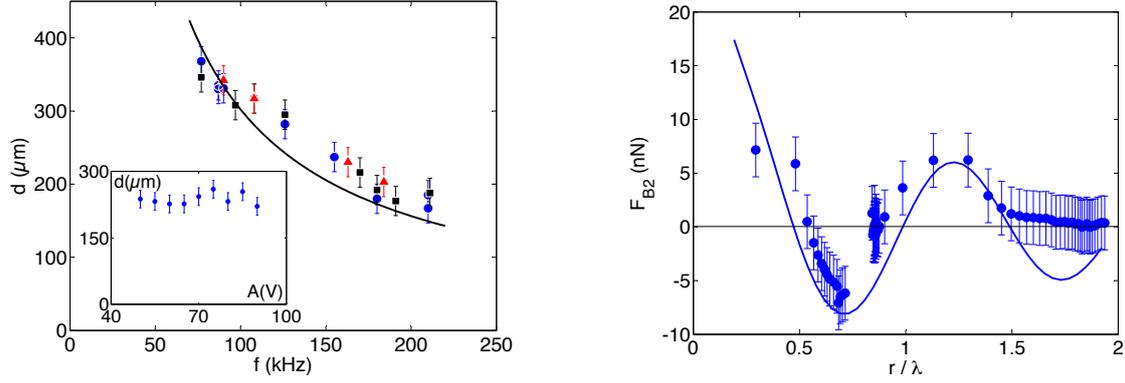


FIGURE V.2 – (a) Distance d'équilibre du cristal en fonction de la fréquence d'excitation. (b) Force de Bjerknes secondaire en fonction de la distance  $r$  de la bulle avec sa voisine : mesures publiées p.80 de la thèse de [Rabaud, 2010] à partir de la trajectoire d'une bulle de rayon  $R_0 = 25 \mu\text{m}$  à proximité d'un réseau excité à une fréquence  $f = 155 \text{ kHz}$ . La distance d'équilibre est ici de  $260 \mu\text{m}$ .

En incluant l'élasticité des murs de PDMS au modèle de vibration de la bulle, nous pouvons mieux comprendre l'origine de cette force de radiation. Dans la suite, nous allons chercher à déterminer théoriquement la position d'équilibre de la paire de bulles à l'aide du modèle développé dans la partie III.2 et comparer cette position d'équilibre à ce qui a pu être obtenu expérimentalement.

## 1.2 Forces de Bjerknes dans un cristal de bulles libres

Supposons qu'on ait deux bulles de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , la première bulle pouvant évoluer librement autour de la deuxième dont la position est fixe. Dans la suite, on se placera dans le repère lié au centre de la paire de bulles. On posera  $x_1 = -D/2$  la position de la première bulle et  $x_2 = +D/2$  la position de la deuxième, comme décrit figure IV.9. On supposera d'autre part que la pression acoustique externe  $P_{ac}$  est homogène sur l'ensemble du canal.

Une bulle de volume  $V$  dans un gradient de pression  $\nabla p$  subit une force  $-V\nabla p$  [Leighton, 1994]. Ici, nous allons nous intéresser à la force exercée sur une bulle de volume  $V_{B1}$ , lorsqu'elle se situe dans un gradient de pression  $\nabla p_{B2}$  généré par sa bulle voisine. La force de Bjerknes secondaire exercée par la bulle n°2 sur la bulle n°1 s'écrit :

$$\mathbf{F}_{Bj}^{II} = \left\langle \int_0^{2\pi} -\nabla p_{B2}(R_1, \theta_1) h_0 \frac{1}{2} \rho (R_1, \theta_1)^2 d\theta_1 \right\rangle$$

où  $\langle \rangle$  désigne la moyenne temporelle et  $\rho(R_1, \theta_1)$  le contour de la bulle n°1. Nous avons

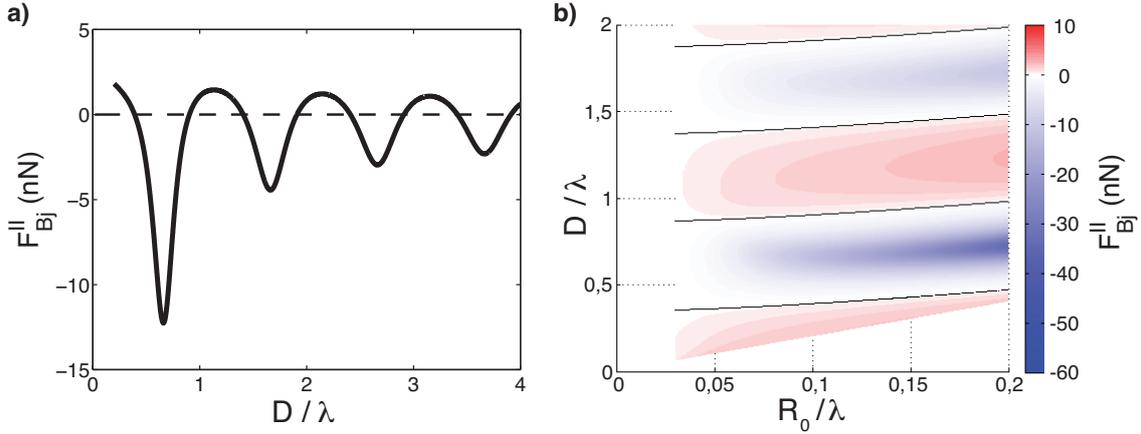


FIGURE V.3 – (a) Force de Bjerknes secondaire théorique pour deux bulles de même rayon  $R_0$  en fonction de la distance  $D$  entre les deux bulles, avec  $R_0/\lambda = 0,1$ ,  $P_{ac} = 1$  kPa,  $h_0 = 25 \mu\text{m}$  et  $c_R = 40$  m/s. (b) Force de Bjerknes secondaire théorique en fonction de la distance à la bulle  $D$  et du rayon de la bulle  $R_0$  adimensionnés par la longueur d'onde des ondes de Rayleigh  $\lambda$ .

vu dans le chapitre III que la pression générée par la bulle n°2 sur la bulle n°1 s'écrivait :

$$\bar{p}_{B2}(r_1, \theta_1) = -\frac{\rho_f \omega^2 H_0^{(2)} \left( kD \sqrt{1 - 2\frac{r_1}{D} \cos \theta_1 + \left(\frac{r_1}{D}\right)^2} \right)}{k H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2}.$$

On peut alors calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial \bar{p}_{B2}}{\partial r_1}$  et  $\frac{1}{r_1} \frac{\partial \bar{p}_{B2}}{\partial \theta_1}$ . On obtient finalement, en supposant  $R_1 \ll D$  et en ne gardant que les termes d'ordre 0 en  $R_1/D$  :

$$\nabla \bar{p}_{B2}|_{r_1=R_1} = -\rho_f \omega^2 \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B2} \mathbf{e}_x.$$

D'autre part, le contour de la bulle n°1 s'exprime :  $\rho(R_1, \theta_1) = R_1 + a_0^{B1}$ . En posant  $a_0^{B1} = \text{Re}(\bar{a}_0^{B1} e^{i\omega t})$ , on obtient au premier ordre en  $A_0/R_1$  :

$$\overline{\rho(R_1, \theta_1)^2} = 2R_1 \bar{a}_0^{B1}.$$

On peut alors utiliser la propriété suivante :  $\langle \text{Re}(\bar{a} e^{i\omega t}) \text{Re}(\bar{b} e^{i\omega t}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{a} \bar{b}^*)$ . La force de Bjerknes secondaire s'appliquant sur la bulle n°1 a finalement pour expression :

$$\mathbf{F}_{Bj}^{II} = \pi h_0 R_1 \rho_f \omega^2 \text{Re} \left( \frac{H_1^{(2)}(kD)}{H_1^{(2)}(kR_2)} \bar{a}_0^{B1*} \bar{a}_0^{B2} \right) \mathbf{e}_x,$$

où  $\bar{a}_0^{B1}$  et  $\bar{a}_0^{B2}$  sont les amplitudes de la vibration monopole des deux bulles, comme calculé dans la partie IV.2.2.

Dans le cas où les deux bulles sont de même rayon  $R_0$ , on a tracé figure V.3a l'amplitude de la force de Bjerknes secondaire en fonction de la distance  $D$  entre les deux bulles. Lorsque l'amplitude  $F_{Bj}^{II}$  est positive, la bulle n°1 est attirée par sa voisine. Lorsqu'elle est négative, elle est repoussée. On obtient plusieurs distances d'équilibre. Là où la dérivée

de  $F_{Bj}^{II}(D)$  sera positive, cet équilibre sera stable. La figure V.3b représente l'amplitude  $F_{Bj}^{II}$  dans tout le domaine  $(R/\lambda, D/\lambda)$ . Les positions d'équilibre de la bulle sont représentées par des lignes noires. La position du premier équilibre stable peut être ajustée pour  $R_0/\lambda < 0,2$  par une fonction polynomiale d'ordre 2, d'équation :

$$\frac{D_{eq}}{\lambda} = 1,54 \left( \frac{R_0}{\lambda} \right)^2 + 0,32 \left( \frac{R_0}{\lambda} \right) + 0,86.$$

Comme on le voit sur la figure V.3b, la dépendance de la position d'équilibre avec  $R_0/\lambda$  est faible. On retrouve donc en première approximation la même loi que [Rabaud *et al.*, 2011].

### 1.3 Pas du cristal de bulles libres

Nous pouvons maintenant regarder ce qu'il se passe lorsqu'une troisième bulle arrive à proximité d'une paire de bulles fixes espacées d'une distance  $D_0$ . Pour récupérer la force exercée sur cette troisième bulle, il faut alors sommer les forces exercées par chacune des deux bulles sur la troisième, en tenant compte du fait que les amplitudes de vibration des trois bulles évoluent avec la distance entre la bulle et la paire.

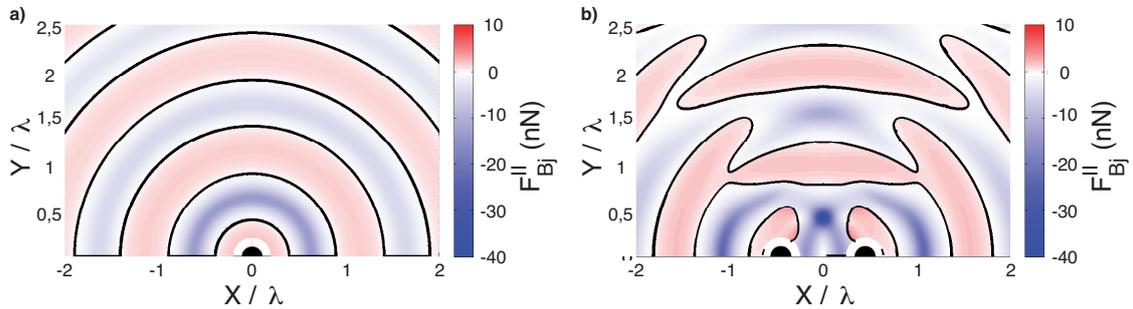


FIGURE V.4 – Champ de force généré par une paire de bulles espacées de pour deux bulles de même rayon  $R_0$  avec  $P_{ac} = 1$  kPa,  $h_0 = 25 \mu\text{m}$  et  $c_{\mathbf{R}} = 40$  m/s.

Nous avons tracé figure V.4a le champ de force généré par une seule bulle, et figure V.4b celui généré par une paire à  $D_0 = 0,9\lambda$ , dans le cas où toutes les bulles ont un même rayon  $R_0 = 0,1\lambda$ . On observe un écartement des positions d'équilibre stable au niveau des extrémités gauche et droite de la paire, tandis que la position d'équilibre stable sur le flan de la paire reste inchangée. D'autre part, les zones de force attractive (zones rouges) les plus proches de la paire se retrouvent non plus réparties de façon isotrope autour des bulles, mais concentrées uniquement sur les côtés des deux bulles.

Si les bulles de la paire n'étaient pas fixes, l'approche de la troisième bulle pourrait provoquer une modification de la distance d'équilibre de la paire. Nous pouvons déduire de la distance entre lignes de même force que les deux conformations les plus stables pour les trois bulles seront la conformation en triangle équilatéral et la ligne de trois bulles. Dans ces deux cas, les trois bulles sont équidistantes.

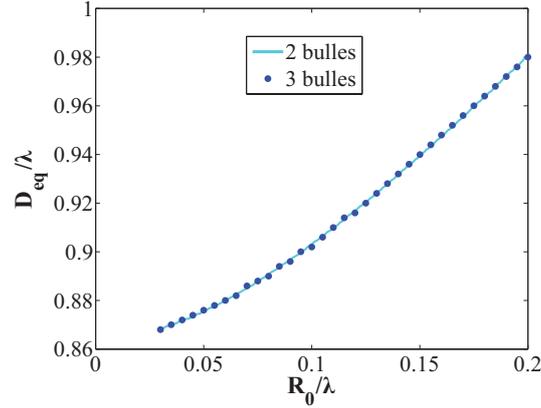


FIGURE V.5 – Distance d'équilibre  $D_{eq}$  pour une paire de bulles (trait plein cyan) et pour un trois bulles en conformation triangle équilatéral (pointillés bleus) en fonction du rayon  $R_0$  des bulles, pour  $P_{ac} = 1$  kPa,  $h_0 = 25 \mu\text{m}$  et  $c_R = 40$  m/s. Les distances d'équilibre sont les mêmes à deux et trois bulles.

Dans le cas de la conformation en triangle équilatéral, c'est-à-dire la conformation la plus stable, nous avons cherché à déterminer la distance d'équilibre des trois bulles. Pour ce faire, nous avons déterminé numériquement la distance  $D_0$  pour laquelle la position d'équilibre stable de la troisième bulle se trouve à une distance  $D_0$  des deux autres bulles. Le pas du réseau de trois bulles vaut alors :  $D_{eq} = D_0$ . Nous avons reporté figure V.5 l'évolution de cette distance d'équilibre en fonction du rayon  $R_0$  des trois bulles. La courbe obtenue se superpose à celle obtenue avec deux bulles. Autrement dit, il n'y aura pas de changement de pas du réseau entre la configuration à 2 bulles et la configuration à 3 bulles en conformation triangle équilatéral.

#### 1.4 De la bulle libre à la bulle ancrée : adaptabilité du pas du réseau

Au fur et à mesure que le réseau de bulles libres grossit, la résistance hydrodynamique du canal va augmenter à cause de la présence des bulles. Le réseau va alors être comprimé par le liquide poussant en amont du canal et par la force de radiation ultrasonore poussant dans l'autre sens. Cela entraînera une réorganisation du réseau : soit une ligne de bulles va glisser vers l'aval du canal en gardant le même pas de réseau, soit certaines bulles vont se coller les unes aux autres. Pour augmenter la taille du réseau de bulles, contrôler son pas et éviter les agrégations de bulles, nous avons donc dû utiliser les trous d'ancrage. On peut alors se demander si la présence des trous permet toujours une adaptabilité du pas du réseau ou non.

En faisant varier la fréquence d'excitation de la pastille piézoélectrique autour de la fréquence d'équilibre du réseau, il est possible de passer d'un état où les bulles s'attirent ( $f > f_{eq}$ ) à un état où les bulles se repoussent ( $f < f_{eq}$ ). Nous avons placé quatre bulles sur un réseau triangulaire de trous de pas  $D = 320 \mu\text{m}$  (figure V.6a) et avons excité la pastille piézo avec un signal modulé en fréquence :

$$s(t) = s_0 \sin(2\pi f(t)t),$$

où  $f(t) = f_p + \Delta f(t)$ , avec  $f_p = 80$  kHz est la fréquence porteuse et  $\Delta f(t)$  est un signal triangulaire de période  $T_{triangle} = 10$  s allant de  $f_{min} = 60$  kHz à  $f_{max} = 100$  kHz (voir la courbe verte figure V.6b).

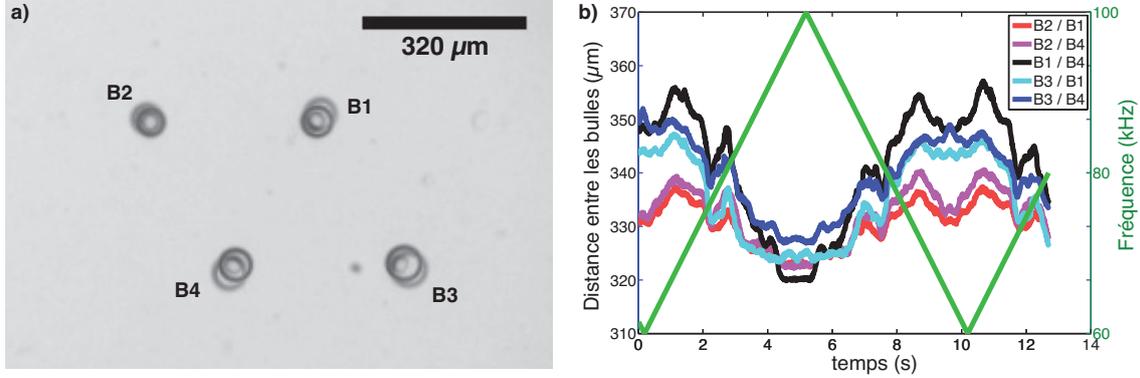


FIGURE V.6 – (a) Positions extrêmes de quatre bulles ancrées sur un réseau triangulaire de pas  $D = 320 \mu\text{m}$ , lorsqu'elles sont soumises à une onde modulée en fréquence. (b) Distance entre les quatre bulles (courbes bleues et rouges) et fréquence modulante (courbe verte) en fonction du temps.

Comme la réponse de la pastille piézo n'est pas lisse sur ce domaine fréquentiel, on s'attend à avoir des amplitudes d'excitation différentes suivant la valeur de la fréquence. Cela n'est pas censé changer la direction de la force de Bjerknes secondaire, mais cela peut la rendre plus ou moins forte. (la force sera alors nulle si l'amplitude d'excitation n'est pas suffisante). Les distances inter-bulles ont été mesurées et reportées figure V.6b. Les variations observées lorsque la fréquence est supérieure à 80 kHz sont dues à une amplitude trop faible de la pastille piézo. On distingue deux groupes de courbes. Les distances entre grosses bulles (courbes bleues et noire) varient de la même façon, entre  $D_{\acute{e}q} = 330 \mu\text{m}$  et  $D_{\acute{e}q} = 350 \mu\text{m}$ . Mais dès que l'on regarde la distance entre la bulle B2 et ses voisines, on remarque une diminution de la distance maximale. Cela est dû au fait que la bulle étant petite, elle ne peut pas se déplacer suffisamment par rapport à son point d'ancrage. Ainsi, la mobilité de la bulle dépendra de sa taille.

Pour déterminer la vitesse de l'onde de surface, on peut tracer le produit  $Df$ . On obtient une vitesse qui croît avec la fréquence (figure V.7. Si on compare cette courbe à la courbe théorique obtenue figure V.5, on obtient une croissance beaucoup plus rapide que prévue. On en déduit que soit la vitesse de l'onde de Rayleigh évolue avec la fréquence, soit que la présence du trou a une influence sur la distance d'équilibre des quatre bulles.

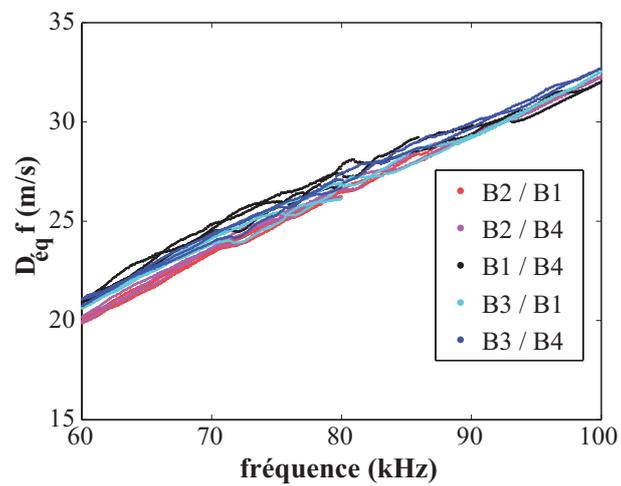


FIGURE V.7 – Produit de la distance d'équilibre et de la fréquence d'excitation  $D_{eq}f$  des cinq paires de bulles en fonction de la fréquence d'excitation.

## 2 Amplification et synchronisation dans un réseau de bulles

Le couplage des bulles par les ondes de Rayleigh peuvent également sous certaines conditions conduire soit à une amplification des oscillations des bulles, soit à une synchronisation de leur phase  $\phi_0$ . Dans une première partie, nous chercherons à identifier quelles sont les conditions d'amplification de la vibration. Puis, dans une deuxième partie, nous nous intéresserons au comportement des bulles dans un réseau libre. Nous chercherons à savoir si la vibration des bulles y est synchrone. Enfin, nous conclurons cette partie avec une étude de la synchronisation des bulles dans un réseau.

### 2.1 Amplification de la vibration dans un réseau triangulaire ou carré

Lorsqu'une bulle se situe dans un réseau de bulles, chacune de ses bulles voisines va générer un champ de pression secondaire qui va agir comme un terme source supplémentaire pour la bulle considérée (voir figure V.8).

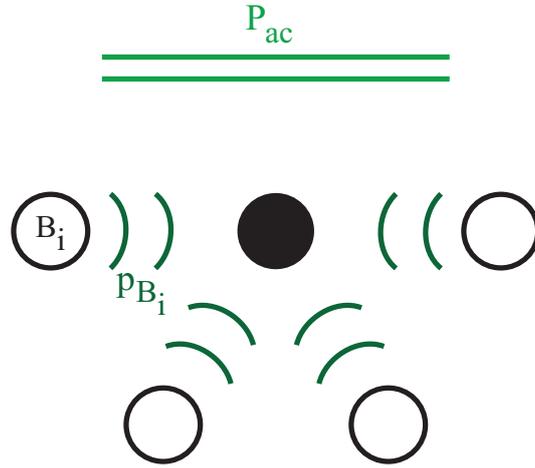


FIGURE V.8 – Interaction à  $N$  bulles : le champ de pression acoustique ressenti par la bulle noire est la somme du champ externe  $P_{ac}$  et des champs diffusés par chacune des bulles voisines  $p_{B_i}$ .

En partant du modèle d'oscillation d'une bulle confinée dans un canal aux murs flexibles (voir la partie III.2) et en y ajoutant tous les termes sources secondaires dus aux bulles voisines, nous arrivons à un système de  $N$  équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M(R_1, R_1) + K(R_1)] \bar{a}_0^{B_1} = -\bar{P}_{ac} - \sum_{j \neq 1} M(D_{1j}, R_j) \bar{a}_0^{B_j} \\ \dots \\ [M(R_N, R_N) + K(R_N)] \bar{a}_0^{B_N} = -\bar{P}_{ac} - \sum_{j \neq N} M(D_{Nj}, R_j) \bar{a}_0^{B_j} \end{array} \right. \quad (\text{V.1})$$

où les fonctions  $M$  et  $K$  sont les mêmes que dans la partie IV.2.2. Pour résoudre ce système, nous avons réécrit l'équation V.1 sous forme matricielle :

$$\mathcal{M} \mathbf{A}_0 = -\bar{P}_{ac} \mathbf{I}_N, \quad (\text{V.2})$$

où  $\mathbf{A}_0$  est le vecteur des amplitudes du mode volumique de chaque bulle  $[\bar{a}_0^{B_1} \dots \bar{a}_0^{B_N}]$  et  $\mathbf{I}_N$  le vecteur unité de taille  $1 \times N$ . Nous avons ensuite résolu numériquement ce système

matriciel avec Matlab en inversant la matrice  $\mathcal{M}$  dans le cas de réseaux simples avec un faible nombre de bulles.

### Condition de résonance dans un réseau triangulaire

Nous avons ainsi pu calculer l'amplitude relative  $X = A_0/R_0$  du mode 0 de chacune des bulles situées sur un réseau triangulaire constitué de 3 bulles d'une part (figure V.9a), et de 7 bulles d'autre part (figure V.9b)<sup>2</sup>. L'amplitude montrée sur ces deux figures est celle d'une bulle située sur le bord du réseau (il s'agit de la bulle colorée en noir sur le schéma du réseau présenté dans l'insert).

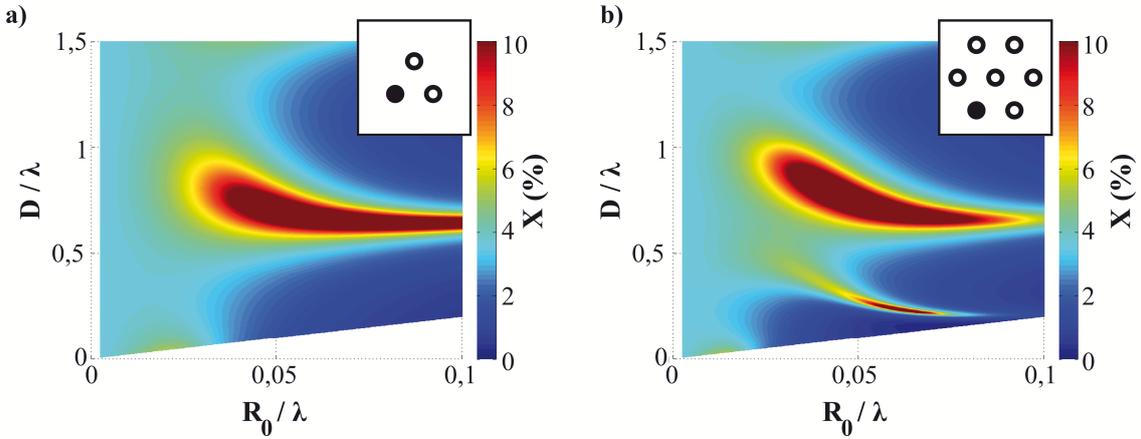


FIGURE V.9 – Diagramme de l'amplitude relative d'oscillation  $X = A_0/R_0$  en fonction du rayon relatif des bulles  $R_0/\lambda$  et de la distance inter-bulles relative  $D/\lambda$ . Les bulles sont supposées de même rayon et le pas du réseau constant. (a) pour un réseau triangulaire de 3 bulles, (b) pour un réseau triangulaire de 7 bulles (voir l'insert).

Pour deux bulles en interaction, le maximum de  $X$  est obtenu pour  $R_0/\lambda = 0,045$  et  $D/\lambda = 0,72$ . Que ce soit à trois ou à sept bulles, on retrouve pour le réseau triangulaire un maximum autour de cette même condition, avec une amplification de l'amplitude maximale.

### Condition de résonance dans un réseau carré

Sachant que le réseau carré a déjà été observé expérimentalement, nous avons cherché à voir si cette conformation montrait des différences avec la conformation triangulaire. L'amplitude relative  $X = A_0/R_0$  du mode 0 a été calculée pour chacune des bulles du réseau dans le cas d'un réseau carré constitué de 4 bulles d'une part (figure V.10a), et de 9 bulles d'autre part (figure V.10b). La conformation carrée à 4 bulles conduit à une carte de l'amplitude  $X$  similaire à celle de la conformation triangulaire à 3 bulles, à cela près que le maximum d'amplitude est obtenu pour une distance relative  $D/\lambda$  plus faible. On observe cette même différence avec 9 bulles en réseau carré, comparativement au réseau triangulaire à 7 bulles. Cet effet peut être attribué à la contribution des seconds voisins,

2. Sur ces figures et les suivantes, l'amplitude relative a été tronquée à 10% afin de mieux visualiser les zones d'amplification sur les différents réseaux de bulles.

qui se situent à des distances différentes de la bulle considérée que l'on soit dans un réseau triangulaire ou carré.

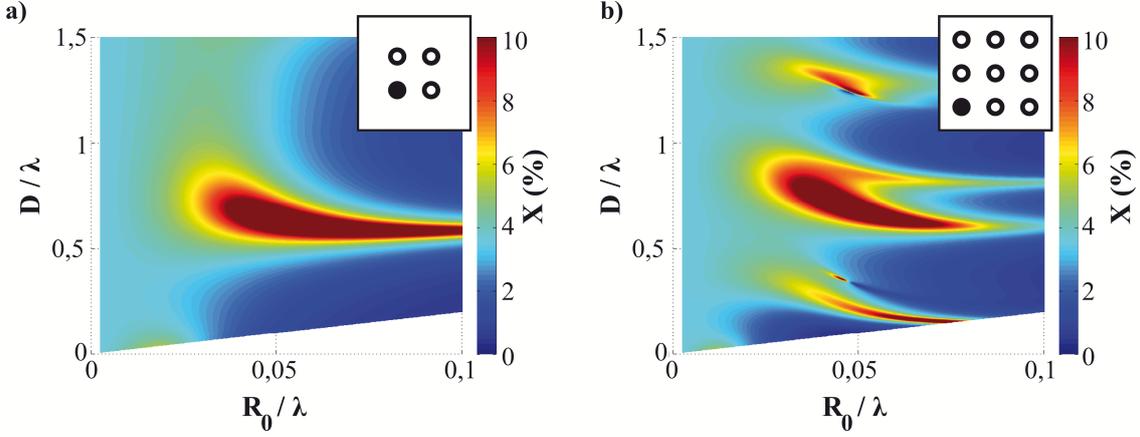


FIGURE V.10 – Diagramme de l’amplitude relative d’oscillation  $X = A_0/R_0$  en fonction du rayon relatif des bulles  $R_0/\lambda$  et de la distance inter-bulles relative  $D/\lambda$ . Les bulles sont supposées de même rayon et le pas du réseau constant. (a) pour un réseau carré de 4 bulles, (b) pour un réseau carré de 9 bulles (voir l’insert).

### Amplitude des oscillations dans les deux types de réseaux

Dans le cas d’un réseau de bulles ancrées sur des trous, la distance entre les bulles est fixée par le pas du réseau de trous. Pour une distance inter-bulles  $D/\lambda = 0,89$ , correspondant à la position d’équilibre du réseau libre pour des bulles de rayon tel que  $R_0/\lambda = 0,07$ , nous avons tracé figure V.11 l’amplitude relative  $X$  et la phase  $\phi_0$  du mode 0 de la bulle située sur le bord du réseau, dans le cas des réseaux simples présentés précédemment.

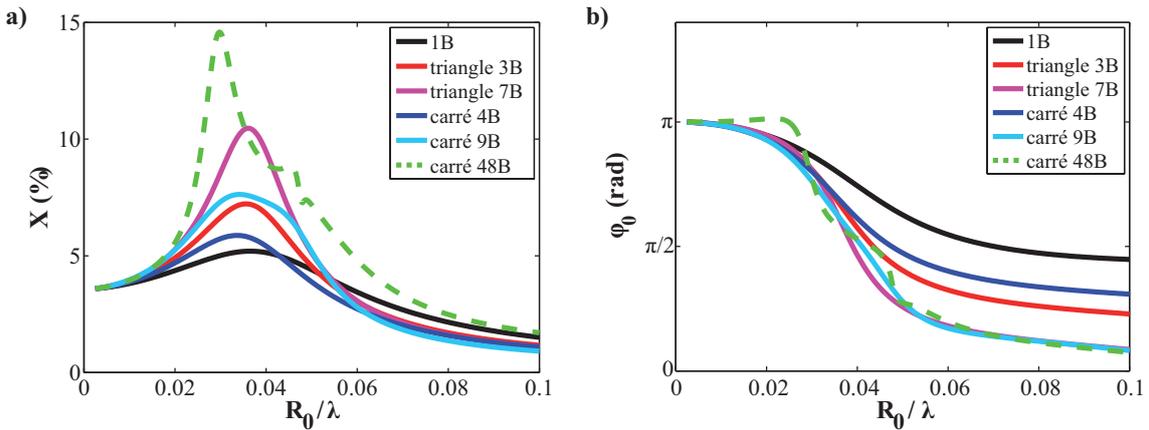


FIGURE V.11 – (a) Amplitude relative  $X$  et (b) phase  $\phi_0$  de la bulle située en bord de réseau, dans le cas d’une bulle seule, d’un réseau triangulaire à 3 ou 7 bulles, et d’un réseau carré à 4, 9 ou 48 bulles. Le pas du réseau est fixé de sorte à ce que  $D/\lambda = 0,89$ .

Lorsque le rayon des bulles se situe en dessous de  $R_0/\lambda \simeq 0,05$ , on observe pour cette distance inter-bulles une augmentation de l’amplitude d’oscillation du mode 0 avec

le nombre de bulles, que ce soit avec un réseau triangulaire ou un réseau carré. L'amplification est alors plus importante avec un réseau triangulaire qu'avec un réseau carré. De plus, l'augmentation de la pente de la phase  $\phi_0$  avec le nombre de bulles montre une augmentation du facteur de qualité effectif de la bulle. Ainsi, on aura théoriquement une amplification de la vibration aux faibles rayons ou faibles fréquences d'excitation.

En revanche, pour un rayon  $R_0/\lambda = 0,07$ , qui est en théorie le rayon pour lequel cette distance inter-bulles correspond à une situation d'équilibre, on observe une diminution de l'amplitude relative. Ainsi, les bulles du réseau libre ne devraient pas se trouver amplifiées, mais au contraire diminuées.

Comme la distance d'équilibre  $D_{eq}/\lambda$  varie peu avec  $R_0/\lambda$ , les courbes d'amplitude et de phase dans un réseau libre de bulles dont le rayon est tel que  $R_0/\lambda = 0,04$  seront similaires à la figure V.11. Ainsi, il est possible d'observer une amplification des vibrations dans un réseau libre à condition de travailler à faibles fréquences ou bien avec des bulles de faible rayon, par exemple  $R_0 < 40 \mu\text{m}$  pour une fréquence d'excitation de 40 kHz. Des réseaux libres de bulles ont été observés dans ces conditions. Cependant, pour déterminer s'il y a ou non amplification, il faut pouvoir avoir une amplitude de référence à une bulle, c'est à dire avoir au moins une bulle du réseau ancrée. Cela fera l'objet d'une expérience future.

## 2.2 Phase de la bulle suivant son entourage

Bien qu'on ne puisse pas déterminer s'il y a ou non amplification dans un réseau libre, on peut tout de même s'intéresser à la phase des bulles du réseau. Un réseau libre de 5 bulles a été formé en amont de la lame de verre (voir figure V.12, insert), en envoyant un signal sinusoïdal de fréquence  $f = 116 \text{ kHz}$  aux bulles. La phase  $\phi_0$  de chaque bulle a été récupérée en utilisant la décomposition de Fourier du contour de la bulle (voir figure V.12a).

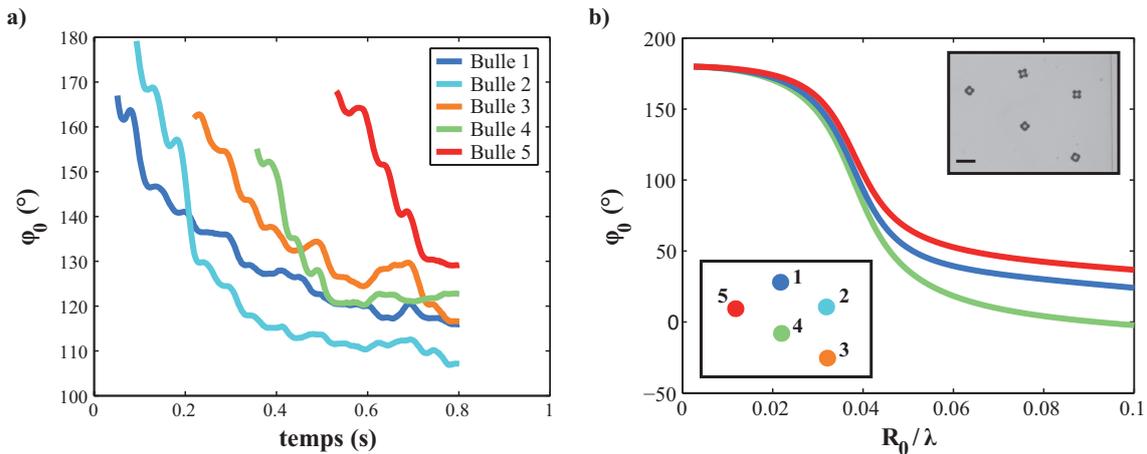


FIGURE V.12 – (a) Evolution temporelle de la phase  $\phi_0$  de 5 bulles libres lors de leur mise en réseau ( $R_0/\lambda \simeq 0,07$ ,  $D/\lambda \simeq 0,86$ ). (b) Phase  $\phi_0$  théorique pour un réseau de 5 bulles où  $D/\lambda = 0,86$ . Du fait de la symétrie du réseau, la bulle n°2 présente la même phase que la bulle n°1, de même que la bulle n°3 avec la n°5. L'insert du haut montre la forme finale du réseau libre observé. La barre d'échelle représente  $100 \mu\text{m}$ . Le numéro des bulles est indiqué dans l'insert du bas.

On observe d'abord une diminution de la phase de la bulle lors de l'approche de la lame, puis une stabilisation de sa phase autour d'une certaine valeur. Cette valeur n'est pas la même pour chacune des bulles du réseau. Nous avons résolu numériquement le système V.1, dans le cas du réseau libre à 5 bulles. La phase théorique obtenue est représentée figure V.12b en fonction du rayon des bulles, pour une distance inter-bulles donnée expérimentalement par  $D/\lambda = 0,86$ . Suivant son voisinage, la phase de la bulle va être modifiée : plus elle sera entourée et plus sa phase sera abaissée. Ce résultat théorique n'est pas retrouvé expérimentalement puisque la bulle n°4 devrait alors avoir la phase la plus basse. Cette différence peut être due à plusieurs causes. Premièrement, le mur du canal se trouve juste à droite du réseau libre (voir l'insert, figure V.12). Le mur a un effet miroir sur le réseau puisque les ondes de Rayleigh émises par les bulles vont y être réfléchies. La bulle n°2 voit alors son nombre de voisins augmenter, ce qui pourrait être à l'origine de la chute de sa phase. Secondement, le réseau se trouve en amont de la lame dans le canal. L'onde excitatrice est donc une onde propagative se dirigeant dans la direction du canal. Cela signifie que les bulles sont excitées avec une phase différente suivant leur position dans le canal, ce qui aurait pour effet de décaler la phase d'une même quantité  $\Delta\phi = \frac{2\pi f}{c_{eau}} \Delta x$ , pour un même décalage spatial  $\Delta x$ . Ces deux effets ne permettent pas de retrouver l'ordre des phases observé expérimentalement. Il faudrait alors mieux connaître le champ de pression acoustique primaire réellement généré pour mieux comprendre ce qu'il se passe pour un réseau libre.

En conclusion, on retiendra que la bulle va se comporter différemment suivant son entourage. Nous allons maintenant chercher à identifier si certaines conditions expérimentales sont propices pour une synchronisation des phases.

### 2.3 Synchronisation dans un réseau de bulles ancrées

Pour quantifier la synchronisation des bulles, on a fait appel au même critère que Kuramoto [Strogatz, 2000]. On introduit la fonction  $S_0$ , définie par le paramètre :

$$S_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_0^{(k)}}, \quad (\text{V.3})$$

où  $N$  est le nombre de bulles, et  $\phi_0^{(k)}$  la phase temporelle du mode 0 de la bulle n° $k$ . Plus les bulles seront synchrones, plus leurs phases respectives convergeront vers une même phase, et donc plus le paramètre  $S_0$  aura sa valeur absolue proche de 1. La phase du paramètre correspondra alors à la phase vers laquelle les bulles convergent.

Dans le cas du réseau triangulaire à 3 bulles ou du réseau carré à 4 bulles, toutes les bulles sont équivalentes, si l'on considère des bulles de même taille. On obtient alors un paramètre de synchronisation  $|S_0| = 1$  quel que soit le rayon des bulles ou le pas du réseau. En revanche, lorsque les bulles du réseau ont un voisinage différent, les phases des bulles ne sont plus les mêmes, ce qui conduit à une diminution du paramètre de synchronisation pour certaines valeurs de  $R_0$  et  $D$ . C'est le cas pour le réseau à 7 bulles présenté figure V.14a où la bulle du centre du réseau a un environnement symétrique, contrairement à celles du bord du réseau. La résolution du système matriciel V.2 à l'aide

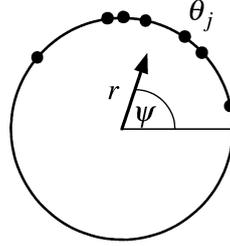


FIGURE V.13 – Principe du calcul du paramètre de synchronisation : la phase  $\theta_j$  de chacun des oscillateurs est positionnée sur un cercle trigonométrique. Leur centroïde est donné par  $S_\theta = r e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$  et est ici représenté par une flèche. Le rayon  $r$  quantifie la cohérence de phase entre les oscillateurs et l'angle  $\Psi(t)$  correspond à leur phase moyenne. Figure extraite de [Strogatz, 2000].

de Matlab nous permet de récupérer la phase du mode volumique de chacune des bulles du réseau considéré. On peut alors calculer le paramètre de synchronisation  $|S_0|$  en utilisant l'équation V.3. Les figures V.14a et V.14b montrent la dépendance de  $|S_0|$  avec  $R_0$  et  $D$ , pour un réseau triangulaire à 7 bulles d'une part et un réseau carré à 9 bulles d'autre part.

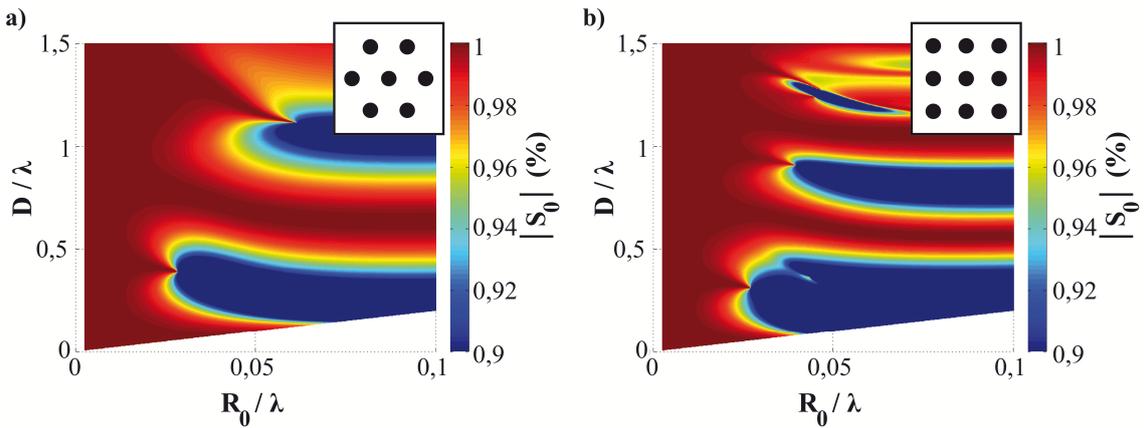


FIGURE V.14 – Paramètre de synchronisation  $|S_0|$  en fonction de  $R_0/\lambda$  et  $D/\lambda$  : (a) pour un réseau triangulaire à 7 bulles ; (b) pour un réseau carré à 9 bulles. Les bulles ont ici toutes le même rayon  $R_0$ .

On observe tout d'abord une synchronisation des bulles pour les faibles rayons ( $R_0/\lambda < 0,025$ ). En effet, pour ces petits rayons, le terme d'amortissement radiatif devient plus petit que la pulsation de résonance de la bulle ( $\omega^2 \delta_{rad} \ll \omega_0^2$ ), et les pressions retransmises par les bulles voisines deviennent négligeables face à la pression excitatrice primaire. Cette synchronisation n'est donc pas due aux ondes de Rayleigh mais au comportement basse fréquence de l'oscillateur. Cette synchronisation n'a donc lieu que si la pression excitatrice primaire a la même phase pour chaque bulle, ce qui généralement n'est pas le cas. De plus, nous avons dans ce modèle négligé les amortissements thermique et visqueux alors que ceux-ci peuvent commencer à jouer un rôle aux faibles valeurs de  $R_0 f$ .

Une synchronisation des bulles peut également avoir lieu pour des bulles de plus grand rayon, cette fois-ci par l'intermédiaire des ondes de Rayleigh. On obtient alors des bandes sélectives de distance inter-bulles pour lesquelles on obtient une synchronisation. Pour

un rayon  $R_0/\lambda = 0,07$ , le paramètre  $|S_0|$  atteint son maximum en  $D/\lambda = 0,64$  pour un réseau triangulaire à 7 bulles et en  $D/\lambda = 0,57$  pour un réseau carré à 9 bulles. On remarque également que cette bande est plus fine dans le cas d'un réseau carré que dans celui d'un réseau triangulaire. De plus, cette zone de synchronisation à grands rayons résiste à d'éventuelles variations de la phase excitatrice. Sa taille et sa position par contre peuvent alors se trouver modifiées.

## 2.4 Etude expérimentale de la synchronisation

Des bulles ont été disposées sur un réseau de trous carré de pas  $D = 180 \mu\text{m}$ . La difficulté sur ces réseaux très larges est de réussir à disposer une bulle sur chacun des trous. La majorité du temps, seul un certain pourcentage de bulles va s'accrocher aux trous<sup>3</sup> et le réseau de bulles sera alors clairsemé (voir figure V.15). Cela ne nous empêche pas de chercher à mesurer une éventuelle synchronisation des modes 0 dans le réseau.

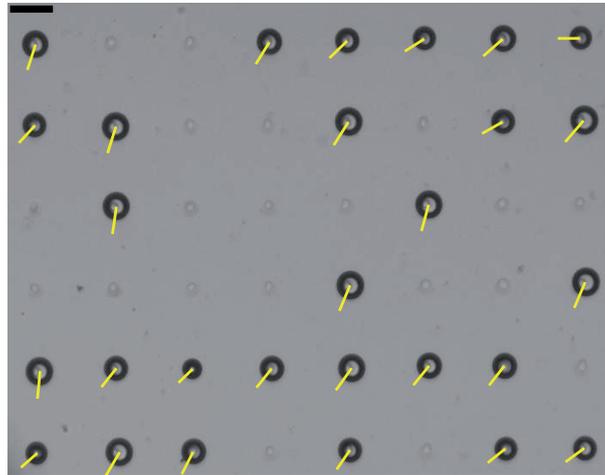


FIGURE V.15 – Bulles sur un réseau carré de trous de pas  $D = 180 \mu\text{m}$ , excitées à une fréquence  $f = 80 \text{ kHz}$ . La barre d'échelle représente  $100 \mu\text{m}$ . L'orientation des traits jaunes indique la phase temporelle  $\phi_0$  mesurée pour chacune des bulles du réseau.

Nous avons analysé le mode respiratoire de chacune des bulles ancrées sur le réseau de trous et avons calculé le paramètre de synchronisation des modes respiratoires  $|S_0|$ . L'expérience a été répétée pour différentes fréquences d'excitation du réseau :  $f = 80, 110, 120, 130, 200$  et  $230 \text{ kHz}$ . A chaque fréquence d'excitation, l'expérience a été répétée deux à trois fois pour voir l'effet de l'arrangement des bulles sur le paramètre  $|S_0|$ . Les valeurs de  $|S_0|$  obtenues ont été reportées sur la figure V.16. Le modèle à  $N$  bulles présenté précédemment nous permet d'estimer la valeur théorique du paramètre de synchronisation. Son évolution avec la fréquence a été tracée pour une distance inter-bulles

3. La première difficulté pour remplir le réseau vient de la mauvaise répartition des bulles en entrée du réseau de trou. L'injection massive de bulles dans le canal ne permet pas de remplir le réseau car les bulles générées par le flow-focusing ont tendance à rester au milieu du canal. L'introduction d'un ensemble de colonnes de PDMS (avec un agencement de type tapis de fakir) en sortie de flow-focusing permettrait de rendre la distribution de bulles plus homogène en entrée du réseau de trous. La seconde difficulté vient de la qualité de fabrication des trous. En effet, plus les trous sont rapprochés, et plus il est délicat de retirer correctement le surplus de résine lors de l'étape de développement à la fin de la microfabrication. Si les trous ne sont pas suffisamment larges, les bulles ne peuvent pas s'ancrer correctement.

fixée à  $D = 180 \mu\text{m}$  sur cette même figure afin de pouvoir la comparer aux résultats expérimentaux. Les points expérimentaux semblent à peu près concorder avec le modèle. Cependant, on observe quelques différences pour certaines fréquences. Cela est dû au fait que plusieurs paramètres sont modifiés lorsqu'on renouvelle l'expérience.

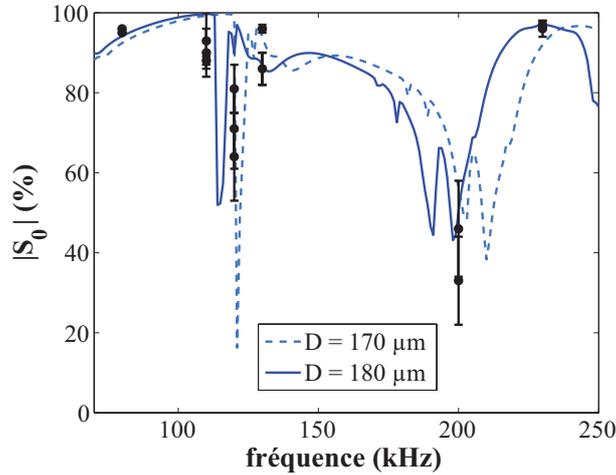


FIGURE V.16 – Paramètre de synchronisation  $|S_0|$  en fonction de la fréquence d'excitation du réseau de bulles. Les points expérimentaux correspondent à des expériences menées sur un réseau carré de trous (6 lignes, 8 colonnes) de pas  $D = 180 \mu\text{m}$  partiellement rempli de bulles. Les traits interrompus et continus sont les courbes prévues par la théorie pour un réseau entièrement rempli avec un pas respectif  $D = 170 \mu\text{m}$  et  $D = 180 \mu\text{m}$ .

Tout d'abord, le rayon moyen des bulles n'est pas toujours le même. Il varie de  $R_0 = 26,3$  à  $30,9 \mu\text{m}$ . Cette variation de rayon n'entraîne cependant qu'une très faible variation de la courbe théorique. En revanche, si les bulles sont plus grandes, nous avons vu que la distance entre les bulles pouvait varier du fait de la force de Bjerknes secondaire. Lorsque l'on diminue la distance moyenne entre les bulles, cela a pour effet un décalage de la courbe théorique vers les hautes fréquences (voir courbe bleu clair, figure V.16). Cela permettrait d'expliquer le comportement observé en  $f = 120$  et  $130$  kHz, sauf que dans les expériences menées à ces fréquences, on n'observe pas d'augmentation de la distance inter-bulles.

Le deuxième paramètre qui varie est le nombre de bulles présentes sur le réseau de trous. Malgré le fait que le réseau ne soit pas rempli de bulles, on observe une assez bonne corrélation entre la courbe théorique et les points expérimentaux. Moins le réseau sera rempli et plus les bulles seront espacées, conduisant à une chute du paramètre de synchronisation. Ainsi, il est normal d'obtenir un paramètre de synchronisation plus faible que la courbe théorique, obtenue pour un réseau rempli de bulles.

### Influence de la distribution des bulles sur le réseau

L'influence de la quantité et de la distribution des bulles sur ce réseau carré a été étudiée théoriquement. Pour un nombre de bulles donné, les bulles peuvent être positionnées selon des configurations différentes sur le réseau de trous (voir figure V.18).

Le paramètre de synchronisation a été calculé pour  $10^5$  configurations différentes puis moyenné. Il évolue avec le nombre de bulles sur le réseau, comme indiqué sur la figure V.17.

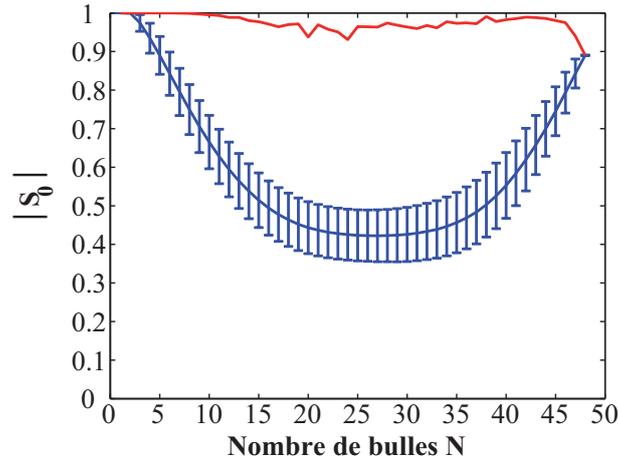


FIGURE V.17 – Paramètre de synchronisation  $|S_0|$  en fonction du nombre de bulles ancrées sur le réseau carré de trous (6 lignes, 8 colonnes). La courbe bleue donne la moyenne du paramètre sur  $10^5$  configurations possibles. La courbe rouge donne le paramètre maximal obtenu.

Plus le réseau de trous sera plein, et plus la probabilité d’avoir une configuration où les bulles sont synchrones sera grande. Toutefois, quel que soit le nombre de bulles, il existera une configuration pour laquelle la synchronisation sera maximale. Cette configuration variera suivant la distance entre les trous du réseau et la fréquence d’excitation. On gardera quand même en tête que même si le réseau n’est pas plein, il est possible d’avoir une bonne synchronisation des bulles.

Les différences observées entre les deux expériences menées à  $f = 120$  kHz ne peuvent pas être attribuées à une diminution de la distance inter-bulles effective, puisque les bulles ont tendance à se repousser à cette fréquence. En revanche, la prise en compte du nombre de bulles et de leur répartition sur le réseau mène à une valeur théorique de  $|S_0^{th}| = 43\%$ , au lieu de  $|S_0^{exp}| = 64\%$  dans le cas du réseau de la figure V.18a, et de  $|S_0^{th}| = 79\%$ , au lieu de  $|S_0^{exp}| = 81\%$  dans le cas du réseau de la figure V.18b. Les différences observées pourraient être dues soit à une variation de la phase d’excitation des bulles en fonction de leur position sous la lame de verre, soit à la polydispersité des bulles.

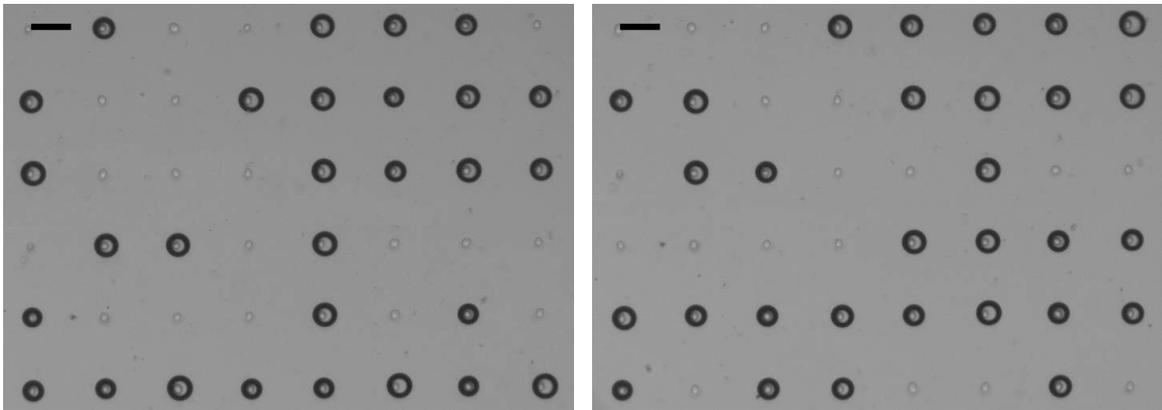


FIGURE V.18 – Bulles sur un réseau carré de trous de pas  $D = 180 \mu\text{m}$ , excitées à une fréquence  $f = 120$  kHz, pour deux dispositions de bulles différentes. La barre d’échelle représente  $100 \mu\text{m}$ .

La dépendance spatiale de la phase excitatrice est une fois de plus mise en cause. Le dispositif excitateur avec lame de verre n'est donc pas adapté à une étude plus poussée des effets collectifs des bulles. Pour mieux maîtriser cette phase excitatrice, une possibilité envisagée sera d'exciter les bulles depuis l'extérieur du canal via un transducteur plan, comme présenté dans la partie II.2.2. Quant à la polydispersité des bulles, il faudra en tenir compte dans le modèle pour pouvoir prédire la réponse du réseau. En effet, malgré que les bulles soient monodisperses lors de leur production, leur rayon a tendance à évoluer avec le temps. Une solution serait alors de modifier la composition du gaz pour augmenter son temps de diffusion, et espérer que cela soit suffisant pour que le rayon des bulles reste constant le temps de l'expérience.

## 2.5 De la synchronisation de la rotation des modes

Nous venons de voir qu'une synchronisation des modes 0 était possible sous certaines conditions dans un réseau de bulle. Mais qu'en est-il des autres modes ?

Les modes non paramétriques étant de faible amplitude, il ne nous a pas été possible de mesurer leur amplitude et leur phase sur un grand nombre de bulles. Pour ce qui est des modes paramétriques, nous avons vu dans la partie III.3 que leur phase temporelle dépendait directement de la phase temporelle du mode 0. Il reste à savoir si la phase spatiale des modes du surface peut ou non se synchroniser. Celle-ci correspond à l'orientation du mode paramétrique. Ces modes ressemblant à des engrenages en rotation, on s'imagine facilement que le mode de surface d'une bulle pourrait interagir avec celui d'une autre, conduisant à une synchronisation de la rotation du mode de surface.

Cette synchronisation peut être quantifiée comme précédemment en calculant l'amplitude du paramètre de synchronisation des rotations du mode  $n$ ,  $|S_{\psi_n}|$ , où :

$$S_{\psi_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\psi_n^{(k)}}$$

Ce paramètre a été calculé dans le cas du réseau de 5 bulles libres exhibant un mode  $n = 4$  (voir figure V.12, insert). La figure V.19a rapporte la phase spatiale  $\psi_4$  du mode 4 pour chacune des 5 bulles du réseau. On constate une diminution de cette phase spatiale dès l'apparition du mode de surface, indiquant la rotation de celui-ci. Le paramètre de synchronisation  $|S_{\psi_4}|$  est tracé figure V.19b lorsque le réseau est constitué des 5 bulles (courbe bleue) : il ne montre aucune synchronisation de l'orientation des modes de surface, puisque  $|S_{\psi_4}|$  reste la plupart du temps en dessous de 60%. Cela n'est pas très étonnant dans la mesure où la distance entre les bulles est grande devant leur rayon, et qu'on a vu que la vibration des modes de surface avait une portée très faible dans le liquide, d'autant plus faible que le mode de surface est élevé.

On comprend alors qu'il faut forcer le rapprochement des modes pour espérer voir un effet de synchronisation de leur orientation. Deux bulles ont été accrochées sur deux trous faiblement écartés. Les bulles qui y sont ancrées grossissent et finissent par se toucher (voir figure V.20a). Contrairement à deux engrenages positionnés l'un contre l'autre, le mode de surface va disparaître au niveau de l'interface entre les deux bulles pour ne laisser place qu'à une interface plane. La vitesse de rotation de l'onde du mode de surface a été calculée pour les deux bulles et est reportée figure V.20b. On constate que les bulles

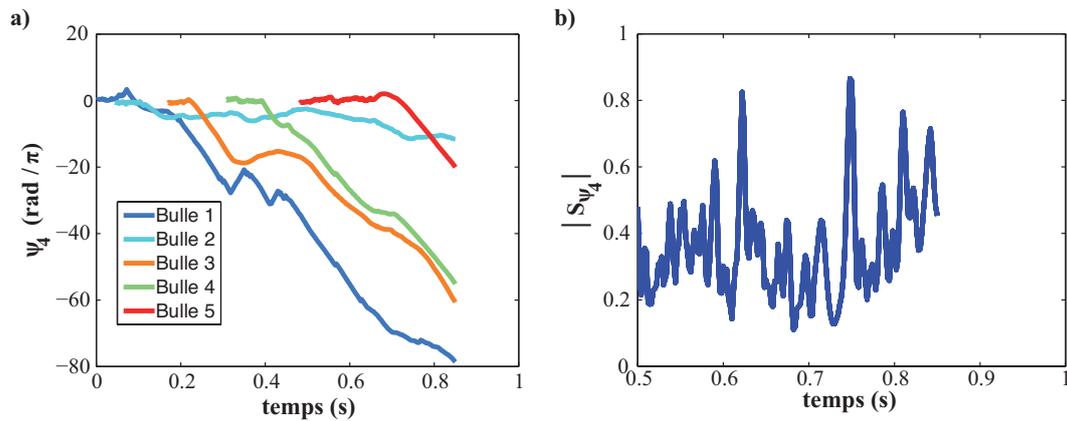


FIGURE V.19 – (a) Evolution temporelle de la phase spatiale  $\psi_4$  du mode de surface  $n = 4$  dans le cas du réseau libre étudié figure V.12 (b) Paramètre de synchronisation  $|S_{\psi_4}|$  de l'orientation des modes  $n = 4$  une fois le réseau de 5 bulles formé.

tournent parfois à la même vitesse dans des sens opposés. La recombinaison des deux ondes de surface propagatives de sens opposés mènent alors à une interférence destructive au niveau de l'interface. A d'autres moments, les bulles tournent dans le même sens à une vitesse équivalente : tout se passe alors comme si les deux bulles ne faisaient plus qu'une.

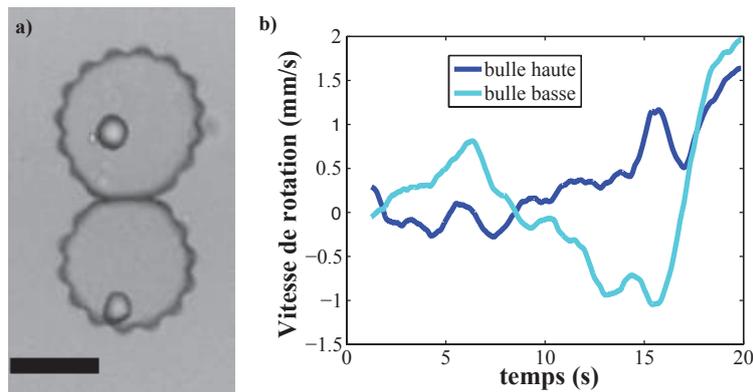


FIGURE V.20 – (a) Deux bulles collées excitées à  $f = 147$  kHz exhibant un mode de surface. La barre d'échelle correspond à  $100 \mu\text{m}$ . (b) Vitesse de rotation de l'onde de surface sur la bulle du haut et celle du bas. Les deux bulles étant de tailles différentes, cette vitesse est exprimée en mm/s de sorte à comprendre ce qu'il se passe à l'interface entre les deux bulles.

## Conclusion

En conclusion, les ondes de Rayleigh permettent aux bulles de s'auto-organiser en réseau triangulaire ou carré. Si toutes les bulles sont toutes proches des conditions de résonance de la bulle seule ( $R_0 f \simeq 1,5$  m/s), alors on peut obtenir une amplification de la vibration monopole des bulles, les ondes de Rayleigh interagissant constructivement les unes avec les autres. En dehors de cette condition de résonance, une amplification peut encore être observée, mais cela nécessite de fixer la position des bulles, par exemple en les ancrant sur un réseau de trous. En modifiant le pas du réseau, on peut alors soit forcer l'amplification de la vibration, soit forcer la synchronisation de la pulsation monopole des bulles.

On notera que la présence des trous ne permet pas de travailler à trop forte amplitude d'excitation puisque des clusters de bulles ont alors tendance à se former du fait des forces de Bjerknes secondaires. Cependant, ces clusters de bulles s'auto-organisent de la même façon que les bulles uniques et semblent pulser de la même façon, à cela près que la bulle unique équivalente a une forme initiale difforme. Enfin, si on augmente encore l'amplitude d'excitation ultrasonore, des bulles de cavitation apparaissent dans le liquide. Il apparaît alors que ces bulles de cavitation s'auto-organisent de la même façon que les bulles confinées (voir figure V.21).

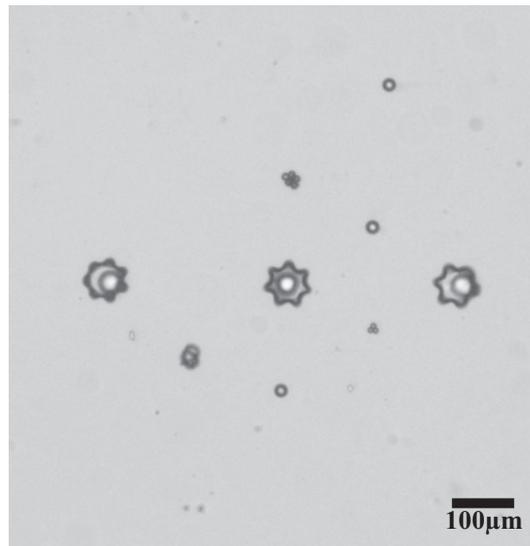


FIGURE V.21 – Bulles de cavitation autour de bulles ancrées sur une ligne de trous espacés de  $D = 280 \mu\text{m}$ . Le système est excité à une fréquence  $f = 216$  kHz, ce qui correspond à un pas de réseau naturel d'environ  $180 \mu\text{m}$ , distance à laquelle se placent les bulles de cavitation.

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Dans ce manuscrit, nous avons tout d'abord montré qu'une bulle seule, lorsqu'elle est confinée entre les deux parois supérieure et inférieure d'un canal, voit sa résonance décalée vers les basses fréquences. Pour des rayons compris entre  $R_0 = 20$  et  $100 \mu\text{m}$ , nous avons identifié une nouvelle source d'amortissement pour la pulsation de la bulle. En effet, lorsque le liquide est mis en mouvement autour de la bulle, il peut déformer les parois du canal, à condition que celles-ci soient flexibles. C'est le cas pour un canal microfluidique en PDMS : des ondes de Rayleigh sont alors générées en surface du canal depuis la paroi de la bulle. La prise en compte de ces ondes nous permet d'expliquer à la fois la courbe de résonance de la pulsation en volume de la bulle et l'auto-organisation des bulles confinées en réseau. Cependant, ces ondes de Rayleigh n'ont jusqu'à maintenant pas été observées dans cette géométrie. Un montage interférométrique est en voie de construction pour les mettre en évidence. D'autres sources d'amortissement sont susceptibles de jouer un rôle. Nous avons montré que dans notre gamme de rayons, l'amortissement visqueux ainsi que les autres amortissements radiatifs sont négligeables par rapport à celui engendré par ces ondes de Rayleigh. Un premier calcul de l'amortissement thermique 2D a été fait et a montré la nécessité de prendre en compte les échanges thermiques entre la bulle et le PDMS. Il reste également à quantifier l'importance de la friction aux parois dans cette géométrie pour pouvoir conclure sur la dynamique de la vibration axisymétrique de la bulle. Etant donné la bonne concordance entre le modèle et les résultats expérimentaux, et vu que l'auto-organisation des bulles confirment la présence d'un couplage à faible portée, le modèle qui a été proposé jusqu'à présent semble cependant tenir la route. En première approximation, nous sommes donc partis du principe que seul l'amortissement radiatif comptait dans notre cas. Cela nous permet ainsi de nous rapprocher des conditions de super résonance identifiées par Feuillade, à savoir un amortissement essentiellement radiatif et des bulles séparées de la bonne distance.

L'écoulement autour de la bulle a également été étudié. Il en ressort que la pulsation monopole de la bulle génère des écoulements sur des distances de l'ordre de la taille de la bulle. Ces écoulements sont probablement dus à l'apparition d'une couche limite oscillante au niveau de la paroi du canal. Lorsque l'on ajoute d'autres bulles, les écoulements dominants sont cette fois dus à l'interaction entre deux modes distincts. Le mode monopole et le mode de translation étant les deux modes les plus amplifiés, c'est leur interaction qui domine, et on obtient finalement un écoulement dipolaire autour de chaque bulle. Pour ce qui est du mélange, nous ne pouvons à ce stade faire mieux que [Wang et al., 2013] : un mélange efficace ne pourra être créé que si l'on modifie périodiquement l'amplitude ou la fréquence d'excitation des bulles.

Aux fortes amplitudes d'excitation, nous avons identifié l'apparition de modes de surface paramétriques sur le pourtour de la bulle. Ces modes sont bidimensionnels du fait de

la faible épaisseur du canal. Leur dynamique a été étudiée et un diagramme de phases a été tracé pour identifier les conditions d'apparition de ces modes. Il manque cependant l'établissement d'un modèle décrivant l'amortissement visqueux 2D autour des modes pour connaître la dynamique des modes. Ces modes paramétriques étant de forte amplitude, ils génèrent des écoulements puissants. En revanche, ils sont de très courte portée, ce qui les rendent très intéressants pour des applications de triage en microfluidique. D'autre part, la rotation de ces modes engendrent une rotation des vortex associés. Ainsi, il n'est a priori plus besoin de faire varier la fréquence ou l'amplitude d'excitation des bulles pour faire du mélange efficace, il suffirait d'utiliser ces modes tournants en plus de l'interaction entre le mode monopole et le mode de translation.

En augmentant le nombre de bulles en interaction, nous sommes ensuite partis à la recherche d'effets collectifs dans les réseaux de bulles. Ces effets collectifs proviennent du couplage des bulles via les ondes de Rayleigh. Nous avons identifié des conditions d'amplification d'une part et de synchronisation d'autre part pour des réseaux de triangulaires et carrés de bulles. Il est apparu qu'un réseau triangulaire est plus facile à synchroniser qu'un réseau carré. Cependant, les conditions de bord dans le canal imposent localement un réseau carré, du fait de l'interaction de la bulle avec son image à travers le mur. Il faudra donc à l'avenir prendre en compte correctement ces effets de bord pour conclure sur le meilleur agencement possible du réseau de bulles.

Maintenant que nous connaissons un peu mieux la réponse acoustique de notre système de bulles, il reste à savoir si un tel réseau, carré ou triangulaire, serait capable d'absorber une onde propagative incidente arrivant selon la normale au plan de bulles. Contrairement aux travaux menés par [Bretagne et al., 2011], nos bulles sont libres de pulser dans le plan du canal. Grâce à la génération des ondes de Rayleigh, on s'attend donc à une absorption encore plus importante du réseau que ce qui a pu être observé jusqu'à présent dans les gels avec inclusions d'air. A l'aide d'un dispositif d'excitation externe (voir figure II.6), nous avons déjà pu observer une absorption liée à la quantité de bulles sur le réseau. Il suffirait ici apparemment de quelques dizaines de bulles pour générer une absorption acoustique.

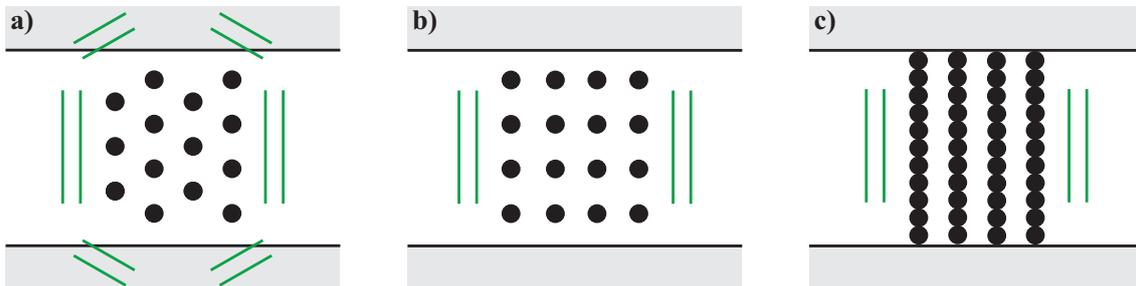


FIGURE V.22 – Directions d'émission du réseau de bulles dans le cas (a) d'un réseau triangulaire, (b) d'un réseau carré et (c) de lignes de bulles.

Enfin, pour ce qui est du SASER à bulles, nous avons identifié les conditions de synchronisation du réseau. Nous avons montré que malgré l'ancrage des bulles, les bulles restent libres de bouger autour de la position fixée par le trou, à condition qu'elles soient plus grosses que le trou. Nous pouvons donc imaginer avoir une émission acoustique importante dans les directions perpendiculaires aux différents plans du réseau (figure V.22a

et V.22b). Le problème dans cette géométrie est que la détection acoustique y est difficile puisque le canal est de faible épaisseur. Ne sachant pas si l'émission a lieu dans le liquide ou à la surface du canal, il faudra donc à la fois utiliser un dispositif interférométrique pour visualiser les ondes de Rayleigh et trouver une géométrie de canal permettant de mesurer l'onde acoustique dans le plan du canal. Il sera enfin intéressant de forcer un alignement des bulles pour créer des plans espacés de la longueur d'onde de Rayleigh, de façon à se rapprocher de la géométrie initialement imaginée par Zavtrak (voir figure V.22c). Sachant que les bulles collées semblent pulser comme une seule et même bulle, il se pourrait bien que l'on parvienne à des effets importants tout en gardant une direction d'émission unique.



# Annexes



# A. FABRICATION DES CANAUX

---

Les microcanaux ont été fabriqués en utilisant les techniques de photo-lithographie habituelles en microfluidique. Un masque composé des différents éléments du circuit microfluidique est tout d'abord réalisé sous Adobe Illustrator, puis imprimé sur un transparent à une résolution de 3200 dpi. Un moule de résine époxy négative SU-8 (Gersteltec, GM1070) est ensuite réalisé à partir de ce dessin. La résine est dans un premier temps étalée sur un wafer de silicium à l'aide d'un "spin-coater". Une première cuisson de la résine permet d'évaporer le solvant présent dans la résine. La résine est ensuite exposée aux UV à travers le masque : les parties insolées sont alors activées pour la réticulation, la diffusion des sites actifs étant limitée grâce à la première cuisson. La deuxième cuisson permet alors la polymérisation au niveau des parties insolées. Enfin, la plaque de résine est développée dans un bain de PGMEA : la résine non réticulée se dissout alors dans le solvant. Une dernière cuisson permet de faire disparaître les fissures existantes sur le moule.

Deux moules en résine sont préparés : le premier est celui du canal avec le flow-focusing, le second celui des trous d'ancrage. Une lame de verre d'1 mm d'épaisseur est positionnée au-dessus du moule du canal. Sa distance au canal est alors contrôlée par l'épaisseur des cales de verre qui la soutiennent ( $100\ \mu\text{m}$  ici). Du polydiméthylsiloxane (PDMS, Sylgard 184, Dow Corning) est ensuite coulé dans les deux moules. La proportion de réticulant ajouté à l'huile silicone est de 1 : 10. Après 3h de cuisson à  $65^\circ\text{C}$ , le PDMS est réticulé (figure A.1a). Après découpe (suivant les traits jaunes de la figure A.1), les cales sont retirées et seule la lame de verre reste (figure A.1b). Pour refermer le canal, il suffit alors d'activer la surface des deux plaques de PDMS avec un plasma, puis de coller les deux plaques ensemble (figure A.1c). La pastille piézoélectrique est ensuite collée à la lame avec une colle époxy ARALDITE à prise lente. Après 1h de cuisson à  $65^\circ\text{C}$ , le système est prêt à être utilisé.

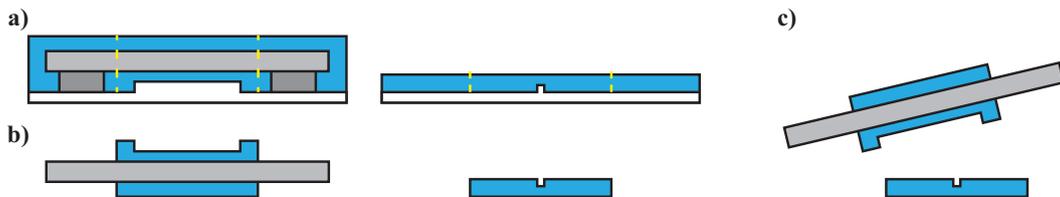


FIGURE A.1 – (a) Les deux moules en résine (blanc) sur lesquels est moulé du PDMS (bleu). Une lame de verre (gris clair) est maintenue sur des cales (gris foncé) au-dessus du canal. (b) Les deux plaques de PDMS après découpage selon les lignes de découpe jaunes. (c) Assemblage des deux plaques.

Le PDMS est un élastomère hydrophobe, ce qui pose problème pour le bon fonctionnement du flow-focusing. Pour le rendre hydrophile, nous avons utilisé un plasma d'oxygène pour coller les deux parties du canal. Cela permet d'une part de créer des liaisons covalentes entre les deux surfaces en contact, et d'autre part de créer des groupes hydroxyles (-OH) au niveau des surfaces libres, donnant un caractère hydrophile au canal pendant plusieurs jours, à condition que le canal soit régulièrement rempli d'eau.

## B. LES DIFFÉRENTES ONDES ACOUSTIQUES

On distingue généralement les ondes acoustiques en deux classes : les ondes de volume et les ondes de surface. Parmi les ondes de volume (figure B.1), on distingue les ondes de compression, appelée ondes primaires en sismologie (ondes P), et les ondes de cisaillement, appelées onde secondaires en sismologie (onde S) du fait de leur plus faible vitesse.

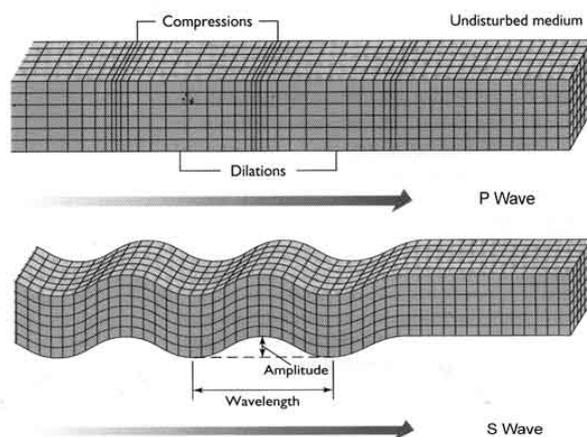


FIGURE B.1 – Les ondes acoustiques de volume : (a) Onde de compression (onde P) (b) Onde de cisaillement (onde S).

Parmi les ondes de surface, on distingue deux cas suivant l'épaisseur  $e$  du solide considéré. Si cette épaisseur est plus grande que la longueur d'onde de l'onde de surface ( $e \gg \lambda$ ), deux types d'ondes sont rencontrés : les ondes de Love où le solide est cisailé en surface, et les ondes de Rayleigh où l'on se retrouve à la fois avec du cisaillement et de la compression, conduisant à des trajectoires elliptiques dans le solide (figure B.2).

Si l'épaisseur de la couche solide est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde ( $e \simeq \lambda$ ), on est alors en présence d'ondes de Lamb. Celles-ci peuvent être soit symétriques, soit antisymétriques (figure B.3).

La vitesse des ondes de Lamb de verre est mesurée dans [Rabaud *et al.*, 2011] : celle-ci évolue entre 500 m/s à  $f = 50$  kHz et 1000 m/s à  $f = 120$  kHz.

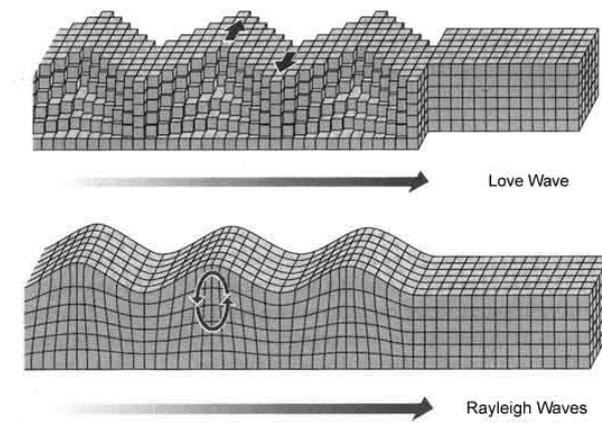


FIGURE B.2 – Les ondes acoustiques de surface : (a) Onde de Love (b) Onde de Rayleigh.

onde de Lamb symétrique



onde de Lamb antisymétrique



FIGURE B.3 – Les ondes de Lamb symétrique et antisymétrique.

# C. OBTENTION DE L'AMPLITUDE ET DE L'ORIENTATION DES MODES DE VIBRATION

---

Dans cette annexe, nous allons détailler la méthode d'obtention des paramètres de vibration d'une bulle. Dans un premier temps, nous analyserons le contour de la bulle sur une image prise à un instant donné, puis nous verrons dans un second temps comment étendre cette analyse à une vidéo de bulle.

Intéressons nous d'abord au contour d'une bulle à un instant donné. La fonction *contour* de Matlab nous permet d'accéder aux positions  $\rho(k)$  du contour correspondant à des angles  $\theta(k) = 2\pi \frac{k}{N}$ , où  $k$  est le numéro du point de mesure et  $N = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) le nombre de points de mesure de ce contour.

Pour déterminer l'amplitude et l'orientation des différents modes, nous avons utilisé la fonction *fft* de Matlab. Celle-ci permet de calculer la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal échantillonné. Notons  $\tilde{\rho}(n)$  la TFD de la fonction  $\rho(k)$ . La définition-même de la transformée de Fourier discrète nous donne :

$$\rho(k) = \frac{1}{N}\tilde{\rho}(0) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \tilde{\rho}(n)e^{2i\pi n \frac{k}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \tilde{\rho}(N-n)e^{-2i\pi n \frac{k}{N}}$$

Comme la fonction  $\rho$  est décomposable en série de Fourier,  $\tilde{\rho}(N-n)$  et  $\tilde{\rho}(n)$  sont égaux en amplitude, mais de phases opposées, pour  $n > 0$ . On en déduit que :

$$\rho(k) = \frac{1}{N}\tilde{\rho}(0) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} |\tilde{\rho}(n)| \cos(n\theta + \phi_{\tilde{\rho}(n)}),$$

où  $\phi_{\tilde{\rho}(n)}$  désigne la phase du nombre complexe  $\tilde{\rho}(n)$ . On peut ainsi récupérer l'expression des paramètres de l'équation II.1 :

$$a_0 = \frac{1}{N}|\tilde{\rho}(0)| \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{N}|\tilde{\rho}(n)| \\ \psi_n = \phi_{\tilde{\rho}(n)} \end{cases} \quad \text{pour } n > 1$$

Une petite difficulté survient lorsqu'on commence à s'intéresser à l'évolution temporelle de ces modes, notamment dans le cas où la composante oscillante du mode est plus grande que sa composante continue. Pour mieux comprendre de quoi il retourne, prenons l'exemple d'un contour décrit par :

$$\rho(\theta, t) = R_0 + \frac{1}{8}R_0 \cos(\omega t) \cos(5\theta + 2\pi t/10)$$

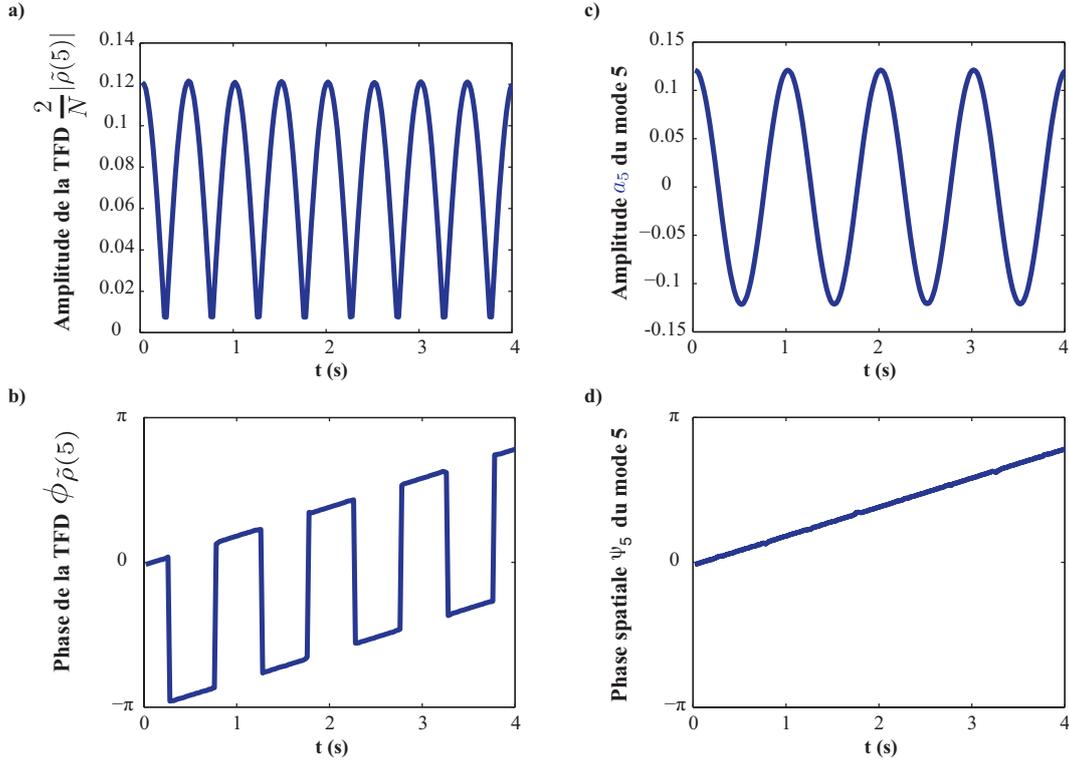


FIGURE C.1 – Détermination de l'amplitude et de la phase spatiale d'un contour  $\rho(\theta, t) = R_0 + \frac{1}{8}R_0 \cos(\omega t) \cos(5\theta + 2\pi t/10)$ . (a) Amplitude calculée du mode 5 :  $\frac{2}{N} |\tilde{\rho}(5)|$ . (b) Phase spatiale calculée du mode 5 :  $\phi_{\tilde{\rho}(5)}$ . Il s'agit de la superposition de  $\psi_5$  avec des sauts de  $\pi$  dus à l'annulation de  $a_5$ . (c) Amplitude  $a_5$  après décomposition de  $\phi_{\tilde{\rho}(5)}$ . (d) Phase spatiale  $\psi_5$  après décomposition de  $\phi_{\tilde{\rho}(5)}$ .

Dans cet exemple, le mode de surface  $n = 5$  a une composante continue nulle et une composante oscillante non nulle. L'évolution temporelle de  $\frac{2}{N} |\tilde{\rho}(n)|$  montre un doublement de fréquence dû à la présence d'une valeur absolue (voir figure C.1a). En effet, cela vient de la propriété suivante du cosinus :  $\cos(\theta_1 + \pi) \cos(\theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \pi)$ . Ainsi, comme on le voit sur la figure C.1b, une partie de l'information de  $a_5$  est perdue dans la phase spatiale  $\phi_{\tilde{\rho}(n)}$ , qui fait régulièrement des sauts de  $\pi$  chaque fois que  $a_5$  s'annule.

D'autre part, dans ce même exemple, la phase spatiale évolue avec le temps :  $\psi_5 = 2\pi t/T$ , avec  $T = 10$  s. La phase de la TFD nous donne du coup une superposition entre la phase spatiale réelle  $\psi_5$ , évoluant lentement avec le temps, et les sauts de  $\pi$  dus aux passages de  $a_5$  par 0.

A l'aide de la fonction *unwrap* de Matlab, nous avons pu récupérer la phase spatiale réelle  $\psi_n$  (figure C.1d). Et en traçant  $\frac{2}{N} |\tilde{\rho}(n)| \cos(\phi_{\tilde{\rho}(n)} - \psi_n)$ , on retrouve finalement l'évolution temporelle de  $a_n$  (figure C.1c).

Le signal  $a_n(t)$  est enfin multiplié par  $\cos(\omega_n t)$ , permettant la détermination de la phase temporelle  $\phi_n(t)$  et de son évolution temporelle.

# D. EQUATION DE LA VORTICITÉ

---

Soit  $\mathbf{v} = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_z$  la vitesse de l'écoulement autour d'une bulle. La fonction courant  $\Psi$  est alors définie par :  $\mathbf{v} = \nabla \wedge \Psi \mathbf{e}_z$ . On a donc :

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$U_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_f \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = -\nabla \left( p + \rho_f \frac{v^2}{2} \right) + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (\text{D.1})$$

où  $\mathbf{F}$  est une force externe. On peut définir la vorticité  $\zeta$  de l'écoulement par :  $\zeta = \nabla \wedge \mathbf{v}$ . En prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (D.1) et en utilisant la propriété du rotationnel sur un vecteur  $\mathbf{A}$  :  $\nabla \wedge \Delta \mathbf{A} = \Delta(\nabla \wedge \mathbf{A})$ , on déduit l'équation de la vorticité :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \zeta) = \nu \Delta \zeta + \frac{1}{\rho_f} \nabla \wedge \mathbf{F} \quad (\text{D.2})$$

En effet, le terme de pression disparaît car le rotationnel d'un gradient d'un scalaire est nul.

On suppose que la force  $\mathbf{F}$  est une force conservative, et qu'elle peut donc s'écrire sous la forme d'un gradient. On a alors  $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Il nous reste donc :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \zeta) = \nu \Delta \zeta$$

On peut montrer d'autre part que :  $\zeta = -\Delta \Psi \mathbf{e}_z$ . Après calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \zeta) &= \frac{1}{r} [\partial_\theta \Psi \partial_r \Delta \Psi - \partial_r \Psi \partial_\theta \Delta \Psi] \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(r, \theta)} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(r, \theta)}$  est le déterminant de la matrice jacobienne  $\begin{pmatrix} \partial_r \Psi & \partial_r \Delta \Psi \\ \partial_\theta \Psi & \partial_\theta \Delta \Psi \end{pmatrix}$ .

L'équation de la vorticité (D.2) projetée sur l'axe  $z$  s'écrit par conséquent pour la fonction de courant  $\Psi$  :

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu \Delta^2 \Psi \quad (\text{D.3})$$



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [Abbyad et al., 2011] ABBYAD, P., DANGLA, R., ALEXANDROU, A. et BAROUD, C. N. (2011). Rails and anchors : guiding and trapping droplet microreactors in two dimensions. Lab on a Chip, 11:813–821.
- [Abramowitz et Stegun, 1964] ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. (1964). Handbook of Mathematical Functions. Dover publication.
- [Ahmed et al., 2013] AHMED, D., CHAN, C. Y., LIN, S.-C. S., MUDDANA, H. S., NAMA, N., BENKOVIC, S. J. et JUN HUANG, T. (2013). Tunable, pulsatile chemical gradient generation via acoustically driven oscillating bubbles. Lab on a Chip, 13:328–331.
- [Ahmed et al., 2009] AHMED, D., MAO, X., JULURI, B. K. et HUANG, T. J. (2009). A fast microfluidic mixer based on acoustically driven sidewall-trapped microbubbles. Microfluidics and nanofluidics, 7:727–731.
- [Brennen, 1995] BRENNEN, C. E. (1995). Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford University Press, Oxford.
- [Bretagne et al., 2011] BRETAGNE, A., TOURIN, A. et LEROY, V. (2011). Enhanced and reduced transmission of acoustic waves with bubble meta-screens. Applied Physics Letters, 99:221906.
- [Broer et Simo, 2000] BROER, H. et SIMO, C. (2000). Resonance tongues in hill's equations : A geometric approach. Journal of Differential Equations, 166:290–327.
- [Cantat, 2013] CANTAT, I. (2013). Liquid meniscus friction on a wet plate : Bubbles, lamellae, and foams. Physics of Fluids, 25:031303.
- [Cosgrove, 2006] COSGROVE, D. (2006). Ultrasound contrast agents : An overview. European Journal of Radiology, 60:324–330.
- [Dangla et al., 2013] DANGLA, R., FRADET, E., LOPEZ, Y. et BAROUD, C. N. (2013). The physical mechanisms of step emulsification. Journal of Physics D : Applied Physics, 46.
- [Dangla et al., 2011] DANGLA, R., LEE, S. et BAROUD, C. N. (2011). Trapping microfluidic drops in wells of surface energy. Physical Review Letters, 107:124–501.
- [Davidson et Riley, 1971] DAVIDSON, B. J. et RILEY, N. (1971). Cavitation microstreaming. Journal of Sound and Vibration, 15:217–233.
- [Dollet et al., 2008] DOLLET, B., van HOEVE, W., RAVEN, J.-P., MARMOTTANT, P. et VERSLUIS, M. (2008). Role of the channel geometry on the bubble pinch-off in flow-focusing devices. Physical Review Letters, 100:034504.
- [Elder, 1958] ELDER, S. A. (1958). Cavitation microstreaming. Journal of the Acoustical Society of America, 31:54–64.
- [Eteshola et Leckband, 2001] ETESHOLA, E. et LECKBAND, D. (2001). Development and characterization of an elisa assay in pdms microfluidic channels. Sensors and Actuators B, 72:129–133.
- [Feuillade, 1995] FEUILLADE, C. (1995). Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances. Journal of the Acoustical Society of America, 98:1178–1190.

- [Francescutto et Nabergoj, 1978] FRANCESCUTTO, A. et NABERGOJ, R. (1978). Pulsation amplitude threshold for surface waves on oscillating bubbles. *Acustica*, 41:215–220.
- [Fuard et al., 2008] FUARD, D., TZVETKOVA-CHEVOLLEAU, T., DECOSAS, S., TRACQUI, P. et SCHIAVONE, P. (2008). Optimization of poly-di-methyl-siloxane (pdms) substrates for studying cellular adhesion and motility. *Microelectronic Engineering*, 85:1289–1293.
- [Garstecki et al., 2004] GARSTECKI, P., GITLIN, I., DILUZIO, W., WHITESIDES, G. M., KUMACHEVA, E. et STONE, H. A. (2004). Formation of monodisperse bubbles in a microfluidic flow-focusing device. *Applied Physics Letters*, 85:2649–2651.
- [Hilgenfeldt et al., 1996] HILGENFELDT, S., LOHSE, D. et BRENNER, M. P. (1996). Phase diagrams for sonoluminescing bubbles. *Physics of Fluids*, 8:2808–2826.
- [Kafesaki et al., 2000] KAFESAKI, M., PENCIU, R. et ECONOMOU, E. (2000). Air bubbles in water : A strongly multiple scattering medium for acoustic waves. *Physical Review Letters*, 84:6050–6053.
- [Kushwaha et al., 1998] KUSHWAHA, M., DJAFARI-ROUHANI, B. et DOBRZYNSKI, L. (1998). Sound isolation from cubic arrays of air bubbles in water. *Physics Letters A*, 248:252–256.
- [Lee et al., 2011] LEE, C.-Y., CHANG, C.-L., WANG, Y.-N. et FU, L.-M. (2011). Microfluidic mixing : a review. *International journal of molecular sciences*, 12:3263–3287.
- [Leighton, 1994] LEIGHTON, T. G. (1994). *The acoustic bubble*. Academic Press, London.
- [Leroy, 2004] LEROY, V. (2004). *Bulles d’air dans l’eau : couplage d’oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- [Leroy et al., 2009a] LEROY, V., BRETAGNE, A., FINK, M. et TOURIN, A. (2009a). Design and characterization of bubble phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 95:171904.
- [Leroy et al., 2015] LEROY, V., STRYBULEVYCH, A., LANOY, M., LEMOULT, F., TOURIN, A. et PAGE, J. (2015). Super-absorption of acoustic waves with bubble metascreens. *Physical Review B*, 91:020301.
- [Leroy et al., 2009b] LEROY, V., STRYBULEVYCH, A., SCANLON, M. et PAGE, J. (2009b). Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles. *European Physical Journal E*, 29:123–130.
- [Lighthill, 1978] LIGHTHILL, S. J. (1978). Acoustic streaming. *Journal of Sound and Vibration*, 61:391 – 418.
- [Longuet-Higgins, 1998] LONGUET-HIGGINS, M. S. (1998). Viscous streaming from an oscillating spherical bubble. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 454:725–742.
- [Luong et Phan, 2010] LUONG, T.-D. et PHAN, V.-N. ad Nguyen, N.-T. (2010). High-throughput micromixers based on acoustic streaming induced by surface acoustic wave. *Microfluidics and Nanofluidics*, 10:619–625.
- [Marmottant et Hilgenfeldt, 2003] MARMOTTANT, P. et HILGENFELDT, S. (2003). Controlled vesicle deformation and lysis by single oscillating bubbles. *Nature*, 423:153–156.
- [Marmottant et al., 2006] MARMOTTANT, P., VERSLUIS, M., de JONG, N., HILGENFELDT, S. et LOHSE, D. (2006). High-speed imaging of an ultrasound-driven bubble in contact with a wall : “narcissus” effect and resolved acoustic streaming. *Experiments in Fluids*, 41:147–153.

- [Michell, 1899] MICHELL, J. (1899). On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. Proceedings of the London Mathematical Society, 31:100–124.
- [Minnaert, 1933] MINNAERT, M. (1933). On musical air-bubbles and the sounds of running water. Philosophical Magazine Series 7, 16:235–248.
- [Muller et al., 2012] MULLER, P., BARNKOB, R., JENSEN, M. et BRUUS, H. (2012). A numerical study of microparticle acoustophoresis driven by acoustic radiation forces and streaming-induced drag forces. Lab on a Chip, 12:4617–4627.
- [Nyborg, 1958] NYBORG, W. L. (1958). Acoustic streaming near a boundary. Journal of the Acoustical Society of America, 30:329–339.
- [Petit et Gondret, 1992] PETIT, L. et GONDRET, P. (1992). Redressement d'un écoulement alternatif. Journal de Physique II, 2:2115–2144.
- [Plesset et Prosperetti, 1977] PLESSET, M. S. et PROSPERETTI, A. (1977). Bubble dynamics and cavitation. Annual Review of Fluid Mechanics, 9:145–185.
- [Prosperetti, 2004] PROSPERETTI, A. (2004). Bubbles. Physics of Fluids, 16:1852.
- [Rabaud, 2010] RABAUD, D. (2010). Manipulation et interaction de micro-bulles sous champ acoustique. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- [Rabaud et al., 2011] RABAUD, D., THIBAUT, P., MATHIEU, M. et MARMOTTANT, P. (2011). Acoustically bound microfluidic bubble crystals. Physical Review Letters, 106:134501.
- [Rabaud et al., 2011] RABAUD, D., THIBAUT, P., RAVEN, J.-P., HUGON, O., LACOT, E. et MARMOTTANT, P. (2011). Manipulation of confined bubbles in a thin microchannel : Drag and acoustic Bjerknes forces. Physics of Fluids, 23:042003.
- [Rallabandi et al., 2014] RALLABANDI, B., WANG, C. et HILGENFELDT, S. (2014). Two-dimensional streaming flows driven by sessile semicylindrical microbubbles. Journal of Fluid Mechanics, 739:57–71.
- [Raney et al., 1954] RANEY, W., CORELLI, J. et WESTERVELT, P. J. (1954). Acoustical streaming in the vicinity of a cylinder. Journal of the Acoustical Society of America, 26:1006–1014.
- [Rogers et Neild, 2011] ROGERS, P. et NEILD, A. (2011). Selective particle trapping using an oscillating microbubble. Lab on a Chip, 11:3710–3715.
- [Rossier et Girault, 2001] ROSSIER, J. et GIRAULT, H. (2001). Enzyme linked immunosorbent assay on a microchip with electrochemical detection. Lab on a Chip, 1:153–157.
- [Royer et Dieulesaint, 2000] ROYER, D. et DIEULESAINT, E. (2000). Elastic waves in solids I : free and guided propagation. Springer-Verlag.
- [Strogatz, 2000] STROGATZ, S. (2000). From kuramoto to crawford : exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. Physica D, 143:1–20.
- [Stroock et al., 2002] STROOCK, A. D., DERTINGER, S. K. W., ADJARI, A., MEZIĆ, I., STONE, H. et WHITESIDES, G. M. (2002). Chaotic mixer for microchannels. Science, 295:647–651.
- [Tho et al., 2007] THO, P., MANASSEH, R. et OOI, A. (2007). Cavitation microstreaming patterns in single and multiple bubble systems. Journal of Fluid Mechanics, 576:191–233.
- [Wang et al., 2011] WANG, C., JALIKOP, S. V. et HILGENFELDT, S. (2011). Size-sensitive sorting of microparticles through control of flow geometry. Applied Physics Letters, 99:034101–034101.

- 
- [Wang et al., 2013] WANG, C., RALLABANDI, B. et HILGENFELDT, S. (2013). Frequency dependence and frequency control of microbubble streaming flows. Physics of Fluids, 25:022002.
- [Wiklund et Hertz, 2006] WIKLUND, M. et HERTZ, H. M. (2006). Ultrasonic enhancement of bead-based bioaffinity assays. Lab on a Chip, 6:1279–1292.
- [Wu et Du, 1997] WU, J. et DU, G. (1997). Streaming generated by a bubble in an ultrasound field. Journal of the Acoustical Society of America, 101:1899–1907.
- [Zavtrak et Volkov, 1997] ZAVTRAK, S. et VOLKOV, I. V. (1997). Saser (sound amplification by stimulated emission of radiation). Technical Physics, 42:406–414.
- [Zavtrak, 1995] ZAVTRAK, S. T. (1995). Acoustic laser with dispersed particles as an analog of a free-electron laser. Physical Review E, 51:2480–2484.
- [Zavtrak, 1996] ZAVTRAK, S. T. (1996). Acoustical laser with mechanical pumping. Journal of the Acoustical Society of America, 99:730–733. journal article.



## **Oscillations couplées de microbulles sous champ ultrasonore et conséquences hydrodynamiques**

Les propriétés acoustiques des bulles sont reconnues pour leur potentiel dans des applications tant biologiques que médicales. Capables de provoquer la lyse des cellules en générant des écoulements intenses, elles peuvent aussi servir d'agent de contraste en échographie.

Ce manuscrit traite de la dynamique de vibration de bulles confinées entre les deux murs d'un canal microfluidique. Ces bulles exhibent une pulsation en volume aux faibles amplitudes d'excitation, à laquelle se superpose un mode de surface paramétrique aux plus fortes amplitudes. Le matériau constituant le canal étant élastique, la pulsation de la bulle confinée a pour effet de générer des ondes de Rayleigh sur les parois du canal. Grâce à ces ondes de surface, les bulles vont pouvoir se coupler les unes aux autres. Ce couplage a un effet sur les écoulements hydrodynamiques autour de ces bulles. En effet, la présence d'une bulle voisine engendre l'apparition d'un mode de translation de la bulle qui, couplé à sa pulsation en volume, conduira à la génération d'écoulements à longue portée. Ce même couplage permet aux bulles de s'auto-organiser en réseau. Afin d'étudier de manière contrôlée les effets collectifs des bulles, leur position a été fixée à l'aide de puits capillaires. Les conditions d'amplification et de synchronisation de la vibration des bulles sont recherchées en vue de créer de nouveaux méta-matériaux.

**mots-clés** dynamique de bulles - oscillateurs couplés - écoulement redressé - microfluidique - acoustique - saser

## **Coupled oscillations of microbubbles under ultrasound and hydrodynamic consequences**

The pulsation properties of air bubbles under ultrasound have received much attention since the development of sonoporation and contrast agents. Spherical bubbles are well known to induce streaming when excited by ultrasound.

We report in this manuscript the acoustic vibration of microbubbles confined between the two walls of a microfluidic channel. These bubbles exhibit a volumetric pulsation at low intensities of ultrasound, superimposed with a parametric surface mode for higher intensities of the pressure field. Because the channel walls are elastic, the bubble pulsation leads to the generation of Rayleigh waves at the channel wall interface. The bubble coupling induced by these surface waves has hydrodynamic consequences. In fact, a neighbouring bubble will create a translation mode of the bubble, in addition to its volumetric pulsation. It gives rise to a long-range mixed-mode streaming. The Rayleigh waves lead also to a self-organization of the bubbles in a network. In order to study the collective effects of these bubble networks in a controlled manner, bubble positions were fixed by capillarity on micropits. Conditions for an amplification or a synchronization of the bubble pulsations are sought in order to develop new bubble metamaterials.

**keywords** bubble dynamics - coupled oscillators - acoustic streaming - microfluidic - acoustic - saser